교육학석사 학위논문

지수 표현에 대한 예비 교사의 이해 분석: 다의적 접근을 중심으로

2023년 8월

서울대학교 대학원
수학교육과
김 경 준

지수 표현에 대한
예비 교사의 이해 분석:
다의적 접근을 중심으로

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함
2023년 6월

서울대학교 대학원
수학교육과
김 경 준

김경준의 석사학위논문을 인준함
2023년 7월

위 원 장 김 서 령 (인)

부위원장 권 오 남 (인)

위 원 이 경 화 (인)

국문초록

지수 표현에 대한 예비 교사의 이해 분석: 다의적 접근을 중심으로

지수 개념은 중학교, 고등학교, 대학교 교육과정 모두에서 다뤄지는 주제이다. 중학교에서는 거듭제곱을 통해 지수 표현이 처음 도입되고, 고등학교에서는 실수까지 지수를 확장한다. 대학교에서는 전공과목인 <복소해석학>에서 복소 지수까지 확장한다. 여기서 실수로 확장된 지수 개념이 복소수로 확장될 때, 실수 지수에서 성립했던 내용 중 일부는 복소 지수에서도 유지되지만, 일부는 그 의미가 변한다. 특히, 유리수 지수가 고려되는 영역이 실수에서 복소수로 확장되는 과정에서 지수 표현의 다의성이 발생한다. 이는 형식불역의 원리와 무모순성의 원리를 바탕으로 결과적 유용성은 극대화하고 잠재적 모순성은 최소화하려는 시도의 산물이다. 결과적으로 하나의 지수 표현이더라도 고려되는 영역이 실수인지 복소수인지에 따라 해당 수학적 표현이 나타내는 의미가 달라진다. 이러한 관점에서 지수 표현은 대학 수학을 학습하는 학습자에게 다의성을 갖는 개념으로 이해된다. 이 연구에서는 다의성을 갖는 지수 표현에 대한 예비 교사의 이해를 살펴보고자 하였다.

지수 표현에 대한 예비 교사의 이해를 살펴보기 위하여 지수 표

현에 관한 예비 교사의 개념 이미지를 다의적 관점에서 분석하였다. 이를 위해 사범대학교 복소해석학 강좌를 수강한 학생들의 학기말 고사에 출제된 세 문항에 대한 구두시험 문항의 답변을 수집하였다. 예비 교사의 답변에서 영역 특수 개념, 포괄적 개념, 메타 전제를 도출하였다. 이러한 내용을 바탕으로 지수 표현에 대한 그룹별 다의적 개념 이미지의 특징을 분석하였다. 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 지수 표현의 다의성에 대한 예비 교사의 다의적 개념 이미지를 통합된 다의적 개념 이미지(CCC 그룹)와 편향된 다의적 개념 이미지(CCR 그룹, CRC 그룹, CRR 그룹)로 분류할 수 있었다. 편향된 다의적 개념 이미지는 다시 실수 영역의 유리수 지수 편향된 다의적 개념 이미지(CCR 그룹), 실수해 편향된 다의적 개념 이미지(CRC 그룹), 실수 편향된 다의적 개념 이미지(CRR 그룹)로 세분화할 수 있었다. 편향된 개념 이미지를 가진 그룹에 속한 학생들은 영역 특수 개념에 해당하는 개념을 포괄적 개념에 잘못 위치시켰다. 이 학생들은 복소수 영역에서의 지수 표현을 단가성을 가지는 대상으로 간주하거나, 실수 영역에서만 성립하는 지식을 복소수 영역에 그대로 적용하였다. 또한, 실수 영역에서 정의되지 않는 대상인 밑이 음수인 유리수 지수 표현을 복소수 영역에서만 성립하는 영역 특수 개념을 통해 잘못 이해하기도 하였다.

둘째, 지수 표현에 관한 서로 다른 개념 이미지 형성의 기저에는 메타 전제가 있었다. 통합된 개념 이미지를 가진 CCC 그룹에 속한 학생들은 ‘확장 전 영역에서 성립하는 성질이 확장 후 영역에서도 항상 성립하는 것은 아니다.’와 같은 메타 전제를 가졌다. 이는 다의성을 갖는 지수 표현을 이해하는 데 적합한 일반화된 사고방식이다. 이와 달리 편향된 개념 이미지를 가진 CCR 그룹, CRC 그룹, CCR 그룹에 속하는 학생들은 ‘확장 전 영역에서 성립하는 성

질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다.'와 같은 메타 전제를 가졌다. 이는 실수 지수까지의 학습 과정에서는 적용되는 일반화된 사고방식이지만, 복소 지수에서는 더는 적용되지 않는 일반화된 사고방식이다.

이 연구는 장기간에 걸쳐 학습하게 되는 다의성을 갖는 수학적 개념을 학습자가 어떻게 이해하게 되는지를 다의적 접근을 통해 제시하는 데에 의의가 있다. 특히 예비 교사들이 다의성을 갖는 수학적 개념을 유연하게 이해하는 것은 학교 수학 내용의 본질을 파악하고 다양한 교수 상황에 대처하는 데 필요하다. 따라서 이 연구가 향후 학교 수학에서 지수와 관련된 교수·학습에 아이디어를 제공할 수 있을 것이며, 예비 교사를 위한 복소해석학 교육에 시사점을 줄 수 있을 것으로 예상된다.

주요어 : 지수 표현, 개념 이미지, 다의적 접근, 메타 전제, 복소해석학
학 번 : 2019-23685

목 차

표 목 차

그 림 목 차

제 1 장 서론

제 1 절 연구의 필요성

지수 표현은 중학교, 고등학교, 대학교 교육과정 모두에서 다뤄지는 수학적 대상으로 다의성을 갖는다. 중학교 <수학1> 교과서에서는 거듭제곱을 통해 지수 표현이 처음 도입되고, 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서는 실수까지 지수를 확장한다. 대학교에서는 전공과목인 <복소해석학>에서 다가 함수의 개념을 통해 복소 지수까지 확장한다. 여기서 실수 지수가 복소 지수로 확장될 때, 실수 지수에서 성립했던 내용 중 일부는 복소 지수에서도 유지되지만, 그 의미나 성질이 변하는 부분도 있다. 이러한 관점에서 지수 표현은 다의성을 갖는 대상이다. 하나의 지수 표현이라도 실수 영역인지 복소수 영역인지에 따라 그 의미가 달라지기 때문이다. 예를 들어, $1^{\frac{1}{2}}$은 실수 영역에서는 $\sqrt{1}$로 정의되며, $\sqrt{1}$은 제곱해서 1이 되는 수 중에서 양수로 정의되므로 1이다. 이와 달리, 복소수 영역에서는 복소 지수의 정의에 따라 $1^{\frac{1}{2}}$은 1과 -1이 된다. 정리하자면, $1^{\frac{1}{2}}$은 실수 영역과 복소수 영역에서 그 의미가 달라지는 다의성을 갖는 수학적 대상이다.

학생들이 다의성을 갖는 수학 개념을 학습하는 데에 겪는 어려움은 다양한 주제에서 연구되었다. Biza와 Zachariades(2010)와 Biza(2021)은 대학생의 접선에 대한 이해를 탐구하였다. 접선은 기하학, 대수학, 미적분학 등의 여러 영역에서 다뤄지는 내용으로 영역에 따라 그 의미에 차이가 있다. 분석 결과 다수의 학생은 여러 영역에서 다뤄진 접선을 혼합된 형태로 이해하였고, 일부 학생만 종합적으로 접선을 이해하고 있었다.

Kontorovich(2018a)는 대학생을 대상으로 한 일련의 연구를 통해 제곱근 개념에 대한 이해를 탐구하였다. 다수의 학생은 제곱근 개념이 주어지는 표현 방식 및 영역에 따라 그 의미를 일관되지 않은 다양한 방식으로 이해하였다. 이렇듯 학생들은 다의성을 갖는 수학적 대상을 종합적으로 이해하는 데에 어려움을 겪는다. 다의성을 갖는 지수 표현에 대한 학생의 이해를 분석한 연구가 일부 있으나(예를 들어, Even & Tirosh, 1995; Goel & Robillard, 1997; Tirosh & Even, 1997), 주로 음수의 유리수 지수 표현에 관한 모순적인 상황에 주목하였으며 지수 표현에 대한 학생들의 종합적인 이해를 살펴보지 않았다.

지수 개념은 여러 교과에서 오랜 기간 다뤄지는 주제일 뿐만 아니라, 거듭제곱근, 로그와 같이 다른 개념들과 긴밀하게 연결되는 개념이기도 하다. 예를 들어, 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서는 형식불역의 원리를 토대로 지수를 실수까지 확장하는데(이승우, 2021), 지수를 정수에서 유리수로 확장하는 과정에서 $a^{\frac{m}{n}}$은 n제곱해서 a^m이 되는 수 중에서 양수로, 즉, $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$로 정의한다. 다시 말해, 지수를 유리수로 확장하는 시점에서 지수 개념은 거듭제곱근 개념과 연결된다. 이때, 제곱근 개념도 다의성을 갖는 개념이며 선행 연구에서 많은 학생이 어려움을 겪는 주제임이 보고되었다(예를 들어, Kontorovich, 2018a). 이러한 사실은 학습자가 지수를 이해하는 과정을 더욱 복잡하게 만드는 요인으로 작용할 수 있다.

한편, 교사에게는 교과 횡단 개념[1)]인 지수 개념에 대한 다의적 이해가 더욱 중요하다고 할 수 있다. 교사에게 필요한 교과 내용 지식은 “어떤

---

1) 교과 횡단 개념(cross-curricular concept)은 학습자의 수학 학습을 장기적 관점에서 생각할 때, 두 가지 이상의 서로 다른 영역에서 다뤄지는 수학적 개념을 의미한다(Kontorovich, 2018b). 예를 들어, $\sqrt{a}$는 실수 영역에서는 제곱하여 a가 되는 음이 아닌 수로 정의되지만, 복소수 영역에서는 제곱하여 a가 되는 두 수로 정의된다. 이때, 서로 다른 영역은 서로 다른 공리적 체계와 서로 다른 대상을 가질 수 있는데, 이는 학습자가 교과 횡단 개념을 이해하는 데 어려움으로 작용할 수 있다.

것 자체를 아는 것(knowing that)"뿐만 아니라 "그 이유를 아는 것(knowing why)"도 포함된다(Shulman, 1986, p. 9). 지수 표현의 경우 지수가 확장되는 과정에서 밑 조건이 생성된 이유나 새롭게 정의된 수학적 대상을 그러한 방식으로 정의하는 이유를 알기 위해서는 복소 지수에 대한 이해가 도움이 된다. 또한, 지수와 관련하여 학교 수학 맥락에서 발생할 수 있는 오류는 궁극적으로 복소수 영역까지 확장된 지수의 정의를 통해 비로소 이해할 수 있다(Choi & Do, 2005). 따라서 교사에게 지수 표현에 대한 종합적이고 다의적인 이해가 중요하다고 할 수 있다. 이때, 지수 개념은 현직 교사들에게도 혼란을 주는 개념이다(신보미, 2021). 여러 교과에 걸쳐 그 의미가 확장되고 변화하는 지수 표현을 깊이 있게 이해하기 위해서는 지수에 관한 기존 지식을 해체하고 하나의 통합된 다의적 개념으로 재조직하는 학습 과정이 필요하다. 이러한 경험은 교사가 되기 전 예비 교사가 학문 수학을 학습하는 과정에서 이루어질 수 있다.

예비 교사는 교사가 되기 전에 학문 수학을 학습하며 학교 수학에서 다뤄지는 내용을 학문 수학의 관점에서 깊이 있게 이해하는 경험을 한다. 이러한 학습 과정에서 예비 교사는 어려움을 겪기도 하는데, 예비 교사가 학교 수학에서 학문 수학으로의 수학 학습의 전이 과정에서 경험하는 어려움을 Klein은 '일차 단절'이라고 표현하였다(Klein, 1903/1939). 이 연구는 주로 고등학교 학교급에 주목한 지수 관련 선행 연구와는 다르게 지수 표현을 중심으로 예비 교사가 중·고등학교에서 대학교로의 수학 학습의 전이 과정에서 겪는 일차 단절 현상과 그 원인을 살펴본다. 특히, 지수가 실수 영역과 복소수 영역으로 확장되는 중·고등학교에서 대학교 <복소해석학> 전공과목 사이의 단절 현상에 주목한다. 지수 개념의 경우 <복소해석학> 교과에서 비로소 깊은 이해를 할 수 있다는 점에서 예비 교사에게 중요하다. 왜냐하면, 선행 연구에서 지적한 유리수 지수 관련 이슈들은 복소수 영역에서 확장된 지수의 정의를 통해 비로소 제대로 이해할 수 있기 때문이다(Woo & Yim, 2008). 수학적 개념의 다의성에 관한 유창한 이해는 수학적 개념의 다의성의 존재성을 인식하고 서로 다른 영역에서 다뤄지는 아이디어 사이를 연결하는 경험을 요구한다는 점

에서(Kontorovich, 2018b, p. 18), 복소 지수의 학습이 중·고등학교 지수 개념에 대한 이해와 어떻게 연결되는지에 대한 연구는 필요하다고 할 수 있다.

제 2 절 연구의 목적 및 연구 질문

이 연구의 목적은 지수 표현에 대한 예비 교사의 이해를 다의적 관점에서 분석하는 것이다. 이러한 목적을 이루기 위한 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

지수 표현에 관한 예비 교사의 다의적 개념 이미지는 어떠한가?

지수 표현에 관한 예비 교사의 개념 이미지를 살펴보기 위하여 2020학년도 1학기 <복소해석학> 학기 말 시험에 출제된 학생들의 구두시험 답안의 내용을 분석하였다.

이러한 연구 질문에 대해 답하는 것은 예비 교사들이 장기간에 걸쳐 학습해온 지수에 관한 이해를 분석함으로써 예비 교사를 위한 복소해석학 교육에 활용될 수 있을 것이다. 본문은 총 5개의 장으로 제1장은 연구의 필요성과 연구 목적 및 연구 질문을 기술하였다. 제2장에서는 지수에 관한 선행 연구를 살펴보고 이 연구의 중심이 되는 개념 이미지에 대한 다의적 접근을 살펴본다. 또한, 교과서와 전공 교재에 서술된 지수 표현의 다의성을 살펴본다. 제3장은 연구 절차와 자료 수집 및 분석 방법을 기술하였다. 제4장은 제3장에 제시된 연구 방법으로 분석된 연구 결과에 관한 기술로, 그룹별 다의적 개념 이미지를 분석하고 그 특징을 정리할 것이다. 마지막 제5장은 결론으로 연구의 의의와 한계점 및 후속 연구를 위한 제언으로 마무리할 것이다.

제 2 장 문헌 분석

이 장에서는 이 연구의 골자가 되는 지수 표현에 관한 선행 연구를 검토하고 주요한 관점을 밝힌다. 1절에서는 지수에 관한 선행 연구를 검토한다. 2절에서는 개념 이미지에 관한 다의적 접근을 살펴본다. 3절에서는 2절에서 살펴본 다의적 접근을 바탕으로 중·고등학교 교과서와 전공 교재에 서술된 지수 표현에 관한 내용을 분석한다.

제 1 절 지수에 관한 연구

지수에 관한 개념은 중학교 때 도입되어 대학교 전공 수학에 이르기까지 장기간에 걸쳐 영역이 확장되며 의미가 생성되고 변화하는 교과 횡단 개념이다. 중학교 <수학1> 교과서에서 같은 수를 반복하여 곱한 횟수를 의미하는 대상으로 처음 도입된 지수는 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 정수, 유리수, 실수 영역으로 확장된다. 대학교 <복소해석학> 전공 교재에서는 복소수 영역까지 확장된다. 지수가 확장되는 과정에서 지수가 0, 음의 정수, 유리수, 복소수인 수학적 대상이 새롭게 정의된다. 지수에 관한 선행 연구는 주로 유리수 지수에 주목하였다. 이는 지수의 확장 과정에서 새롭게 정의된 유리수 지수가 이후 영역이 확장됨에 따라 그 의미가 변하므로 학습자에게 인식론적으로 어려운 개념이기 때문이다(Sangwin, 2019, p. 1205).

유리수 지수에 관한 연구는 크게 유리수 지수의 정의에 관련된 수학적 논의(최영기, 2000; Choi & Do, 2005; Even & Tirosh, 1995; Goel & Robillard, 1997; Tirosh & Even, 1997; Woo & Yim, 2008), 유리수 지수에 관한 교과서 분석(도종훈, 박윤범, 2011; 이승우, 2002; Sangwin, 2019), 유리수 지수의 정의에 관한 교사의 이해(신보미, 2021; 이승우,

2021; Even & Tirosh, 1995; Levenson, 2012)에 관한 연구로 분류할 수 있다.

첫째, 유리수 지수의 정의에 관련된 수학적 논의는 밑이 음수인 유리수 지수가 포함된 모순된 상황에 대한 Even과 Tirosh의 연구에서 시작되어 이후 정교한 후속 논의가 이어졌다. Even과 Tirosh(1995)는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 관한 질문에 대한 이스라엘 중등학교 교사들의 답변을 분석하였다. 이때 많은 교사는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$이 -2라고 응답하였다. 저자들은 밑이 음수인 유리수 지수는 정의되지 않는 대상이므로 교사들의 이러한 이해가 잘못되었음을 지적하였다. Goel과 Robillard(1997)는 Even과 Tirosh의 분석에 결함이 있음을 지적하며 $(-8)^{\frac{1}{3}}$이 -2로 잘 정의되는 대상임을 주장하였다. 이는 미국 수학 교과서의 서술을 근거로 제시되었다. Tirosh와 Even(1997)은 Goel과 Robillard(1997)에 대한 응답으로 $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 정의하지 않을 수도 있고, 정의할 수도 있는 합의되지 않은 수학적 대상이라고 설명하였다. 또한, 음수의 유리수 지수를 정의하지 않는 관점과 정의하는 관점의 이점에 대하여 논의하였다.

최영기(2000)와 Choi와 Do(2005)는 학교 수학의 범위에서 논의된 유리수 지수와 관련된 일련의 논쟁에 대하여 이를 이해하기 위해서는 제시된 문제 상황이 복소수 영역에서만 해결되는 문제임을 언급하였다. 왜냐하면 $(-8)^{\frac{1}{3}}$라는 표현 이면에 있는 수학적 구조는 방정식 $x^3+8=0$의 해와 관련되기 때문이다. 따라서 앞선 연구들의 논의는 불완전하며 부적절함을 지적하였다. Woo와 Yim(2008)은 밑이 음수인 유리수 지수가 학교 수학의 구조에서 적절하지 않음을 설명하였다. 이를 위해 형식불역의 원리를 기초로 밑이 음수인 유리수 지수를 정의할 때 발생하는 모순된 상황을 설명하였다.

둘째, 유리수 지수에 관한 교과서 분석은 앞서 제시된 논의와 관련하여 지수의 정의와 밑 조건의 축소에 관한 서술에 주목하였다. Sangwin(2019)은 1800년~2000년에 출판된 대수학에 관련된 교과서 중

선별된 교과서를 대상으로 유리수 지수의 지수법칙에 관한 서술을 분석하였다. 특히 유리수 지수의 정의가 어떻게 제시되며 밑이 음수인 유리수 지수를 어떻게 다루는지, 또한 밑 범위의 축소를 어떻게 설명하는지 등에 주목하여 분석하였다. 분석 결과 많은 교과서는 유리수 지수로의 확장을 다양한 방식으로 정당화하고 있었으며, 그 과정에서 정의와 정리의 경계를 모호하게 설명하는 경우가 많았다. 특히, 밑을 양의 실수로 축소하는 사실을 언급하지 않거나, 언급하더라도 잠재적인 문제점을 설명하지 않는 경우가 많았다.

유리수 지수 내용의 교과서 분석에 관한 국내 연구는 주로 유리수 지수로의 확장 과정의 논리성에 주목하였다. 이승우(2002)는 형식불역의 원리를 수학적 대상을 확장하는 원리로 제시한 뒤 이를 토대로 SMSG 교과서에 서술된 지수 확장 과정을 분석하였다. 도종훈과 박윤범(2011)은 유리수 지수의 정의와 관련된 우리나라의 2009 개정 교육과정에 기초한 교과서 서술을 비판적으로 검토하였다. 특히, $a^{\frac{m}{n}}$을 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$으로 정의하는 교과서 서술의 문제점을 지적하며 $a^{\frac{m}{n}}$을 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$로 정의하는 대안적인 정의를 제시하였다.

셋째, 지수의 정의에 관한 교사의 이해에 관련된 연구는 앞서 논의한 지수에 관한 복잡한 문제를 교사들이 어떻게 이해하고 있는지를 분석하였다. 먼저 앞서 살펴본 것처럼 Even과 Tirosh(1995)는 음수의 유리수 지수에 관한 질문에 대한 이스라엘 중등학교 교사들의 답변을 분석하였다. 이를 통해 음수의 유리수 지수에 관한 교사들의 이해가 상이함을 확인하였다. Levenson(2012)은 세 명의 중등학교 교사를 대상으로 a^0에 대한 이해를 바탕으로 수학적 정의의 본성에 관한 지식을 분석하였다. 분석 결과 몇몇 교사는 지수의 정의가 영역과 본질적으로 연결되어 있음을 이해하지 못했고, $a^0=1$을 증명해야 하는 대상으로 생각하였다.

유리수 지수의 정의에 대한 교사의 이해와 관련된 국내 연구는 다음과 같다. 먼저 최영기(2000)는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 관한 수학적 논의를 진행한 후 수학

교사를 대상으로 간단한 설문 조사 결과를 제시하였다. 그 결과 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 정의되지 않은 대상으로 보는 경우, $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 -2로 인식하는 경우, 확신이 없는 경우가 비슷하게 분포되어 있었다. 신보미(2021)는 고등학교 수준에서 유리수 지수와 관련된 교수학적 상황에 대하여 50명의 수학 교사에게 질문한 결과 다수의 교사가 유리수 지수로의 확장 과정에서 밑을 양수로 축소하는 이유를 이해하고 있지 못함을 지적하였다. 또한, 유리수 지수의 경우 밑이 양수로 제한된다는 사실을 모르고 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}$가 참이라고 생각하는 교사들도 있었다. 이승우(2021)는 이승우(2002)에 제시된 형식불역의 원리를 바탕으로 고등학교 <수학 I> 교과서에 제시된 지수 범위의 확장에 관한 설명을 가정적 기술과 종합적 기술로 분류한 뒤 서술 내용의 논리적 비약을 분석하였다. 또한, 이러한 교과서 서술을 바라보는 한 수학 교사의 관점을 분석하였다. 그 결과 교과서 서술에 관한 수학 교사의 이해가 교과서 서술의 압축적이고 효율적인 설명에 기인함을 확인하였다.

이상을 종합해보면 지수 표현에 관한 연구는 다음과 같은 특징을 가진다. 첫째, 지수에 관한 연구는 주로 고등학교 수학으로 연구 범위를 한정하여 진행되었다. 대학교 전공 수학의 내용은 고등학교 수학 내용을 수학적으로 깊이 있게 분석하려는 목적으로만 다뤄졌다. 이는 Even과 Tirosh(1995)가 제시한 음수를 밑으로 하는 유리수 지수에 관한 모순된 상황을 해결하려는 목적에서 다양한 선행 연구가 진행되었기 때문일 것이다. 둘째, 지수에 관한 연구는 주로 수학적 논의를 분석하거나 이에 관한 교사의 이해를 분석하였다. 교사는 보통 과거에 전공 수학의 내용을 학습하였지만, 중·고등학교에 제시된 지수에 관한 지식에 답을 할 때 전공 수학 내용을 언급하지 않았다. 그러나 지수 개념은 실수 영역에서 복소수 영역으로 확장되는 과정에서 그 의미가 변화한다. 또한, 중·고등학교 수준에서 제시된 모순적인 상황을 이해하기 위해서는 복소수 영역에서의 지수를 다루어야 한다(Choi & Do, 2005; Woo & Yim, 2008). 따라서 지수 개념, 특히 유리수 지수와 관련된 논의를 깊이 있게 이해하기

위해서는 지수 개념이 실수 범위에서 복소수 범위로 확장되는 과정을 면밀하게 분석할 필요가 있다.

이 연구는 주로 대학교 <복소해석학>에서 다뤄지는 지수에 관한 개념을 다루지만, 고등학교의 지수 개념에 대한 이해를 함께 살펴본다. 복소수 영역에서의 지수 개념을 이해하는 과정에서 실수 영역의 지수 개념과 연결성이 있기 때문이다. 다음 절에서는 장기간에 걸쳐 학습한 지수 개념에 대한 이해를 분석하는 데 필요한 개념 이미지에 대한 다의적 접근을 살펴본다.

제 2 절 개념 이미지에 대한 다의적 접근

2.1 개념 이미지

개념 이미지는 주어진 개념과 연관된 총체적인 인지 구조를 가리키는 용어로 모든 정신적 그림, 연관된 성질, 절차 등을 포함한다(Tall & Vinner, 1981, p. 2). 이는 엄밀하고 형식적인 수학적 개념과 달리 수학적 개념에 관한 개인의 심리적 기제가 상대적으로 덜 엄밀하고 논리적이지 않은 부분을 포함한다는 측면을 다루기 위해 Tall과 Vinner(1981)가 처음 제안한 용어이다. Vinner와 Dreyfus(1989)는 개념 이미지를 개념의 이름과 관련하여 학생들의 정신 속에 떠오르는 모든 심상(mental pictures)의 집합으로 개념을 특징짓는 모든 성질을 포함함을 설명하였다(p. 356).

Tall과 Vinner(1981)가 개념 이미지를 제안한 이래 수많은 선행 연구는 수학적 개념에 대한 학습자의 이해를 탐구하려는 목적에서 개념 이미지를 사용하였다(예를 들어, Naftaliev & Hershkowitz, 2021; Wawro et al., 2011; Zandieh et al., 2017). 그러나 개념 이미지를 활용한 선행 연구에 대하여 일부 비판적 의견이 제시되었다. 그중 하나는 다수의 연구에서 학생들이 자극에 대한 분류가 단일한 기제에 의해 이루어진다는 개념 일관성을 가정한다는 것이다(Alcock & Simpson, 2017). 이러한 가정과

는 달리 학생들은 하나의 개념에 대하여 여러 자극에 따라 서로 다른 기제로 판단하기도 한다. 예를 들어, 학생들은 주어진 수열의 증감성을 판단하라는 질문에 어떤 수열은 정의를 사용하는 반면에 다른 수열은 국소적 움직임에 주목하였다(Alcock & Simpson, 2011).

이 연구는 일관성 있는 개념 이미지를 가정하는 것이 아니라, 개념 이미지가 맥락에 의존하는 비 일관된 인지 구조라고 가정한다. 따라서 학생들의 발화를 근거로 주어진 맥락에서 파악할 수 있는 환기된 개념 이미지를 분석한다. 여기서 '환기된(evoked) 개념 이미지'는 주어진 특정 과제의 맥락에서 특정한 때에 활성화된 개념 이미지의 일부를 의미한다(Tall & Vinner, 1981). 이 연구에서는 예비 교사가 구두시험 문항을 해결하며 자신의 사고를 설명하는 과정에서 환기된 지수 표현에 대한 개념 이미지에 주목한다.

2.2 수학적 개념의 다의성

Durkin과 Shire(1991)는 어휘적 모호성의 여러 가지 유형을 논의하며 어휘적 모호성에 주목함으로써 학생들의 특정한 잘못된 해석을 파악할 수 있고 이를 바탕으로 교수 전략을 개발하는 데 도움을 줄 수 있음을 주장하였다(p. 73). 특히 학습자가 수학을 학습하는 데 어려움으로 작용할 수 있는 요인으로 수학적 용어의 다의성을 언급하였다. 여기서 다의성이란 '한 단어가 두 개 이상의 어휘적 의미를 가지는 현상이나 특성'이다. 이는 글자의 소리가 서로 같으나 뜻이 다름을 의미하는 동음이의와 하나의 단어가 두 개 이상의 의미를 갖는다는 점에서는 비슷하다. 그러나 의미들 사이에 연관성이 없는 동음이의와는 다르게 다의성은 의미들 사이에 관련성이 있다는 점에서 차이를 보인다. Durkin과 Shire(1991)는 일상적인 의미와 이와 관련된 수학적 의미를 지니는 다의적 수학 용어에 주목하였다.

일상적 사용역과 수학적 사용역에서 발생하는 다의성에 주목한 선행 연구와 달리, Zazkis(1998)은 수학적 사용역 내에서 발생하는 다의성에 주

목하였다. 특히, 몫(quotients)이라는 수학적 용어의 다의성을 탐구하였다. 예를 들어, 12를 5로 나눌 때의 몫을 물어보는 질문에 예비 교사들은 2이라고 답하기도 하고, 2.4라고 답하기도 하였다. 이는 몫이 자연수의 나눗셈인지 유리수의 나눗셈인지에 따라 그 의미가 달라지기 때문이다.

이 연구도 영역에 따라 의미의 차이가 있는 지수 표현의 다의성을 주목한다는 점에서 수학적 사용역 내에서의 다의성을 탐구한다.

2.3 개념 이미지에 대한 다의적 접근

Kontorovich(2018b)는 개념 이미지 연구에서 다의적 접근을 취해야 함을 주장하였다. 특히, 여러 학년에 걸쳐 다양한 수학적 영역(예를 들어, 실수와 복소수 영역)에서 다뤄지는 교과 횡단 개념에 대한 학생들의 개념 이미지는 일관된 하나의 인지 구조로 구성되지 않는다. 실제로 대학생을 대상으로 한 제곱근 개념에 관한 연구 결과 많은 학생이 다양한 자극에 서로 다른 도식을 활용하였다(Kontorovich, 2018a).

Kontorovich(2018b)는 Durkin과 Shire(1991)이 제안한 동음이의적 단어와 다의적 단어의 개념을 바탕으로 동음이의적 개념과 다의적 개념을 제안하였다. 하나의 개념어가 단일한 의미를 포함할 수도 있지만, 어떤 개념어의 경우 두 가지 이상의 의미를 포함하기도 한다. 이렇게 두 가지 의미를 포함하는 개념어는 동음이의적 개념과 다의적 개념으로 분류할 수 있다. 동음이의적 개념은 소리 또는 모양은 같으나 뜻이 다른 수학적 개념을 의미한다. 예를 들어, 함수 영역에서 '그래프'와 그래프 이론에서의 '그래프'는 서로 의미가 무관한 개념어로 동음이의적 개념이라고 볼 수 있다. 이와 달리, 다의적 개념은 두 개 이상의 수학적 의미를 가지는 하나의 수학적 개념을 의미한다. 이때, 두 개 이상의 의미는 서로 연관된다. 예를 들어, 기하학의 '접선'과 미적분학의 '접선'은 비슷하지만, 고려되는 영역에 따라 그 의미에 차이가 있다. 기하학에서 '접선'은 원이나 타원과 한 점에서 만나는 직선을 의미하지만, 미적분학에서 '접선'은 극

한을 통해 정의되는 대상으로 교점의 개수를 통해 정의될 수 없다(Biza & Zachariades, 2010). 따라서 다의적 개념은 두 가지 이상의 영역 모두에 적용되는 차원과 특정 영역에서만 적용되는 차원으로 나뉜다.

개념 이미지를 다의적으로 접근한다는 것은 교과 횡단 개념에 관한 한 개인의 개념 이미지를 영역 특수 개념(domain-valid conception)과 포괄적 개념(overarching conception)으로 이루어진 것으로 바라보는 것이다. 또한, 특정 개념이 영역 특수 개념 혹은 포괄적 개념이 되도록 추동하는 메타 전제(meta-premise)가 있다. 메타 전제는 한 개인의 다의적 개념 이미지 구성의 원인을 추측하는 데에 도움을 준다. 이후에서는 각각의 용어의 정의를 자세히 서술한 뒤 Kontorovich(2018b)에 소개된 다항식의 나눗셈을 이해하는 Jonny 일화를 예로 들어 용어의 의미를 명확히 제시하도록 하겠다.

영역 특수 개념은 특정 영역에서만 적용되고 이외의 영역에서는 성립하지 않는 것으로 여겨지는 사고방식을 의미한다. 예를 들어, "정수 p, q, r에 대하여 p를 q로 나눈 결과를 r이라 할 때, r이 정수가 아니면 p는 q로 나누어 떨어지지 않는다."는 정수의 나눗셈에서만 성립하는 영역 특수 개념의 예이다. 이 연구에서는 특정 사고방식이 영역 특수 개념임을 판단하기 위하여 "복소해석학에서는.." "고등학교에서는.."과 같이 영역을 지칭하는 발화의 선행을 그 지표로 보았다.

포괄적 개념은 한 개인의 개념 이미지 전반에 모두 적용되는 사고방식을 의미한다. 예를 들어, Jonny는 "다항식 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$에 대하여 $p(x)$를 $q(x)$로 나눈 결과를 $r(x)$라 할 때, $r(x)$의 계수가 정수가 아니면 $p(x)$는 $q(x)$로 나누어 떨어지지 않는다"와 같은 방식으로 생각하였다. 이는, "나눗셈의 결과가 정수가 아니면 나누어 떨어지지 않는 것이다"라는 사고방식을 정수의 나눗셈과 다항식의 나눗셈에 모두 적용된다고 파악한 것으로 Jonny의 포괄적 개념 이미지라고 볼 수 있다. 이 연구에서는 서로 다른 영역에서 공통적으로 적용되는 사고방식을 포괄적 개념으로 판단하였다.

포괄적 개념은 한 개인의 개념 이미지가 다의적인 성질을 갖도록 만든

다. 만약 한 개인의 특정 개념 이미지가 영역 특수 개념만으로 이루어져 있다면, 다의적 개념 이미지가 아니라 동음이의적 개념 이미지가 되기 때문이다. 한편, 영역 특수 개념도 다의적 개념 이미지에 필수적인 요소이다. 만약 한 개인의 특정 개념 이미지가 포괄적 개념만으로 이루어져 있다면, 이는 다의적 개념 이미지도 동음이의적 개념 이미지도 아닌 단일한 개념 이미지가 되기 때문이다. 위 논의를 종합하면, 다의적 개념 이미지는 반드시 포괄적 개념과 영역 특수 개념 모두를 구성 요소로 갖는다고 할 수 있다.

메타 전제는 다양한 수학적 개념과 영역에 적용되는 일반화된 사고방식을 의미한다. 예를 들어, '같은 기호는 보통 같은 개념을 나타낸다.'와 '모순은 보통 선행하는 추론에 문제가 있음을 가리킨다.'와 같은 메타 전제가 있다. 메타 전제는 개인이 다양한 수학적 개념을 통일성 있게 이해하도록 기능하지만, 모든 수학적 개념이나 영역에서 유효하지 않으므로 문제가 될 수도 있다. 특히 메타 전제는 학습자가 영역 특수 개념을 포괄적 개념으로 잘못 이해하도록 추동하기도 한다. 예를 들어, Jonny는 정수의 나눗셈에서 성립하는 지식을 메타 전제로 파악하여 다항식의 나눗셈을 잘못 이해하였다. '나머지가 정수가 아니면 나누어떨어지지 않는다.'라는 메타 전제는 정수 영역에만 적용되는 영역 특수 개념을 정수 영역과 다항식 영역 모두에 적용되는 포괄적 개념으로 잘못 이해하도록 추동한 원인이 되었다.

이 연구는 예비 교사들이 영역 특수 개념을 포괄적 개념으로 일반화하여 위치시키거나, 포괄적 개념을 영역 특수 개념으로 축소하여 위치시키는 등의 특이점을 분석한다. 또한, 이러한 개념 이미지의 배치를 추동하는 메타 전제를 학생들의 답변을 중심으로 도출하고자 한다. 지수 표현에 관한 예비 교사의 개념 이미지 분석에 선행하여 다음 절에서는 중·고등학교 교과서와 대학교 전공 교재에 서술된 지수 표현에 관련된 내용을 다의적 관점에서 살펴본다.

제 3 절 교과서와 전공 교재에 서술된 지수 표현의 다의성

이번 절에서는 앞서 살펴본 다의적 접근을 바탕으로 지수와 관련된 교과서와 전공 교재의 서술을 분석한다. 이를 위해 다음과 같은 절차로 교과서와 전공 교재를 선별하고 분석하였다.

첫째, 지수와 관련된 내용이 수록된 중학교 <수학1> 교과서, 중학교 <수학2> 교과서, 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서, <복소해석학> 전공 교재를 선택하였다. 구체적으로, 2015 개정 교육과정으로 인정된 10종의 중학교 <수학1>, <수학2> 교과서와 9종의 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서 중에서 중학교 교과서와 고등학교 교과서의 저자가 같은 5종의 교과서를 선

<표 2-1> 분석한 중학교 교과서와 고등학교 교과서 목록

연번	출판사	저자	교과서
1	동아출판㈜	박교식 외, 2020	중학교 <수학1>
			중학교 <수학2>
			고등학교 <수학Ⅰ>
2	미래엔	황선욱 외, 2020	중학교 <수학1>
			중학교 <수학2>
			고등학교 <수학Ⅰ>
3	㈜비상교육	김원경 외, 2020	중학교 <수학1>
			중학교 <수학2>
			고등학교 <수학Ⅰ>
4	㈜천재교과서	류희찬 외, 2020	중학교 <수학1>
			중학교 <수학2>
			고등학교 <수학Ⅰ>
5	㈜천재교육	이준열 외, 2020	중학교 <수학1>
			중학교 <수학2>
			고등학교 <수학Ⅰ>

별하였다(<표 2-1> 참고). 이는 이 연구가 학년에 걸쳐 학습하게 되는 지수 개념을 장기적 관점에서 분석하는 것을 목적으로 하므로 같은 저자의 서술을 분석하는 것이 타당하다고 판단했기 때문이다. <복소해석학> 전공 교재는 <표 2-2>에 제시된 2종의 교재를 검토하였다. 이는 2020학년도 1학기 <복소해석학> 강좌의 주교재로 활용된 교재와 참고 교재로 제시된 교재 중 1종을 선택한 것이다. 선택된 두 종류의 교재는 복소해석학 전공 교재 중에서 계산 중심으로 서술된 교재가 아니라 개념 중심으로 서술된 교재이므로 다의적 관점에서 서술된 내용을 분석하기에 적합하다고 판단하였다.

<표 2-2> 분석한 복소해석학 전공 교재 목록

연번	출판사	저자	교재
1	Prentice Hall	Saff & Snider, 2003	Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science
2	Birkhäuser Boston	Ponnusamy & Silverman, 2006	Complex Variables with applications

둘째, 중·고등학교 교과서와 대학교의 전공 교재에서 지수와 관련된 서술 내용을 선별하였다. 구체적으로 중학교 <수학1> 교과서의 ‘Ⅰ. 소인수분해 - 1. 소수와 합성수’ 단원, 중학교 <수학2> 교과서의 ‘Ⅰ. 수와 식 - 2. 식의 계산’ 단원, 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서의 ‘Ⅰ. 지수함수와 로그함수 - 1. 지수 단원’의 내용을 분석 범위로 선정하였다. 검토 결과 교과서마다 일부 서술 방식의 차이가 있었으나, 이 연구에서 분석하고자 하는 서술 내용에는 차이가 없었다. 따라서 분석 결과를 제시할 때는 5종의 교과서 중 일부 사례를 제시한다.[2] 대학교 <복소해석학> 전공 교재의 경우 교재마다 상이했지만 공통적으로 거듭제곱과 거듭제곱근과 관

2) 이승우(2021)에 따르면 2015 개정 교육과정에 따른 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서의 지수 확장에 관한 서술은 기술 방식에는 차이가 있으나 기술 내용 사이에는 차이가 거의 없었다.

련된 단원과 복소 지수에 관한 단원을 분석 범위로 선정하였다.

셋째, 교과서와 전공 교재에 서술된 지수 표현에 관한 내용을 Kontorovich(2018b)가 제안한 다의적 접근에 기반하여 분석한다. 다시 말해, 지수의 영역이 확장되는 중·고등학교 교과서와 전공 교재의 서술 내용을 바탕으로 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 도출한다. 또한, 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 이루게 한 교과서와 전공 교재 서술의 기저에 있는 메타 전제를 도출한다. 도출된 지수 개념의 영역 특수 개념, 포괄적 개념, 메타 전제의 특징을 살펴보고 그 의미를 다의성과 관련하여 분석한다.

3.1 중·고등학교 교과서

중학교 <수학1> 교과서와 중학교 <수학2> 교과서에서 도입된 자연수 지수는 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 정수, 유리수, 실수로 확장된다. 지수가 속하는 수 집합이 확장됨에 따라 관련 개념은 영역 특수 개념과 포괄적 개념으로 일정한 패턴을 보이며 이동하였다. 이후에서는 지수가 속한 수 집합을 자연수에서 정수로, 정수에서 유리수로, 유리수에서 실수로 확장하는 과정에서 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 메타 전제와 함께 도출하고 그 변화 양상을 분석한다.

3.1.1 자연수에서 정수로의 확장

중학교 <수학1> 교과서에서는 같은 수를 여러 번 곱할 때 곱한 횟수를 지수로 정의하며 지수를 도입한다([그림 2-1] 참고).

거듭제곱은 무엇인가요?

같은 수를 여러 번 곱할 때에는 곱하는 수와 곱한 횟수를 이용하여 간단하게 나타낼 수 있다. 예를 들어 2를 두 번, 세 번, 네 번, … 곱한 수를 각각

$$2\times2=2^2,\ 2\times2\times2=2^3,\ 2\times2\times2\times2=2^4,\ \cdots$$

과 같이 나타낸다.

이때 2^2, 2^3, 2^4, …을 각각 2의 제곱, 2의 세제곱, 2의 네제곱, …으로 읽고, 이들을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라고 한다.

또, 2^2, 2^3, 2^4, …에서 2를 거듭제곱의 **밑**이라 하고, 밑 2를 곱한 횟수를 나타내는 2, 3, 4, …를 거듭제곱의 **지수**라고 한다.

2^3 ← 지수, 2 ← 밑

[그림 2-1] 중학교 <수학1> 교과서에 제시된 지수의 정의 (류희찬 외, 2020, p. 14)

이후 중학교 <수학2> 교과서에서는 지수법칙을 설명한다([그림 2-2] 참고). 자연수 지수의 지수법칙은 거듭 곱한 횟수라는 자연수 지수의 의미를 생각해본다면 자연스럽게 도출되는 결과이다.

지수법칙 (1)

m, n이 자연수일 때

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

[그림 2-2] 중학교 <수학2> 교과서에 제시된 지수법칙의 일부 (류희찬 외, 2020, p. 33)

이와 달리, 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 도입되는 정수 지수에서는 거듭 곱한 횟수라는 의미는 없어진다. 그 대신 정수 지수는 자연수 지수 법칙이라는 '대수적 구조를 유지하도록' 정의한다. 예를 들어, [그림 2-3]에 제시된 것처럼 "지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장하여 보자."라는 표현에서 확인할

수 있다. 이러한 서술은 분석한 5종의 교과서에서 모두 동일하게 제시되었다. 그 결과 $a^0=1$로 정의되며, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$(n은 자연수)로 정의된다. 다시 말해, 정수 지수로의 확장에서 교과서 저자들은 형식불역의 원리3)를 새로운 수학적 대상(a^0과 a^{-n})을 생성하기 위한 메타 전제로 사용한 것이다(이승우, 2002). 따라서 형식불역의 원리는 정수 지수로의 확장에서 메타 전제에 속한다.

지금까지는 지수가 양의 정수인 경우에만 지수법칙을 생각하였다.

이제 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장하여 보자.

$a\neq0$이고 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙

$$a^m a^n=a^{m+n} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 성립한다.

❶ $m=0$일 때

㉠이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n=a^{0+n}=a^n$$

이므로 $a^0=1$이다.

❷ $m=-n$(n은 양의 정수)일 때

㉠이 성립한다고 하면

$$a^{-n}a^n=a^{-n+n}=a^0=1$$

이므로 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$이다.

[그림 2-3] 고등학교 <수학 I > 교과서에 제시된 정수 지수로의 확장(류희찬 외, 2019a, p. 20)

---

3) 형식불역의 원리는 Peacock이 저술한 *Treatise on Algebra*(1830)에 처음 제시된 것으로, 연산 법칙을 유지하며 산술 대수에서 기호 대수로 확장하는 과정을 언급하는 용어로 언급되었다. 이후 복소수 체계의 등장을 포함하여 수학 발달에 중요한 역할을 한 중요한 개념이 되었다(Eves, 1990).

자연수 지수법칙에서 밑은 모든 실수이지만, 정수 지수법칙에서 밑은 0이 아닌 모든 실수로 제한한다. 이러한 내용은 5종의 모든 교과서의 본문에서는 경제적 서술을 위해 설명이 생략되어 있었지만(이승우, 2021), 교사용 지도서에는 서술되어 있다([그림 2-4] 참고). 즉, 교과서 저자들은 수학적 구조는 무모순성을 가져야 함을 메타 전제로 사용한 것이다.

지도 TIP

지수가 정수인 경우에 $a=0$이면 $a^0=1$과 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$의 의미가 없음을 이해하게 한다.

[그림 2-4] 고등학교 <수학Ⅰ> 교사용 지도서에 제시된 정수 지수로의 확장 과정에서 밑이 축소되는 이유(류희찬 외, 2019b, p. 70)

이상을 정리하면 자연수 영역에서의 영역 특수 개념, 정수 영역에서의 영역 특수 개념, 포괄적 개념, 그리고 메타 전제를 다음과 같이 도출할 수 있다(<표 2-3> 참고).

<표 2-3> 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 자연수 영역과 정수 영역에서의 지수 표현의 다의적 개념

	영역	
	자연수	정수
영역 특수 개념	• 지수 표현은 거듭 곱한 횟수를 의미한다. • 나눗셈 지수법칙을 제외한 나머지 지수법칙은 밑이 모든 실수에서 성립한다.	• $a^0=1$ $(a\neq 0)$ • $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ($a\neq 0$, n은 자연수)
포괄적 개념	• 지수법칙 (밑은 0이 아닌 모든 실수)	
메타 전제	• 기존 체계에서의 성질(지수법칙)이 확장된 새로운 체계에서도 성립하도록 체계를 확장해 나간다. (형식불역의 원리) • 수학의 구조는 무모순성을 가져야 한다. (무모순성의 원리)	

3.1.2 정수에서 유리수로의 확장

지수를 정수에서 유리수로 확장하는 과정도 자연수에서 정수로 확장하는 과정과 마찬가지로 형식불역의 원리와 무모순성의 원리를 메타 전제로 사용하여 전개됨을 [그림 2-5]에 제시된 서술에서 확인할 수 있다. “지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록”이라는 표현에서 형식불역의 원리의 메타 전제를 사용하고 있음을 알 수 있다. 이는 5종의 교과서 본문에 모두 동일하게 서술된 내용이다.

지수의 범위를 유리수까지 확장할 수 있을까?

거듭제곱근을 이용하여 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 유리수까지 확장하여 보자.

$a>0$이고 m, n이 정수일 때 지수법칙

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

이 성립한다.

이 식이 지수가 유리수일 때도 성립한다고 하면 유리수 $\frac{m}{n}$ $(n\geq 2)$에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

이다. 이때 $a>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}}>0$이다.

여기서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

으로 정의할 수 있다.

[그림 2-5] 고등학교 <수학 I > 교과서에 제시된 유리수 지수로의 확장(류희찬 외, 2019a, p. 23)

이때, $a>0$으로 밑의 범위를 제한하는 이유는 실수 영역에서 유리수 지수 표현 $a^{\frac{m}{n}}$의 존재성을 보장하기 위한 것이다(이승우, 2021). 만약 $a<0$라면 방정식 $x^n=a^m$의 실근이 n이 짝수인 경우에 존재하지 않는다. 이러한 모순적인 상황을 피하고자 $a>0$으로 제한한다. 밑의 범위를 양수로 제한하는 이유에 관하여 본문이나 각주에 설명하거나([그림 2-6] 참고), 교사용 지도서에 제시하였다([그림 2-7] 참고). 두 경우 모두 밑이 음수인 경우에 생기는 모순적인 상황을 토대로 설명한다는 점에서 무모순성을 메타 전제로 사용하고 있음을 확인할 수 있다.

Q $a<0$일 때도

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이 성립하나요?

A $a<0$일 때는 성립하지 않아요. 예를 들어

$a=-3$, $m=6$, $n=2$이면

$$(-3)^{\frac{6}{2}}=(-3)^3=-27$$

이지만

$$\sqrt{(-3)^6}=\sqrt{3^6}=27$$

이므로 $(-3)^{\frac{6}{2}}\neq\sqrt{(-3)^6}$이에요. 따라서 지수가 유리수일 때는 $a>0$인 조건에 주의해야 해요.

[그림 2-6] 고등학교 <수학 I > 교과서에 제시된 유리수 지수로의 확장 과정에서 밑이 축소되는 이유(류희찬 외, 2019a, p. 23)

지도 Tip

지수가 유리수로 확장이 되면 밑이 양수로 제한됨에 유의하게 한다. 즉, $a<0$이면 $a^{\frac{m}{n}}$에서 n이 짝수인 경우에 $a^{\frac{m}{n}}$이 정의되지 않는다.

[그림 2-7] 고등학교 <수학 I > 교사용 지도서에 제시된 유리수 지수로의 확장 과정에서 밑이 축소되는 이유(이준열 외, 2019b, p. 81)

정수 지수법칙에서는 밑이 0이 아닌 모든 실수였지만, 유리수 지수법칙에서는 밑이 양의 실수로 제한되므로 밑이 0이 아닌 실수에서의 지수법칙은 정수 영역에서만 성립하는 영역 특수 개념에 포함되며, 밑이 양의 실수에서의 지수법칙은 포괄적 개념에 위치하게 된다. 또한, 위 설명을 통해 정의된 유리수 지수 표현 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$은 지수가 유리수인 영역에서만 성립하므로 유리수 영역의 영역 특수 개념에 포함된다. 한편, 자연수에서 정수로의 확장 과정에서 영역 특수 개념에 포함되었던 $a^0=1$와 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$는 정수에서 유리수로의 확장 과정에서는 포괄적 개념으로 그 위치가 바뀐다. 이 두 등식은 지수가 정수 영역에 속할 때나 유리수 영역에 속할 때 모두 성립하기 때문이다.

이상을 정리하면 정수 영역에서의 영역 특수 개념, 유리수 영역에서의

영역 특수 개념, 포괄적 개념, 메타 전제를 다음과 같이 도출할 수 있다(<표 2-4> 참고).

<표 2-4> 고등학교 <수학 I> 교과서에서 정수 영역과 유리수 영역에서의 지수 표현의 다의적 개념

	영역	
	정수	유리수
영역 특수 개념	• 정수 지수법칙은 밑이 0이 아닌 모든 실수에서 성립한다.	• $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$, m, n ($n \ge 2$)은 정수)
포괄적 개념	• 지수법칙 (밑은 모든 양의 실수) • $a^0 = 1$ ($a>0$) • $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ($a>0$, x는 유리수)	
메타 전제	• 기존 체계에서의 성질(지수법칙)이 확장된 새로운 체계에서도 성립하도록 체계를 확장해 나간다. (형식불역의 원리) • 수학의 구조는 무모순성을 가져야 한다. (무모순성의 원리)	

3.1.3 유리수에서 실수로의 확장

지수를 유리수에서 실수로 확장하는 과정은 앞선 확장 과정에서처럼 형식불역의 원리 및 무모순성의 원리가 적용되는 것이 아니라, 예를 통한 직관적 이해로 설명한다([그림 2-8] 참고). 이러한 내용은 모든 5종의 교과서의 공통된 설명이다.

지수의 범위를 실수까지 확장할 수 있을까?

지수가 무리수인 경우를 살펴보고, 지수가 실수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 실수까지 확장하여 보자.

무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$에 한없이 가까워지는 유리수

$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \cdots$

을 각각 지수로 하는 3의 거듭제곱

$3^{1},\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots$

의 값은 오른쪽 표와 같이 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

	A	B
1	x	3^x
2	1	3
3	1.4	4.655536…
4	1.41	4.706965…
5	1.414	4.727695…
6	1.4142	4.728733…
7	1.41421	4.728785…
8	⋮	⋮
9	$\sqrt{2}$	$3^{\sqrt{2}}$

이와 같은 방법을 이용하면 x가 임의의 무리수일 때, 3^x을 정의할 수 있다.
따라서 $a>0$이고 x가 임의의 실수일 때, a^x을 정의할 수 있다.

일반적으로 지수가 실수일 때, 다음 지수법칙이 성립함이 알려져 있다.

[그림 2-8] 고등학교 <수학 I > 교과서에 제시된 실수 지수로의 확장(류희찬 외, 2019a, p. 26)

무리수 지수는 무리수 지수에 가까워지는 유리수를 대입하여 나온 값들이 일정하게 다가가는 값으로 직관적으로 정의한다. 또한, 실수 지수법칙이 성립함이 알려져 있다고 제시한다. 따라서 밑이 양수인 범위에서의 지수법칙은 유리수 영역과 실수 영역에 모두 적용되는 대상 수준 규칙이므로 포괄적 개념에 해당한다. 또한, $a^0=1$, $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$도 실수 영역에서도 동일하게 성립하는 지식이므로 포괄적 개념에 해당한다. 무리수 지수의 정의는 실수 영역에서만 해당하는 지식이므로 영역 특수 개념2에 해당한다. 이상을 정리하면 <표 2-5>과 같다.

<표 2-5> 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 유리수 영역과 실수 영역에서의 지수 표현의 다의적 개념

	영역	
	유리수	실수
영역 특수 개념		• a^x에서 x가 무리수인 경우, 무리수 x에 가까워지는 유리수를 x에 대입하여 나온 a^x의 값들이 일정하게 다가가는 값으로 정의된다.
포괄적 개념	• 지수법칙 (밑은 양의 실수) • $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ ($a > 0$, x는 실수) • $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) • $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0$, m, n ($n \geq 2$)은 정수)	
메타 전제	• 기존 지식으로 설명하지 못하는 내용은 예를 통하여 직관적으로 설명한다.	

3.1.4 요약

지금까지 지수 표현과 관련된 중·고등학교 교과서 서술을 근거로 지수가 자연수, 정수, 유리수, 실수로 확장되는 설명에서 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 도출하였다. 또한, 지도용 교과서와 선행 연구를 근거로 하여 교과서 서술의 메타 전제를 도출하였다(<표 2-3>, <표 2-4>, <표 2-5> 참고). 이렇게 도출된 세 가지의 다의적 개념은 다음과 같은 특징을 갖는다.

첫째, 각 다의적 개념에서 확장 전의 영역 특수 개념에는 밑 조건에 관한 서술만 남아있거나 혹은 아무런 내용도 남지 않았다. 예를 들어, 자연수에서 정수로의 확장 과정에서 자연수 영역의 영역 특수 개념에는 ‘나

눗셈 지수법칙을 제외한 나머지 지수법칙은 밑이 모든 실수에서 성립한다.'가 포함되었다. 이는 정수 지수법칙의 경우 밑이 0이 아닌 실수로 제한되므로 모든 실수에서 성립하는 지수법칙은 자연수 영역에만 적용되기 때문이다. 밑 조건은 유리수로의 확장 과정에서도 확정 전 영역의 영역 특수 개념에 포함되었다. 실수로의 확장 과정의 경우 유리수 지수와 실수 지수 모두 밑 조건이 양의 실수로 같으므로 유리수 영역의 영역 특수 개념에는 아무 내용도 포함되지 않았다. 예외적으로 자연수에서 정수로의 확장 과정에서 자연수 영역의 영역 특수 개념에는 '지수 표현은 거듭곱한 횟수를 의미한다.'가 포함되었는데, 이는 자연수 영역을 제외한 나머지 영역에서는 해당하지 않는 내용이기 때문이다.

둘째, 각 다의적 개념에서 확장된 영역에서의 영역 특수 개념은 확장 후 단계의 다의적 개념의 포괄적 개념으로 이동하였다. 예를 들어, 지수를 정수로 확장한 결과 자연수 지수의 개념은 밑 조건을 제외하고 모두 포괄적 개념에 위치하게 된다. 마찬가지로, 지수를 유리수로 확장한 결과 정수 지수 개념은 밑 조건을 제외하고는 모두 포괄적 개념으로 이동하였다. 확장 전의 영역 특수 개념이 확장 후의 포괄적 개념으로 이동한 것은 확장 전의 영역에서 성립하던 개념이 확장 후에는 확장 전 영역에서뿐만 아니라 확장된 영역에서도 그대로 성립함을 의미한다.

셋째, 지수 확장 과정에서 형식불역의 원리와 무모순성의 원리는 공통된 메타 전제로 사용되었다. 물론, 예외적으로 실수로의 확장 과정에서는 두 원리가 메타 전제에서 제외되었다. 유리수 지수까지의 확장 과정에서 공통적으로 포함된 메타 전제는 앞선 두 가지의 특징을 추동한 원인이 되었다. 형식불역의 원리로 인하여 확장 전의 영역 특수 개념이 확장 후의 포괄적 개념으로 이동한 것이다. 무모순성 원리에 의하여 확장 과정에서 지수의 밑의 축소가 발생하였는데, 이로 인해 확장 전의 영역 특수 개념에는 밑 조건이 축소되기 전 지수법칙만 남게 되었다. 한편, 실수로의 확장에서 드러난 다의적 개념에 형식불역의 원리와 무모순성의 원리가 포함되지 않은 이유는 실수 지수로의 확장을 직관적으로 설명하기 때문이다. 형식불역의 원리로부터 실수까지 지수를 확장하는 것이 아니라

직관적 설명으로 지수를 확장하였고 그 결과 기존의 형식(지수법칙)을 모두 만족한다는 사실을 제시한 것이다.

이상을 종합하면 먼저 실수까지 지수가 확장되는 과정은 확장 전 영역에서의 개념이 대부분 확장 후 영역에서도 성립한다는 점에서 문제를 일으키지 않으며 매끄럽게 이루어졌음을 알 수 있다. 결과적으로 실수 지수까지의 확장 과정에서는 하나의 지수 표현은 다의성을 갖는 대상이 아니다. 그러나 형식불역의 원리와 무모순성의 원리라는 메타 전제에 의하여 전개되는 지수 확장에 관한 교과서의 설명은 결과적으로 학생들에게 영역의 확장이 수학적 대상과 관련된 개념을 보존한다는 메타 전제를 형성하게 할 가능성이 있을 것으로 생각된다(Kontorovich, 2018a, p. 191). 이는 학생들의 반응을 분석한 연구 결과에서 구체적으로 살펴본다.

3.2 대학교 <복소해석학> 교재

고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서 실수까지 확장된 지수는 대학교 <복소해석학>에서 복소수로 확장된다. 지수법칙을 유지하도록 지수를 실수까지 확장했던 과정과는 달리, 지수를 복소수까지 확장하는 과정에서는 유지하려는 기존 체계의 성질이 변화한다. 이에 따라 지수 표현의 의미는 고려되는 영역이 무엇인지에 의하여 달라진다. 이후에서는 유리수 지수 표현에서 밑이 실수에서 복소수로 확장되는 과정과 지수가 실수에서 복소수로 확장되는 과정에서 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 메타 전제와 함께 도출하고 그 변화 양상을 분석한다.

3.2.1 복소수 영역에서의 유리수 지수

대학교 <복소해석학> 교재의 저자들은 밑이 복소수이고 지수가 유리수인 지수 표현 $z^{\frac{1}{n}}$는 n제곱하여 z가 되는 방정식 $x^n = z$의 해를 가리키는 기호로 도입한다. 다음은 Ponnusamy와 Silverman(2006)의 설명이다([그

림 2-9] 참고).

If we let $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ in (1.13), we obtain

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \tag{1.14}$$

For $|z| = 1$ (the unit circle), (1.14) reduces to

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \tag{1.15}$$

a theorem of DeMoivre.

The possibility of finding nth roots of the complex number is suggested by (1.14). A complex number z is an nth root of z_0 if $z^n = z_0$, written $z = z_0^{1/n}$.

The problem is to reverse the multiplicative operation and determine a number which, when multiplied by itself n times, furnishes us with the original number. Given a complex number $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$, how do you find a complex number $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ such that $z^n = z_0$? By (1.14), we must

[그림 2-9] <복소해석학> 전공 교재에서 유리수 지수의 도입 (Ponnusamy & Silverman, 2006, p. 18)

Saff와 Snider(2003)도 유리수 지수 표현을 위와 같이 도입한다([그림 2-10] 참고).

Continuing in this manner we arrive at the formula for the nth power of z:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \tag{1}$$

Clearly this is just an extension of De Moivre's formula, discussed in Example 3 of Sec. 1.4.

Equation (1) is an appealing formula for raising a complex number to a positive integer power. It is easy to see that the identity is also valid for negative integers n (see Prob. 2). The question arises whether the formula will work for $n = 1/m$, so that $\zeta = z^{1/m}$ is an mth root of z satisfying

$$\zeta^m = z. \tag{2}$$

[그림 2-10] <복소해석학> 전공 교재에서 유리수 지수의 도입 (Saff & Snider, 2003, p. 33)

유리수 지수 표현에서 밑을 복소수 영역으로 확장하는 것은 실수 영역에서의 유리수 지수의 의미를 그대로 유지한 것이다.[4] 따라서 유리수 지수가 방정식 $x^n = a$의 해라는 기존 체계에서 유리수 지수의 의미를 그대로 유지하도록 복소수의 유리수 지수로 확장한다는 점에서 형식불역의 원리가 메타 전제로 사용된 것이다. 유리수 지수의 의미가 방정식 $x^n = a$의 해라는 사실은 실수 영역과 복소수 영역의 유리수 지수 모두에 해당하므

complex number $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ such that $z^n = z_0$? By (1.14), we must have

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0). \tag{1.16}$$

Since $|\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1$ for all real α, (1.16) yields the relations

$$r^n = r_0, \quad \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0. \tag{1.17}$$

The first relation in (1.17) shows that $|z| = r_0^{1/n}$, which we already knew (why)? But the second gives important information about the argument of z, namely, that $n\arg z$ differs from $\arg z_0$ by a multiple of 2π (that is, $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$):

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}. \tag{1.18}$$

How many integers k in (1.18) produce distinct solutions? We have

$$z = z_0^{1/n} = r_0^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right\}. \tag{1.19}$$

For each k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, there is a different value for z. We leave it for the reader to verify that there are no more solutions. Thus, given $z_0 \neq 0$, there are exactly n distinct complex numbers z such that $z^n = z_0$.

[그림 2-11] <복소해석학> 전공 교재에 서술된 유리수 지수의 값을 구하는 방법 (Ponnusamy & Silverman, 2006, pp. 18-19)

---

4) 고등학교 <수학 I> 교과서에서는 유리수 지수 표현이 방정식 $x^n = a$의 해라는 명시적인 설명은 없다. 유리수 지수 표현은 형식불역의 원리를 따라 정수 지수법칙 중 하나인 $(a^n)^m = a^{nm}$을 만족하도록 지수를 유리수로 확장하는 과정에서 등장한다. 그러나 거듭제곱근으로 해석하는 과정에서 방정식 $x^n = a$의 해를 의미함이 내포되어 있다.

로 포괄적 개념에 해당한다.

복소수 영역에서 유리수 지수의 정의를 방정식의 근으로 도입한 이후, 그 값을 구하는 방법을 설명한다([그림 2-11], [그림 2-12] 참고).

To see how the additional roots fit into the scheme of things, let's work out the polar description of the equation $\zeta^4 = 1$ for each of these numbers:

$$
\begin{aligned}
1^4 &= (1e^{i0})^4 = 1^4 e^{i0} = 1, \\
i^4 &= (1e^{i\pi/2})^4 = 1^4 e^{i2\pi} = 1, \\
(-1)^4 &= (1e^{i\pi})^4 = 1^4 e^{i4\pi} = 1, \\
(-i)^4 &= (1e^{i3\pi/2})^4 = 1^4 e^{i6\pi} = 1.
\end{aligned}
$$

To obtain the mth roots of an *arbitrary* (nonzero) complex number $z = re^{i\theta}$, we generalize the idea displayed by Eq. (4) and, reasoning similarly, conclude that *the m distinct mth roots of z are given by*

$$z^{1/m} = \sqrt[m]{|z|}\,e^{i(\theta+2k\pi)/m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1). \tag{6}$$

Equivalently, we can form these roots by taking any single one such as given in (3) and multiplying by the mth roots of unity.

[그림 2-12] <복소해석학> 전공 교재에 서술된 유리수 지수의 값을 구하는 방법 (Saff & Snider, 2003, pp. 33, 36)

이후 다음과 같이 유리수 지수의 정의를 도입한다([그림 2-13] 참고).

Let m and n be positive integers that have no common factor. Prove that the set of numbers $(z^{1/n})^m$ is the same as the set of numbers $(z^m)^{1/n}$. We denote this common set of numbers by $z^{m/n}$. Show that

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{|z|^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right] \tag{9}$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

[그림 2-13] <복소해석학> 전공 교재에 서술된 유리수 지수의 정의 (Saff & Snider, 2003, p. 38)

저자에 따라 편각을 이용하기도 하고, 쉬운 예를 통해 귀납적으로 설명하기도 한다는 점에서 차이점이 있지만, 그 결과는 같다. 복소수 영역에서 하나의 유리수 지수 표현은 여러 개의 값을 가질 수 있다는 것이다. 즉, 복소수 영역에서의 유리수 지수 표현은 다가성을 갖는 대상이다. 이는 복소수 영역에서 n차 방정식은 중근을 포함하여 n개의 해를 갖는다는 대수학의 기본 정리에 의하여 존재성을 보장받는다. 복소수 영역에서 유리수 지수 표현이 다가성을 갖는다는 사실은 실수 영역에서 유리수 지수 표현이 단가성을 갖는다는 사실과 차이를 갖는다. 이는 실수 영역에서의 유리수 지수 $a^{\frac{1}{n}}$은 방정식 $x^n = a$의 실수해를 의미하기 때문이다. 따라서 실수 영역에서 $a^{\frac{m}{n}}$이 하나의 값을 갖는다는 내용은 실수 유리수 지수의 영역 특수 개념에 해당하며, 복소수 영역에서 $z^{\frac{1}{n}}$이 서로 다른 n개의 값을 갖는다는 내용은 복소수의 유리수 지수의 영역 특수 개념에 해당한다. 이후 복소수 영역에서 일반적인 유리수 지수 $z^{\frac{m}{n}}$는 [그림 2-13]과 같이 $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$로 정의한다.

지금까지의 내용을 정리하면 <표 2-6>과 같다.

<표 2-6> 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서와 대학교 <복소해석학> 교재에 서술된 유리수 지수 표현의 다의적 개념

	영역	
	실수	복소수
영역 특수 개념	• $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, 즉 n제곱하여 a가 되는 값 중 양의 실수를 의미한다. • $a^{\frac{m}{n}}$은 n제곱하여 a^m이 되는 값 중 양의 실수를 의미한다. • $a^{\frac{m}{n}}$는 하나의 값을 가진다.	• $z^{\frac{1}{n}}$은 n제곱하여 z가 되는 값, 즉 방정식 $x^n = z$의 n개의 해를 의미한다. • $z^{\frac{1}{n}}$은 다음과 같은 n개의 값을 가진다. $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lvert z \rvert}\, e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n-1)$ • $z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 이다.
포괄적 개념	• 유리수 지수 $z^{\frac{1}{n}}$는 방정식 $x^n = z$의 근을 가리킨다.	
메타 전제	• 기존 체계에서의 성질(유리수 지수의 의미)이 확장된 새로운 체계에서도 성립하도록 체계를 확장해 나간다. (형식불역의 원리) • 수학의 구조는 무모순성을 가져야 한다. (무모순성의 원리) • 대수학의 기본정리	

3.2.2 복소 지수로의 확장

복소 지수는 기존 체계에서 성립하는 성질인 항등식 $z^n = \left(e^{\log z}\right)^n = e^{n \log z}$를 이용하여 지수가 복소수에서도 성립하도록 정의한다([그림 2-14] 참고). 즉, 형식불역의 원리가 복소 지수로의 확장에서도 동일하게 메타 전제로 활용된 것이다. 단, 이때 유지되는 기존 체계의 성질은 실수 지수로의 확장 과정에서 사용된 지수법칙이 아니라, 항등식 $z^n = \left(e^{\log z}\right)^n = e^{n \log z}$

임에 유의해야 한다.

One important theoretical use of the logarithmic function is to define complex powers of z. The definition is motivated by the identity

$$z^n = (e^{\log z})^n = e^{n \log z},$$

which holds for any integer n.

Definition 5. If α is a complex constant and $z \neq 0$, then we define z^α by

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}.$$

This means that each value of $\log z$ leads to a particular value of z^α.

[그림 2-14] <복소해석학> 전공 교재에 서술된 복소 지수의 정의 (Saff & Snider, p. 132)

이어 위와 같은 정의는 α가 유리수라면 복소수 영역에서의 유리수 지수에서의 정의와 일치함을 서술한다([그림 2-15] 참고).

for z^α, one for each choice of the integer k in Eq. (1). On the other hand, if $\alpha = m/n$, where m and $n > 0$ are integers having no common factor, then one can verify that there are exactly n distinct values of $z^{m/n}$, namely,

$$z^{m/n} = \exp\left(\frac{m}{n}\operatorname{Log}|z|\right)\exp\left(i\frac{m}{n}(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (2)$$

This is entirely consistent with the theory of roots discussed in Sec. 1.5. In summary,

[그림 2-15] <복소해석학> 전공 교재에 서술된 복소 지수의 정의에 따른 유리수 지수의 정의 (Saff & Snider, 2003, p. 132)

이는 수학적 구조가 무모순성을 가져야 한다는 메타 전제를 사용하여 복소수의 유리수 지수와 복소 지수의 개념이 모두 포괄적 개념에 해당함을 설명한 것이다.

지금까지의 내용을 정리하면 <표 2-7>와 같다.

<표 2-7> 대학교 <복소해석학> 교재에 서술된 유리수 지수와 복소 지수 표현의 다의적 개념

<table>
<tr><th rowspan="3">영역
특수
개념</th><th colspan="2">영역</th></tr>
<tr><th>유리수</th><th>복소수</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>포괄적
개념</td><td colspan="2">• $z^{\frac{1}{n}}$ 은 n제곱하여 z가 되는 값, 즉 방정식 $x^n = z$의 n개의 해를 의미한다.
• $z^{\frac{1}{n}}$ 은 다음과 같은 n개의 값을 가진다.
$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1)$
• $z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 이다.
• $z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}$</td></tr>
<tr><td>메타
전제</td><td colspan="2">• 기존 체계에서의 성질이 확장된 새로운 체계에서도 성립하도록 체계를 확장해 나간다. (형식불역의 원리)
• 수학의 구조는 무모순성을 가져야 한다. (무모순성의 원리)</td></tr>
</table>

3.2.3 요약

지금까지 지수 표현과 관련된 고등학교 교과서와 대학교 전공 교재의 서술을 근거로 지수가 실수에서 복소수로 확장되는 내용에서 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 도출하였다. 또한, 교과서와 선행 연구를 근거로 하여 교과서 서술의 메타 전제를 도출하였다(<표 2-6>, <표 2-7> 참고). 이렇게 도출된 다의적 개념의 특징은 다음과 같다.

첫째, 유리수 지수의 의미를 실수 영역에서 복소수 영역으로 확장하는 과정에서 유리수 지수 표현의 다의성이 발생하였다. 유리수 지수를 실수 영역에서 복소수 영역으로 확장하는 과정은 유리수 지수 표현의 의미가 방정식 $x^n = z$의 해를 의미한다는 것을 형식불역의 원리를 따라 유지하려는 기존 체계의 성질로 사용되었다. 이때, 해의 존재성을 보장하기 위하여 실수 영역에서는 단가성을 가지는 대상으로 제한되었지만, 복소수 영역에서는 대수학의 기본 정리에 의해 n개의 해의 존재성이 보장되므로 다가성을 가지는 대상으로 정의되었다. 따라서 하나의 유리수 지수 표현이 고려되는 영역에 따라 그 의미가 달라지는 다의성을 갖게 되었다.

둘째, 복소수 영역의 유리수 지수에서 복소 지수로의 확장 과정에서는 모든 개념이 포괄적 개념에 위치하였다. 이는 복소수 영역의 유리수 지수에서 성립하던 내용이 복소 지수에서도 성립함을 의미한다. 또한, 복소 지수의 정의에 입각하여 보았을 때, 복소 유리수 지수가 복소수 영역의 유리수 지수의 정의와 일치함을 의미한다.

이상을 종합하면, 지수가 확장되는 과정에서 실수 영역의 유리수 지수가 복소수 영역의 유리수 지수로 확장되는 과정에서 지수 표현의 다의성이 발생했음을 알 수 있었다. 이외의 확장 과정에서도 영역 특수 개념과 포괄적 개념이 도출되긴 했지만, 대부분 확장된 결과가 확장 전의 개념과 문제를 일으키지 않는 ‘호사스러운(luxury)’ 확장이었다(Zazkis, 1998). 유리수 지수의 확장 과정에서 다의성이 발생한 것은 형식불역의 원리와 무모순성의 원리에 따라 지수를 확장할 때, 결과적 유용성은 극대화하고 잠재적 모순성은 최소화하려는 시도의 결과라고 할 수 있다(Sangwin, 2019). 그러나 선행 연구에서 지적한 바처럼, 수학적 영역 내에서의 하나의 수학적 표현이 가지는 다의성은 학생들에게 혼란으로 다가올 수 있다(Durkin & Shire, 1991; Mamolo, 2010; Zazkis, 1998). 장기적 학습 과정에서 유리수 지수 표현 $a^{\frac{m}{n}}$을 이해하기 위해서는 과정-개념 사이의 유연한 이동이 중요하다(Tall, 2013). 즉, 학생들은 하나의 지수 표현 $a^{\frac{m}{n}}$을

과정으로써 방정식 $x^n = z$의 해로 이해하는 동시에, 그 결과는 실수 영역인지, 복소수 영역인지에 따라 달라지는 대상으로 이해해야 한다. 이후에서는 복소해석학을 학습한 예비 교사가 실제로 지수 표현의 다의성을 어떻게 이해하는지 분석한다.

제 3 장 연구 방법

이 연구는 지수 표현에 대한 예비 교사의 이해를 탐구하는 것에 목적을 둔다. 이러한 연구 목적을 이루기 위한 연구 방법으로서 사례 연구를 택하였다. 사례 연구는 연구자가 이해하고자 하는 현상을 상세하고 심층적인 자료 수집을 통해 탐구하여 시사점을 도출하는 연구 방법이다(Stake, 1995). 이번 장에서는 사례 연구에 부합하는 연구 방법을 서술한다.

제 1 절 연구 절차

1.1 연구환경

2020학년도 1학기 S 대학교 수학교육과 전공 과목으로 개설된 <복소해석학> 수업에서 연구가 진행되었다. <복소해석학>은 복소수의 대수학적, 기하학적 성질을 이해하고 미적분학, 해석개론 등의 선수 교과에 대한 이해를 바탕으로 복소 함수의 여러 가지 성질을 이해하는 것을 목표로 하는 교과이다. 특히, 중등수학의 방정식, 실함수, 미적분학과 관련된 내용을 확장한다는 점에서 중등수학과도 연결된다. 따라서 연구자는 <복소해석학> 수업이 해당 수업을 수강하는 예비 교사를 대상으로 장기간에 걸쳐 여러 영역에서 다뤄지는 수학적 개념에 대한 이해를 살펴보기에 적합한 환경이라고 기대하였다.

2020학년도 1학기 <복소해석학> 강좌는 전 세계적으로 유행했던 코로나 19 상황 속에서 진행된 강좌로 서울대학교 학사운영 방안에 따라 비대면 수업으로 진행되었다. 비대면 수업의 상황에서 수강생들의 학습을 지원하고자 플립러닝 형태의 강의 방식과 화상 회의 시스템(ZOOM)을 활용한 협동 학습을 기본으로 다음과 같은 방식으로 수업이 운영되었다.

첫째, 해당 강좌는 플립러닝 형태로 진행되어 매주 수강생들은 수업 전에 eTL에 업로드된 복소해석학 동영상 강의를 미리 학습한 후 질문을 만들어 Classprep 온라인 동료 평가 시스템에 제출하였다. 둘째, 수업 시간에는 수강생들의 사전 질문을 바탕으로 교수자의 강의가 진행되었으며, 이후 수강생들의 소그룹 토론이 진행되었다. 소그룹 토론에서는 매주 5문제 내외로 제공된 서면 과제를 토론을 통해 해결하였으며, 이후 개별적으로 정리하여 eTL 과제 제출함에 온라인으로 제출하였다.

예측할 수 없었던 코로나 19 상황을 고려하여 학기 초에는 평가 방식을 중간고사와 기말고사로 진행되던 기존 방식에서 기말고사를 1차와 2차로 나누어 보는 것으로 계획하였으나, 코로나 19 상황이 계속됨에 따라 한 번의 기말고사로 평가 방식을 수정하였다. 서울대학교의 학사운영 방침에 의거하여 수강생들에게 성적 평가 방식을 급락제로 변경할 것인지 의견을 조사하였고, 수강생들의 의견을 수렴한 결과 기존의 성적 평가 방식을 유지하기로 결정하였다.

<복소해석학> 교과에서 세 명의 조교가 서면 과제 수합 및 채점, Classprep 과제 수합, 수업 보조 등을 분담하여 보조하였다. 연구자는 세 명의 수업 조교 중 한 명으로 활동하였고, 학생들의 서면 과제와 포트폴리오 과제를 수합하였고, 학기말 서면 및 구두시험을 수합하고 채점하였다. 또한, 매 수업 현장에 참여하여 학생의 활동을 참여 관찰하였다.

1.2 연구 참여자

연구 참여자 모집은 <복소해석학> 교과 수강생 26명을 대상으로 하였다. 수학교육 혹은 과학교육(생물, 지구과학)을 전공하고 있는 학생으로서, <복소해석학> 교과가 3학년 전공 수업으로 개설되어 있었기 때문에 주로 3학년과 4학년 학생이 가장 많은 비중을 차지하였다. 학기 초 오리엔테이션 수업을 통해 지수 표현의 이해에 관한 연구가 이루어질 것이 공지되었다. 또한, 온라인 학습 게시판을 통해 연구 참여자 모집을 공지하였다. 이를 통해 연구 참여자를 모집하였으며, 연구 참여자들은 자율적

으로 이 연구에 참여하였다. 연구 참여자에게는 도중에 연구에 참여하지 않더라도 불이익이 발생하지 않음을 안내하였다.[5)]

제 2 절 자료 수집 및 분석 방법

2.1 자료 수집 방법

이 연구는 2020학년도 1학기 <복소해석학> 강좌의 학기말 고사에 출제된 구두 문항에 대한 학생들의 답변을 수집하였다. 구체적으로는 다음과 같은 절차로 수집하였다. 먼저 <복소해석학> 강좌 개강 후 연구 진행에 관한 충분한 안내가 이루어졌다. 이후 학기 말 시험의 경우 당시 수도권 중심으로 코로나 19가 확산되고 있는 상황을 고려하여 수강생들의 의견을 수렴하여 비대면으로 시행하기로 결정하였다. 이에 공정한 시험 시행을 위해 지필고사와 함께 구두시험을 시행하였다. 구두시험은 일부 문항에 대한 답안을 녹음하여 파일을 전송하는 방식으로 시행되었다. 다수의 학생이 처음 시행하는 형태의 시험이므로 사전에 모의시험을 실시하여 점검할 수 있도록 하였다. 구두시험 문항 중 복소 지수와 관련된 세 문항에 관한 수강생들의 음성 자료를 수집하였다(<표 3-1> 참고).

5) 이 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회로부터 승인을(IRB No. 2002/003-007) 받고 진행하였다.

<표 3-1> <복소해석학> 학기말 고사에 출제된 복소 지수 관련 구두 시험 문항

문항 번호	문항	밑	지수
1	다음 명제의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 간단히 설명하시오. i^i가 실수값을 가질 수 없다.	복소수	복소수
2	다음 식에서 오류를 찾고 그 이유를 설명하시오. $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=(8^2)^{\frac{1}{6}}=2$	음의 정수	유리수
3	다음 명제의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 간단히 설명하시오. $1^{1/2}+1^{1/2}=2\cdot 1^{1/2}$	양의 정수	유리수

2.2 자료 분석 방법

이 연구는 학기 말 시험의 구두시험 문항 중에서 복소 지수와 관련된 세 문항에 대한 학생들의 음성 답변 파일을 분석 범위로 하였다. 우선, 연구자는 학기 말 구두시험 문항 중 수집한 세 문항에 대한 학생들의 답변을 전사하면서 학생들의 설명을 이해하려고 시도하였다.

학기말 고사에 출제된 세 문항에 대한 26명 학생의 응답은 <표 3-2>와 같이 분류할 수 있었다. 1번 문항의 경우 i^i가 실수값을 가질 수 없다는 명제의 참, 거짓을 판단하는 문항으로 밑과 지수에 i가 있으므로 복소 지수의 정의를 사용하여 판단해야만 하는 문항이다. 19명의 학생은 복소 지수의 정의를 이용하여 주어진 명제가 거짓이라고 올바르게 판단했지만, 6명의 학생은 복소 지수의 정의를 언급하긴 했지만 잘못 적용하여 주어진 명제가 참이라 잘못 판단하였다. 1명의 학생은 복소 지수의 정의를 언급하지 않고, 단순히 밑과 지수에 i가 있으므로 실숫값을 가질 수 없다는 명제가 참이라고 말하였다.

<표 3-2> 학기말 고사 구두시험에 출제된 세 문항에 대한 학생들의 응답 분류

문항 번호	응답 유형	응답 수 (비율)	코딩
1번	복소 지수의 정의로부터 거짓이다	19(73%)	C
	복소 지수의 정의로부터 참이다	6(23%)	
2번	복소 지수의 정의에 따르면 복소 지수는 다가함수이므로 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}$ 혹은 $(-8)^{\frac{2}{6}}=\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$이 거짓이다.	10(39%)	C_D
	복소 지수법칙은 $(z^{\alpha})^n=z^{\alpha n}$ (n은 정수)인 경우에만 성립하므로 $(-8)^{\frac{2}{6}}=\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$이 거짓이다.	6(23%)	C_P
	유리수 지수는 밑이 양수인 경우에만 정의되므로 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}$이 거짓이다.	1(4%)	R_D
	유리수 지수 법칙은 밑이 양수인 경우에만 성립하므로 $(-8)^{\frac{2}{6}}=\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$이 거짓이다.	3(12%)	R_P
3번	복소 지수의 정의에 의하면 $1^{\frac{1}{2}}$은 다가함수이므로 $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}$은 -2, 0, 2의 값이 가능하고 따라서 $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times 1^{\frac{1}{2}}$는 거짓이다.	12(46%)	C_D
	$A+A=2A$이므로 $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times 1^{\frac{1}{2}}$는 참이다.	4(15%)	R_P
	1의 거듭제곱은 항상 1이므로 $1^{\frac{1}{2}}=1$이고 따라서 $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times 1^{\frac{1}{2}}$는 참이다.	4(15%)	R_P
	$1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$이므로 $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times 1^{\frac{1}{2}}$는 참이다.	4(15%)	R_D

2번 문항의 경우 음의 정수를 밑으로 하는 유리수 지수 표현이 등장하므로 복소수 영역과 실수 영역에서 모두 답할 수 있는 문항으로, 학생들의 응답은 크게 네 가지로 분류할 수 있었다. 첫 번째는 복소 지수의 정

의(C_D)를 언급한 답변이고, 두 번째는 복소 지수의 성질(C_P)을 언급한 답변으로, 모두 복소수 영역에서의 답변이다. 세 번째는 유리수 지수의 정의(R_D)를 언급한 답변이고, 네 번째는 유리수 지수법칙(R_P)을 언급한 답변으로, 모두 실수 영역에서의 답변이다. 16명의 학생은 복소수 영역에서 답변했으며 4명의 학생은 실수 영역에서 답변하였다.

3번 문항의 경우 1을 밑으로 하는 유리수 지수 표현이 등장하는 문항으로 학생들의 응답은 네 가지로 분류할 수 있었다. 첫 번째는 $1^{\frac{1}{2}}$을 복소 지수의 정의를 이용하여 파악한 뒤, 그 값이 여러 개를 가지므로 주어진 등식이 거짓이라고 응답(C_D)한 답변이다. 두 번째는 등식의 구조가 $A+A=2A$이므로 주어진 등식이 참이라고 응답(R_P)한 답변이다. 세 번째는 1의 거듭제곱은 항상 1이므로 주어진 등식이 참이라고 응답(R_P)한 답변이다. 네 번째는 유리수 지수의 정의에 의하여 $1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$이므로 주어진 등식이 참이라고 응답($R_D$)한 답변이다. 12명의 학생은 복소 지수의 정의를 이용하여 파악한 $1^{\frac{1}{2}}$의 다가성으로부터 주어진 명제가 거짓이라고 올바로 판단하였으며, 12명의 학생은 실수 영역에서 성립하는 정의와 성질을 활용하여 주어진 등식이 참이라고 판단하였다.

지수 표현에 대한 예비 교사의 다의적 개념 이미지를 분석하기 위하여 연구 참여자를 세 문항에 대한 응답을 기준으로 네 가지의 그룹으로 분류하였다. 즉, 각 문항에 대해 실수 영역을 전제하고 응답한 경우 R을, 복소수 영역을 전제하고 응답한 경우 C를 할당하여 세 문항에 대한 응답을 순서대로 세 개의 알파벳 열로 코딩하여 네 개의 그룹(CCC, CCR, CRR, CRC)으로 분류하였다. 여기서, 각 문항에서 복소 지수의 정의를 사용(C_D)하거나 복소 지수의 성질을 사용(C_P)한 경우는 그룹 코딩 과정에서는 모두 C로 코딩하였다. 마찬가지로 실수 지수의 정의를 사용(R_D)하거나 실수 지수의 성질(R_P)을 사용한 때도 그룹 코딩의 과정에서는 모두 R로 코딩하였다. 그룹 코딩 결과 나타난 그룹별 학생의 비율은 <표 3-3>와 같다.

<표 3-3> 학생들의 문항별 응답 유형별 비율

코딩	CCC	CCR	CRC	CRR	기타
응답 수(비율)	9(35%)	6(23%)	2(8%)	5(23%)	3(11%)

기타로 분류된 그룹은 세 문항에 대해 모두 응답하지 않았거나, 참·거짓의 판단 근거를 설명하지 않은 학생들이다. 기타 그룹의 응답은 다의적 개념 이미지를 분석하기 위한 충분한 근거를 발견하지 못하여 분석 대상에서 제외하였다.

그룹별 연구 참여자는 <표 3-4>와 같다[6]. CCC 그룹에 속하는 9명의 학생의 응답의 경우 4명의 학생 가인이, 나인이, 다인이, 라인이의 답변을 중점적으로 살펴본다. 나머지 5명의 학생의 답변은 이들과 차이가 없었다.

<표 3-4> 그룹별 연구 참여자

그룹 유형	해당 그룹에 속하는 연구 참여자
CCC 그룹	가인, 나인, 다인, 라인
CCR 그룹	가영, 나영, 다영, 라영, 마영, 바영
CRC 그룹	가봄, 나봄
CRR 그룹	가온, 나온, 다온, 라온, 마온

아래에서는 범주화된 응답별로 학생들의 구두 설명을 근거로 <표 3-5>에 제시된 영역 특수 개념, 포괄적 개념, 메타 전제의 구성 요소를 도출하여 분석하고 설명한다.

6) 본문에 사용하는 연구 참여자 명은 모두 가명을 사용하였다.

<표 3-5> 다의적 개념 이미지 분석틀(Kontorovich, 2018b 참고)

	의미	지표	예시
포괄적 개념	한 개인의 개념 이미지 전반에 모두 적용되는 사고방식	두 영역 이상에 공통적으로 적용되는 내용	“나눗셈의 결과에 나오는 정수가 아닌 수는 나누어떨어지지 않는다는 사실을 의미한다.”
영역 특수 개념	특정 영역에서만 적용되고 이외의 영역에서는 성립하지 않는 것으로 여겨지는 사고방식	영역을 지칭하는 선행 발화. 예를 들어, “복소해석학에서는” 또는 “고등학교에서는”	“정수 p, q, r에 대하여 p를 q로 나눈 결과를 r이라 할 때, r이 정수가 아니면 p는 q로 나누어떨어지지 않는다.”
메타 전제	다양한 수학적 개념과 영역에 적용되는 일반화된 사고방식	일반화된 사고방식을 암시하는 발화. 예를 들어, “실수에서 당연히 성립하므로 복소수에서도 성립한다.”	“한 집합에서 성립하는 성질은 그것을 포함하는 더 큰 집합에서도 성립한다.”

제 4 장 연구 결과

이번 장에서는 지수와 관련된 구두시험 문항에 대한 예비 교사의 답변을 다의적 관점에서 분석한다. 이를 위해 예비 교사의 답변을 근거로 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 도출한다. 또한, 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 이루게 한 메타 전제를 도출한다. 이러한 과정을 통해 최종적으로 도출된 그룹별 다의적 개념 이미지의 특징을 분석한다.

제 1 절 CCC 그룹: 통합된 다의적 개념 이미지

9명의 학생은 실수 지수 개념과 복소 지수 개념뿐만 아니라 문제에 주어진 지수 표현이 고려되는 영역이 무엇인지에 따라 답이 달라지는 대상이라는 사실도 알고 있었다. 먼저 이 그룹의 학생들은 문제에 주어진 지수 표현에서 밑과 지수가 어떤 수 집합에 속하는지에 관계없이 모두 복소수 영역의 관점에서 질문에 답하였다. 그 이유는 해당 질문이 대학교 <복소해석학> 교과목의 기말고사 문항으로 출제되었으므로 전제된 영역을 실수 영역이 아니라 복소수 영역이라 파악했기 때문일 것이다. 그러나 학생들의 답변에서 주어진 문제가 실수 영역에서는 답이 달라짐을 알고 있음을 확인할 수 있었다. 이 학생들은 주어진 문제 상황에 전제된 영역을 복소수 영역으로 판단하였고, 복소 지수의 정의를 알고 주어진 지수 표현을 복소 지수의 정의와 성질에 따라 그 의미를 파악하였다. 이후에서는 문항별 학생들의 답변과 이를 바탕으로 다의적 개념 이미지의 구성 요소를 도출하도록 한다.

지수 표현에서 밑과 지수가 속한 최소 수 집합이 복소수인 1번 문항의 질문에 학생들은 가인이의 답변과 같이 복소 지수의 정의를 사용하여 답하였다. 밑과 지수에 복소수 i가 있는 경우 실수 영역에서 정의하지 못하는 표현이므로 다수의 학생이 복소 지수의 정의를 사용한 것이다.

가인: i^i이 실수값을 가질 수 없다 이 말은 거짓인데요. 기본적으로 complex power z^α은 복소수 하나의 값으로 정해진 게 아니라 어떤 집합이라고 했죠. 집합인데 z^α가 $e^{\alpha \log z}$로 정의됩니다. 여기서 로그함수가 다가 함수기 때문에 $e^{\alpha \log z}$도 다가 함수가 됩니다. 근데 여기서 말하는 로그를 principal branch로 해서 적용하면 로그도 단가 함수가 되는데 그래서 i^α은 일단 어떤 정확한 값이 아니라 집합인데 여기서 로그를 principal 로그를 쓰면 그러니까 대문자 로그를 쓰면 i^i을 계산하면 놀랍게도 $e^{-\frac{\alpha}{2}}$, 즉 실수가 나와요. 그래서 실수값을 가질 수 없다라는 것은 거짓이라고 할 수 있습니다.

위 설명을 살펴보면, 학생들은 복소 지수의 정의와 복소 지수가 다가 함수라는 사실을 복소수 영역의 영역 특수 개념으로 가지고 있음을 확인할 수 있다.

지수 표현에서 밑과 지수가 속한 최소 수 집합이 각각 음의 정수와 유리수인 2번 문항의 질문에서도 학생들은 아래 가인이의 답변처럼 복소 지수의 정의로 지수 표현을 이해하였다. 이는 지수 표현의 밑과 지수가 속한 수 집합과 관계없이 문제에서 고려하고 있는 수 집합에서 주어진 지수 표현을 이해해야 한다는 사고방식을 메타 전제로 포함하고 있기 때문으로 보인다.

가인: 일단 여기서 complex power가 전체적으로 나타나고 있는데 이거를 저희 지금 대학교 3학년 복소해석학 관점에서 보자면 z^α은 $e^{\alpha \log z}$로 정의됩니다. 여기서 기본적으로 로그함수가 다가 함수이기 때문에 z^α은 하나의 값이 하나의 복소수가 아니라 집합이 됩니다. 따라서 여기 나온 식에 나온 $(-8)^{\frac{1}{3}}$이나 $8^{\frac{2}{6}}$ 이런 거는 어떠한 값이 아니라 집합이기 때문에 같다 연산을 하는 것부터가 조금 넌센스라고 할 수 있습니다.

2번 문항에 대하여 나인이의 답변처럼 복소 지수의 지수법칙이 일반적

으로 성립하지 않는다는 사실을 이용한 답변도 있었다. 즉, 복소 지수의 지수법칙 중 $(z^{\alpha})^n = z^{\alpha n}$는 n이 정수인 경우에만 성립하고 그렇지 않은 경우에는 성립하지 않음을 이용한 것이다.

> 나인: 다음 식에서 오류를 찾으라고 나와 있는데, 이제 그 세 번째 등호를 보면은, $(-8)^{\frac{2}{6}}$이 $\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$ 그러니까 즉 지수를 곱셈 형식으로 분리해서 나타낸 것을 볼 수가 있습니다. 근데 이제 지수, 복수 지수에서 이제 일반적으로 z^{ab}가 $z^a z^b$이 아니니까[7] 이제 여기서 오류가 있음을 알 수가 있습니다.

2번 문항에 대하여 다인이는 복소수 영역에서 유리수 지수가 방정식의 모든 해를 의미한다는 점을 이용하여 답하였다. 이는 복소해석학 전공 교재의 저자들이 설명하는 복소수 영역에서 유리수 지수의 정의와 부합한다. 다인이는 유리수 지수 $(-8)^{\frac{1}{3}}$는 방정식 $x^3 = -8$의 세 실근을 의미한다는 점을 복소수 영역의 영역 특수 개념으로 가지고 있었다. 주어진 지수 표현 $(-8)^{\frac{1}{3}}$나 $(8^2)^{\frac{1}{6}}$ 등을 밑이나 지수가 속한 최소 수 집합과 무관하게 방정식의 모든 실근을 의미하는 것으로 일관되게 해석하였다.

> 다인: 첫 번째 등식을 보면 $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}}$이다 이렇게 돼 있는데. 이제 여기서도 문제가 있는 게. $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 그러니까 어떠한 복소수 제트를 세 배 했을 때[8] 마이너스가 그러니까, -8이 되는 그런 모든 근들을 뜻합니다. 하지만 여기서는 이제 -2만을 말을 했고요.
>
> (중략)
>
> 그리고 또 마지막 등식을 보면 $\{(8^2)\}^{\frac{1}{6}} = 2$라고 되어 있는데 이것도 사실 엄밀한 정의를 생각을 하면 어떤 복소수 제트를 6승을 했을 때,

---

7) 앞의 맥락을 살펴볼 때 $z^{ab} \neq (z^a)^b$임을 의미한 것으로 판단된다.
8) "세 배 했을 때"가 아니라 "세 제곱했을 때"를 의도한 것이다.

8^2 즉 64가 나오는 모든 제트가 $\{(8^2)\}^{\frac{1}{6}}$인 거지, $\{(8^2)\}^{\frac{1}{6}}$이 원소가 2밖에 없다라고는 말을 할 수가 없는 것입니다.

지수 표현에서 밑과 지수가 속한 최소 수 집합이 자연수와 유리수인 3번 문항의 질문에서도 이 그룹에 속한 학생들은 복소수 영역에서 성립하는 영역 특수 개념을 사용하여 문제를 해결하였다. 2번 문항에 주어진 $(-8)^{\frac{1}{3}}$는 밑이 음수인 유리수 지수라는 점에서 실수 영역에서는 정의되지 않는 값이다. 이와 달리 3번 문항에 주어진 $1^{\frac{1}{2}}$은 실수 영역에서 $\sqrt{1}$로 정의되는 값이다. 그럼에도 불구하고 CCC 그룹의 학생들은 아래 가인이의 답변처럼 실수 영역에서의 유리수 지수의 의미로 해석하지 않고 복소 지수의 정의를 이용하여 답하였다.

가인: 네 계속 complex power가 나오는데 주의해야 할 점은 $1^{\frac{1}{2}}$ 같은 거는 단 하나의 정해진 복소수 값이 아니라 어떤 집합이라는 것이죠. 그래서 $1^{\frac{1}{2}}$을 complex power의 정의에 입각하여 계산하면 값이 두 개가 나오는데요 하나는 1이고 하나는 -1입니다. 그래서 $1^{\frac{1}{2}}$을 1로 쓸 수도 있고 -1로 쓸 수도 있는 거예요.

이는 앞서 살펴본 것처럼 지수 표현에서 밑과 지수에 사용된 수가 속하는 최소 수 집합을 고려하는 것이 아니라, 문제에서 전제하고 있는 영역에서 지수 표현의 의미를 이해해야 한다는 메타 전제를 가지고 있었기 때문으로 보인다. 이러한 사실은 아래 라인이의 발화처럼 "복소에서 생각해봤을 때"와 같은 표현에서 엿볼 수 있다.

라인: $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}$ 같은 경우 복소에서 생각해봤을 때 $1^{\frac{1}{2}}$은 -1이 될 수도 있고 1이 될 수도 있습니다. 그래서 어떤 값을 생각하느냐에 따라서 문제에 주어진 등식이 성립할 수도 있고 안 할 수도 있기 때문에 적절

하지 않다. 그러니까 f라고 생각합니다.”

CCC 그룹에 속한 학생들은 복소수 영역의 영역 특수 개념만 가지고 지수 표현을 이해한 것이 아니라, 실수 영역의 영역 특수 개념을 포함하여 구획화된 영역 특수 개념 이미지를 가지고 있었다. 이는 2번 문항에 대한 일부 학생의 답변에서 문제 상황을 실수 영역으로 가정하면 어떻게 답이 달라지는지에 대한 설명에서 확인할 수 있었다. 이들은 아래 가인이의 설명처럼 “고등학교 관점에서는”과 “복소해석학의 관점에서는”과 같은 설명을 통해 구획화된 영역 특수 개념 이미지를 갖고 있음을 알 수 있었다.

가인: 일단 여기서 complex power가 전체적으로 나타나고 있는데 이거를 저희 지금 대학교 3학년 복소해석학 관점에서 보자면 z^{α}은 $e^{\alpha \log z}$로 정의됩니다.

(중략)

고등학교 관점에서도 우리가 지수함수나 일단 a^x이 x가 실수일 때 a^x이 a가 0 이상인 실수[9]에서만 정의된다는 것을 고등학교 때 배웠어요. 그래서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 등 이런 것은 정의가 아예 되지가 않습니다.

실수 영역에서 유리수 지수는 밑이 양수에서만 정의되며, 유리수 지수법칙 또한 밑이 양수인 경우에만 적용할 수 있음을 설명하였다. 이러한 발화로부터 ‘확장 전 영역(실수)에서 성립하는 개념이나 성질이 확장 후 영역(복소수)에서도 항상 성립하는 아니다.’라는 일반화된 사고방식을 가진다고 판단할 수 있다.

위의 내용을 바탕으로 CCC 그룹에 해당하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 <표 4-1>과 같이 도식화할 수 있다. CCC 그룹에 속하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 영역에 따라 적절히 구획화된 개념 이미지를 갖는다고 볼 수 있다. 이는 <표 2-6>와 <표 2-7>에 제시된 고등학교

9) “0 이상인 실수”가 아니라 “0보다 큰 실수”를 의도한 것이다.

교과서 저자와 복소해석학 전공 교재 저자들의 설명과 일치하는 것이다. 이러한 점에서 CCC 그룹의 개념 이미지는 통합된 다의적 개념 이미지라고 할 수 있다. 이들은 "복소해석학 관점에서는"과 "고등학교 관점에서는"이라는 발화를 통해 볼 수 있듯이, 복소수 영역과 실수 영역에서 지수 표현의 규칙이 달라졌고, 따라서 구획화된 개념으로 지수 표현을 파악해야 함을 알고 있었다.

<표 4-1> CCC 그룹 학생들의 다의적 개념 이미지 도식

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">영역</th></tr>
<tr><th>실수</th><th>복소수</th></tr>
<tr><td>영역 특수 개념</td><td>• 실수의 유리수 지수에서 밑은 0보다 큰 실수인 경우만 정의된다.
• 실수 영역에서 유리수 지수 법칙은 밑이 0보다 큰 실수인 경우만 성립한다.</td><td>• 복소 지수는 $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$로 정의된다.
• 복소수 영역에서 지수는 다가 함수로 정의되므로, 하나의 지수 표현은 여러 가지의 값을 원소로 갖는 집합이다.
• 복소수에서 지수법칙은 $(z^{\alpha})^n = z^{\alpha n}$ (n은 정수)인 경우에만 성립한다.
• $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 방정식 $x^3 =-8$의 모든 해를 의미한다.</td></tr>
<tr><td>포괄적 개념</td><td colspan="2">• a^x는 지수 표현이다.</td></tr>
<tr><td>메타 전제</td><td colspan="2">• 문제에 표현된 수가 속하는 수 집합이 무엇인지와 관계없이 문제가 전제하는 수 집합에서 수학적 기호의 의미를 이해해야 한다.
• 확장 전 영역에서 성립하는 성질이 확장 후 영역에서도 항상 성립하는 것은 아니다.</td></tr>
</table>

제 2 절 CCR 그룹: 실수 영역의 유리수 지수 편향된 다의적 개념 이미지

6명의 학생은 문제에 제시된 지수 표현을 정의할 수 있는 최소한의 수 집합에 따라 그 의미를 이해하였다. 밑과 지수에 모두 허수가 있는 1번 문항과 밑이 음수인 유리수 지수 표현이 있는 2번 문항에서는 복소 지수의 정의와 성질을 이용하여 응답했지만, 밑이 1인 유리수 지수 표현이 있는 3번 문항에서는 실수 영역에서 성립하는 유리수 지수의 정의나 성질을 사용하여 응답하였다. 3번 문항에 대한 응답은 학생들이 답변에서 제시한 근거를 바탕으로 단가성 편향(3명)과 실수 영역의 유리수 지수 정의 편향(3명)으로 분류할 수 있었다.

여기서 '편향'은 '한쪽으로 치우침'을 의미하는 단어로 이 연구에서는 '인지 편향'의 의미로 사용하였다. '인지 편향'은 심리학에서 사용되는 용어로 의사결정 상황에서 합리적으로 판단하기보다는 경험에 근거한 그럴듯한 방법에 의존하는 인간의 의사결정 경향을 지칭하는 의미를 갖는다(Kahneman et. al., 1982). Kontorovich(2018a)는 제곱근 기호에 대한 학생들의 개념 이미지의 특징을 서술하며 '실수 편향'과 '복소수 편향'이라는 용어를 사용하였다. 이 연구에서도 지수 표현에 대한 학생들의 개념 이미지의 특징을 기술하는 방식으로 편향이라는 용어를 사용하기로 한다.

3번 문항에 대하여 단가성 편향으로 분류된 학생들의 응답은 $A+A=2A$와 같은 구조를 판단의 근거로 제시하였다. 다음은 가영이의 답변이다.

가영: $1^{\frac{1}{2}}$값이 두 번 반복되었기 때문에 $2\times1^{\frac{1}{2}}$이 되고 따라서 참이 됩니다.

단가성 편향이란 다가성을 가지는 수학적 표현을 단가성을 갖는다고 판단하는 생각의 방식을 의미하는 용어로 사용한 것이다. 현재 맥락에서는 복소수 영역에서 다가성을 갖는 지수 표현 $1^{\frac{1}{2}}$을 실수 영역에서처럼 단가성을 가지는 대상으로 간주하였기 때문에 등식 $A+A=2A$을 근거로 주어진 명제를 잘못 판단한 것으로 보인다. 이러한 단가성 편향은 아래에 제시된 나영이의 응답처럼 $1^{\frac{1}{2}}$을 복소수 영역에서 복소 지수의 정의를 이용하여 이해한 경우에서도 나타났다.

> 나영: $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times1^{\frac{1}{2}}$인데, 이는 참이라고 할 수 있습니다. $1^{\frac{1}{2}}$을 계산해 보면 $e^{\frac{1}{2}(2k\pi i)}$ 즉 $e^{k\pi i}$이라는 것을 알 수 있는데요. 이는 두 번 더 한 거니까 $2\times e^{k\pi i}$으로 표현할 수 있는데 이때 $e^{k\pi i}$는 $1^{\frac{1}{2}}$을 표현한 것 마찬가지임으로 덧셈을 성립할 수 있음을 알 수 있습니다.

복소 지수의 정의를 통해 $1^{\frac{1}{2}}$을 파악했음에도 불구하고 실수에서 성립하는 등식 $A+A=2A$을 적용했음을 확인할 수 있다. 1번과 2번 문항에 답하는 맥락에서는 복소 지수의 정의를 사용하였고 이를 통해 지수 표현이 다가성을 갖는 대상임을 알고 있었음에도, 3번 문항에서는 단가성을 갖는 대상이 성립하는 규칙을 적용한 것이다. 이는 개인의 개념 이미지가 일관성을 갖는 대상이 아니라 맥락에 영향을 받기 때문으로 보인다(Tall & Vinner, 1981). 하나의 수학적 기호의 합이 다른 수학적 기호임을 판단하는 맥락에서 실수 영역에서 단가성을 갖는 대상이 성립하는 규칙을 적용한 것이다.

3번 문항에 대하여 실수 영역의 유리수 지수 정의 편향으로 분류된 학생들의 응답은 밑이 1인 지수에 대하여 실수에서 성립하는 내용을 그 근거로 제시하였다. 여기서 실수 영역의 유리수 지수 정의 편향이란 밑이 양의 실수이고 지수가 유리수인 경우 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$와 같이 거듭제곱근

으로 정의하는 내용을 복소수 영역에서도 그대로 적용하는 생각의 방식을 의미하는 용어로 사용한 것이다. 다음은 다영이의 답변이다.

> 다영: $1^{\frac{1}{2}}$은 $\sqrt{1}$과 같이 나타낼 수 있습니다. $\sqrt{1}$은 양의 실수를 의미하므로 $\sqrt{1}=1$ 또다시 $\sqrt{1}=1$이 되어서 $1+1=2\times 1$이기 때문에 참임을 확인할 수가 있습니다.

라영이는 다음과 같이 실수에서 당연히 성립하는 사실이므로 부연 설명이 필요 없는 자명한 사실이라고 말하기도 하였다.

> 라영: 사실 실수에서 썼던 것들이라서 굳이 부연 설명 없이 자명하게 설명이 가능할 것 같습니다.

"실수에서 썼던 것들"이 가리키는 내용이 무엇이었는지 구체적으로 설명하지 않았지만, 같은 그룹에 속한 다른 학생들의 답변을 바탕으로 추측했을 때, $1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$이라는 내용을 가리키는 것으로 생각할 수 있다.

한편, CCR 그룹에 속하는 학생 중 마영이와 바영이는 1번 문항에 대한 답변에서 복소 지수의 정의를 언급하긴 했지만, 복소 지수의 정의를 잘못 적용하여 올바르게 판단하지 못하였다. 다음은 1번 문항에 대한 마영이의 답변이다.

> 마영: 이제 i^i을 이제 $e^{i\ln i}$로 계산을 해보면 e의, exponential 그러니까 다시 exponential -2의 π $2k$만큼의 식을 나타내게 되는데요 이 경우 k에 어떤 식이 들어가던지 간에 상관없이 실수값을 가질 수 없게 됩니다. 따라서 1번은 참입니다.

이 학생들은 2번 문항에서는 복소 지수의 정의가 아니라 다음과 같이 복소 지수의 성질을 활용하여 답하였다. 다음은 2번 문항에 대한 바영이의 답변이다.

바영: $(-8)^{\frac{2}{6}}$은 $\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$과 같지 않은데, 그 이유는 $(-8)^{\frac{2}{6}}$이 허수이기 때문에 그 지수를 서로 바꿔줄 수 없기 때문입니다.

3번 문항에서는 앞서 말한 $A+A=2A$와 같은 구조를 이용하여 참, 거짓을 잘못 판단하였다. 이를 미루어봤을 때, 이 학생은 복소수 영역의 영역 특수 개념 이미지에 복소 지수의 정의가 위치하지 않는다고 판단할 수 있다.

CCR 그룹에 속한 학생들은 복소 지수의 정의와 성질을 모두 알고 있었음에도 복소 영역을 전제로 제시된 밑이 양수이고 지수가 유리수인 지수 표현 $1^{\frac{1}{2}}$을 실수에서와 동일한 성질을 갖는 대상으로 다루었다. 곧 $A+A=2A$나 $1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$라는 개념을 실수에서만 성립하는 영역 특수 개념이 아니라 포괄적 개념에 위치시킨 것이다. $A+A=2A$라는 개념을 포괄적 개념에 위치시킨 것은 '하나의 수학적 기호가 하나의 수학적 대상을 가리킨다'는 경험적 사실을 메타 전제로 가지고 있었기 때문일 것이다. $1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$를 포괄적 개념에 위치시킨 것은 Kontorovich(2018b)의 학생들이 보인 반응처럼 이 연구의 예비 교사들도 '실수 영역에서 성립하는 성질이 그보다 더 큰 집합인 복소수 영역에서 당연히 성립한다'는 생각의 방식을 메타 전제로 가지고 있었기 때문으로 생각할 수 있다. 이러한 메타 전제들은 실수 영역의 지수 표현에서는 성립하지만, 복소수 영역의 지수 표현에서는 성립하지 않는 생각의 방식이다. 복소수 영역의 영역 특수 개념은 비교적 전공 교재의 내용과 비슷함에도 복소수 영역에서는 성립하지 않는 메타 전제가 주어진 문제 맥락에서 복소수 영역에서의 지수 표현에 관한 판단에 영향을 준 것으로 보인다.

위의 내용을 바탕으로 CCR 그룹에 해당하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 <표 4-2>과 같이 도식화할 수 있다. CCR 그룹에 속하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 실수 영역의 유리수 지수에만 적용되는 사실인 $A+A=2A$와 $1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$을 포괄적 개념에 위치시켰다는 점에서 실수

영역의 유리수 지수 편향된 개념 이미지를 갖는다고 할 수 있다.

<표 4-2> CCR 그룹 학생들의 다의적 개념 이미지 도식

	영역	
	실수	복소수
영역 특수 개념	• 지수 표현은 하나의 값을 갖는다. • 유리수 지수는 거듭제곱근으로 정의된다.	• 복소 지수는 $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$로 정의된다. • 복소수 영역에서 지수는 다가 함수로 정의되므로, 하나의 지수 표현은 여러 가지의 값을 원소로 갖는 집합이다. • 복소수에서 지수법칙은 $(z^{\alpha})^{n} = z^{\alpha n}$ (n은 정수)인 경우에만 성립한다.
포괄적 개념	• a^{x}는 지수 표현이다. • $A + A = 2A$이다. • $1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$이다.	
메타 전제	• 확장 전 영역에서 성립하는 성질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다. • 하나의 수학적 기호는 하나의 수학적 대상을 가리킨다.	

제 3 절 CRC 그룹: 실수해 편향된 다의적 개념 이미지

CRC 그룹에 속하는 2명의 학생 가봄이와 나봄이는 밑이 음수인 유리수 지수에 관한 2번 문항에 대한 답을 밑이 음수인 유리수 지수 표현을 방정식의 실수해로 해석하여 설명하였다. 이와 달리, 밑과 지수가 복소수인 1번 문항이나 밑이 양수인 유리수 지수에 관한 3번 문항에 대한 답변은 복소 지수의 정의를 사용하여 설명하였다. 이후에서는 2명의 학생의 세 문항에 대한 답변을 차례로 살펴본다.

먼저 2번 문항에 대한 가봄이의 답변은 다음과 같다.

> 가봄: 기호의 오류에서부터 시작되었다고 볼 수 있습니다. 예를 들어서 어떤 수에 n분의 1승이 있다고 했을 때 n이 홀수일 때 이는 이를 세제곱해서 해당 값이 되는 실수는 무조건 하나밖에 없기 때문에 하나로만 정해진 함수이지만, 만약에 n이 짝수인 경우에는 이를 만족하는 경우가 양수와 음수인 경우 두 가지가 있지만, 저희는 지수 로그 체계에서 이런 양수 하나만을 가리키는 것으로 약속을 합니다. 따라서 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}$이라 됐을 때 3분의 1은 현재 -1만[10] 나타내는 함수이지만, $(-8)^{\frac{2}{6}}$을 나타내고, 이를 $\{(-8)^2\}^{\frac{1}{6}}$ 그러니까 $64^{\frac{1}{6}}$을 나타내는 순간, 이거는 64를 어떤 수를 6제곱해서 64가 되도록 하는 양수를 의미하게 되는 것입니다. 따라서 이러한 기호의 약속을 고려하지 않고. 식을 정리했기 때문에 이와 같은 오류가 발생했습니다.

가봄이는 유리수 지수의 정의를 방정식의 해와 관련하여 잘 파악하고 있었으며, 방정식의 해가 n이 홀수인지, 짝수인지에 따라 그 양상이 달라짐도 파악하고 있었다. 그러나, “이를 세제곱해서 해당 값이 되는 실수는 무조건 하나밖에 없기 때문에”와 “저희는 지수 로그 체계에서 이런 양수

10) “-1만”은 “-2만”을 의도한 것이다.

하나만을 가리키는 것으로 약속을 합니다."라는 표현에서 볼 수 있듯이, 유리수 지수의 의미를 방정식의 실수해로 파악하고 있음을 알 수 있다. 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서는 실수 영역에서 유리수 지수를 방정식의 실수해로 정의하며 존재성을 보장하기 위하여 밑을 양수로 제한한다. 그러나 복소수 영역에서는 대수학의 기본 정리에 의하여 방정식 $x^n = a$가 n개의 해를 가지므로 유리수 지수 표현 $a^{\frac{1}{n}}$은 n개의 값을 의미하게 된다. 이 학생은 실수 영역에서 성립하는 유리수 지수의 의미, 즉 방정식의 실수해라는 사실을 복소수 영역을 전제한 문항에 대해 응답할 때 사용하였다.

가봄이의 1번 문항과 3번 문항에 대한 답변을 살펴보면 복소 지수의 정의와 성질을 잘 알고 있음을 확인할 수 있다. 먼저 1번 문항의 답변은 오류가 있었지만, 답변의 내용으로 볼 때 복소 지수의 정의를 영역 특수 개념 이미지로 가지고 있다고 판단하였다. 왜냐하면, 복소 지수의 정의를 잘 적용하였지만, $\log i$를 로그함수의 정의로부터 계산하는 과정에서 계산 오류가 있었고 그 결과 i^i가 실수값을 가질 수 없다고 판단한 것이기 때문이다. 다음은 1번 문항에 대한 가봄이의 답변이다.

> 가봄: 먼저 small $\log i$는 $1+\frac{\pi}{2}+2k\pi i$를 나타내지게 되고 이를 다시 활용하게 되면 $i^i = e^{i+\frac{\pi}{2}i-2k\pi}$로 나타내집니다. 따라서 $e^{-2k\pi i}$는 분명한 실수입니다. 하지만 $e^{i+\frac{\pi}{2}i}$값은 오일러 공식을 이용하게 되면 결국 허수부가 계속 살아남아 있기 때문에 허수부가 살아남아 있기 때문에 결국 i에 관한 항은 남게 됩니다. 따라서 i의 i승은 실수값을 가질 수가 없습니다.

가봄이는 $1^{\frac{1}{2}}$에 관한 3번 문항에 대한 답변으로 복소 지수의 다가성을 근거로 응답하였다.

> 가봄: 복수 함수에서 주어진 등식이 만약에 주어진 등식이 만약에 실수에서

> 정의되었다면 맞는 말이겠지만 복수 함수의 경우에는 이는 $1^{\frac{1}{2}}$은 i와 -1 두 개[11]를 다 의미하기 때문에 이는 함수 관계가 아니기 때문에 주어진 것 같이 일대일 관계를 나타내는 등식이 성립하는 것 자체가 오류입니다.

"주어진 등식이 만약에 실수에서 정의되었다면 맞는 말이겠지만"의 발화를 통해 알 수 있듯이, 이 학생은 하나의 지수 표현 $1^{\frac{1}{2}}$이 고려되는 영역에 따라 의미가 달라질 수 있음을 알고 있었다. 특히, 복소수 영역에서의 지수 표현은 다가성을 가지는 대상임을 알고 있었다. 정리하자면 가봄이는 복소 지수의 성질을 복소수 영역의 영역 특수 개념 이미지에 위치시키고 있었지만, 유리수 지수는 방정식의 실수해를 의미한다는 사실을 포괄적 개념에 위치시킨 것으로 판단하였다.

CRC 그룹으로 분류된 나봄이도 가봄이의 답변과 비슷하게 음수의 유리수 지수에 관한 2번 문항에 대하여 방정식의 실수해를 이용하여 설명하였다.

> 나봄: 세 번째 등호 부분이 잘못되었습니다. 세 번째 등호의 좌변에서 $(-8)^{\frac{2}{6}}$이 있는데, $\dfrac{2}{6}$를 세제곱 근으로 이해를 해야지, 그것을 2를 먼저 계산을 해버리면, 부호가 바뀔 수도 있으므로 등식이 성립하지 않을 수도 있습니다.

"세제곱근"이나 "부호가 바뀔 수도 있으므로"를 근거로 판단하면 유리수 지수를 방정식의 실수해로 해석한 것으로 보인다.

나봄이의 1번과 3번 문항에 대한 답변을 살펴보면 복소 지수의 정의와 성질을 알고 있었음을 알 수 있다. 따라서 복소수 영역의 영역 특수 개념 이미지에 복소 지수의 정의와 성질이 위치한다고 판단할 수 있다. 다음은 1번 문항에 대한 나봄이의 답변이다.

11) "i와 $-i$ 두 개"는 "1과 -1 두 개"를 의도한 것이다.

나봄: i^i을 계산해 보면 i^i은 $e^{i\log i}$이고 이것은 $e^{i\times i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$를 계산한 것임으로 i^i은 $e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ 입니다. 지수가 실수임으로i^i은 실수값을 갖습니다.

다음은 3번 문항에 대한 나봄이의 답변이다.

나봄: $1^{\frac{1}{2}}$을 계산해 보면 $1^{\frac{1}{2}}$은 $e^{\frac{1}{2}\log 1}$이고 이것은 최종적으로 $e^{k\pi i}$입니다. 이때 k가 짝수이면 $1^{\frac{1}{2}}$의 값은 1이고 k 홀수이면 $1^{\frac{1}{2}}$의 값은 -1입니다. 이때 좌변을 살펴보면 1과 -1을 값으로 갖는 두 다가 함수의 합은, 합이므로, 좌변은 2, 0, -2 값을 가질 수 있고, 우변은 단순히 2를 곱했음으로 2와 -2 값을 가지므로 거짓입니다.

$1^{\frac{1}{2}}$은 복소 지수의 정의를 이용하여 판단한 사실을 고려할 때, 밑이 음수인 유리수 지수에 관한 등식의 오류를 판단하는 문제 상황에서 복소 지수를 사용하지 않았다는 점이 주목할 만하다. 이는 앞서 CCR 그룹의 예에서도 살펴본 것처럼 개인의 개념 이미지가 일관성을 갖는 대상이 아니라 맥락에 영향을 받기 때문으로 보인다(Tall & Vinner, 1981).

위의 내용을 바탕으로 CRC 그룹에 해당하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 <표 4-3>과 같이 도식화할 수 있다. CRC 그룹에 속하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을 방정식 $x^n=a^m$의 실수해라는 사실을 포괄적 개념에 위치시켰다는 점에서 실수해 편향된 개념 이미지를 갖는다고 할 수 있다.

<표 4-3> CRC 그룹 학생들의 다의적 개념 이미지 도식

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">영역</th></tr>
<tr><th>실수</th><th>복소수</th></tr>
<tr><td>영역 특수 개념</td><td></td><td>• 복소 지수는 $z^{\alpha}=e^{\alpha \log z}$로 정의된다.
• 복소수 영역에서 지수는 다가 함수로 정의되므로, 하나의 지수 표현은 여러 가지의 값을 원소로 갖는 집합이다.</td></tr>
<tr><td>포괄적 개념</td><td colspan="2">• a^x는 지수 표현이다.
• 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$은 방정식 $x^n=a^m$의 실수해를 의미한다.</td></tr>
<tr><td>메타 전제</td><td colspan="2">• 확장 전 영역에서 성립하는 성질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다.</td></tr>
</table>

제 4 절 CRR 그룹: 실수 편향된 다의적 개념 이미지

CRR 그룹에 속하는 5명의 학생은 지수 표현에 제시된 수가 속하는 최소한의 수 집합에 따라 그 의미를 이해하였다. 즉, i^i가 포함된 1번 문항은 복소 지수의 정의를 이용하였고, $(-8)^{\frac{1}{3}}$이 포함된 2번 문항과 $1^{\frac{1}{2}}$이 포함된 3번 문항은 실수 유리수 지수의 정의와 성질을 이용하였다. CRR 그룹의 답변을 살펴보면, 1번 문항에 대한 답변은 오류가 있는 경우가 다수 있었으며 3번 문항에 대한 답변은 CCR 그룹의 답변과 유사한 편향을 보였다. 2번 문항에 대한 답변은 CRC 그룹의 답변처럼 방정식의 실수해 편향에 더하여 실수 유리수 지수 편향도 있었다. 이후에서는 2번 문항에 대한 답변을 기준으로 실수 유리수 지수 편향을 보이는 경우와 방정식의 실수해 편향을 보이는 경우로 나누어 살펴본다.

먼저 2명의 학생 가온이와 나온이는 실수 유리수 지수 편향을 보였다. 즉, 2번 문항에 대하여 실수 영역의 유리수 지수의 지수법칙이 밑이 양수인 경우에만 성립함을 근거로 응답한 것이다. 다음은 가온이의 답변이다.

> 가온: 다음 식에서는 $(-8)^{\frac{2}{6}}$을 $\left\{(-8)^2\right\}^{\frac{1}{6}}$로 하는 과정이 잘못되어서 오류가 발생하였습니다. 위와 같은 과정이 진행되려면 밑이 양수여야 한다는 조건이 필요하기 때문에 $(-8)^{\frac{2}{6}}$을 저렇게 바꿀 수가 없어서 오류가 발생하였습니다.

나온이도 가온이와 비슷하게 실수 유리수 지수법칙이 밑이 양인 경우에만 적용할 수 있음을 설명하였다. 다음은 나온이의 답변이다.

> 나온: 오류가 발생하는 등식은 세 번째 등식입니다. 이는 사실 고등학교 때 배운 내용인데요. 실수에서의 지수법칙을 적용하기 위해서는 밑이 반

드시 양수인 상황이어야 하기 때문에 -8에서는 적용을 할 수가 없습니다.

이 학생들은 다음과 같이 i^i에 관한 1번 문항의 질문에서는 모두 복소 지수의 정의를 적용하여 참, 거짓을 올바르게 판단하였다. 다음은 가온이의 답변이다.

가온: i^i이 실수값을 가질 수 없다 하셨는데 이것은 거짓입니다. 왜냐하면 복소수에서의 지수를 생각을 해보면, i^i은 $e^{i\log i}$가 되고 $e^{i\log i}$은 $e^{i(Log|i|+i\arg i)}$가 되기 때문입니다. 아, i가 됨으로 계산을 해보면, i의 argument는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$꼴이기 때문에 여기에다가 이제 i를 두 번 곱하면, $e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$꼴이 나오는데 이게 곧 i^i이 돼서 실수값을 가질 수 있습니다.

한편, 이 학생들의 3번 문항에 대한 답변은 CCR 그룹 학생들의 답변과 같았다. 주로 앞서 언급한 실수 유리수 지수 편향에 해당하는 답변을 하였다. 다음은 3번 문항에 대한 가온이의 답변이다.

가온: $1^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=2\times 1^{\frac{1}{2}}$이라고 돼 있는데 이것은 참입니다. 왜냐하면 $1^{\frac{1}{2}}$이 모두 실수이기 때문에 이것은 실수에서의 지수로 생각해서 계산하면 좌변은 $1+1$이 되고 우변은 2×1이 되기 때문에 등식이 성립합니다.

위 답변에서 $1^{\frac{1}{2}}$을 1로 판단한 근거를 찾을 수 있는데, 밑과 지수가 모두 실수에 해당하므로 실수 영역에서의 유리수 지수로 이해하였다는 것이다. 이는 복소해석학 학기말 고사로 출제된 문항이라 할지라도, 특별한 언급이 없으면 문제에 표현된 수가 속한 가장 작은 수 집합을 기준으로 지수 표현을 이해하면 된다는 사실을 메타 전제로 가지고 있는 것으로 볼 수 있다. 또한, 실수 영역에서 성립하는 성질은 당연히 복소수 영역에

서도 성립한다는 사고방식을 메타 전제로 가지고 있었다고 판단할 수 있다.

세 문항에 대한 응답을 종합해보면 이 학생들은 문제에 제시된 지수 표현을 구성하는 밑과 지수가 속한 최소한의 수 집합을 문제에서 전제하는 수 집합으로 파악한 것으로 보인다. 그러나 $(-8)^{\frac{2}{6}}$과 같은 표현은 실수 영역의 유리수 지수에서는 학생들의 응답에서처럼 정의가 되지 않는 수학적 대상이다. 그렇지만 복소수 영역에서는 복소 지수의 정의에 따라 정의가 잘 되는 수학적 대상이다. 그럼에도 불구하고 복소 지수의 정의로 이해하지 않은 이유는 실수 영역에서의 지식이 복소수 영역이 전제된 문제를 해결하는 상황에서 편향으로 작용했기 때문으로 보인다.

다음으로 3명의 학생 다온이, 라온이, 마온이는 2번 문항에 대하여 방정식의 실수해 편향을 보였다. 즉, 밑이 음수인 유리수 지수를 방정식의 실수해로 해석하여 응답한 것이다. 이는 실수 영역에서의 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을 방정식 $x^n = a^m$의 실수해로 정의하는 고등학교 <수학 I> 교과서의 설명에 근거한 것이다.

다온: 세 번째 등호가 잘못되었습니다. 세 번째 등호 왼쪽은 -8의 세제곱근을 서술하는, 찾는 문항입니다. 그에 비해서 왼쪽에서 세 번째 등호 오른쪽은 2^6, 그러니까 64의 6제곱근을 찾는 과정이 되겠습니다. 둘 다 실수 근을 찾는 것이고, 어, 왼쪽에서 세 번째 등호 오른쪽 이 부분은 2^6, 64의 양의 실수 근을 찾는 과정입니다. 둘 다 제곱근을 찾는 과정이긴 하나, 서로 다른 값을 찾는 과정이기 때문에 두 개를 등호로 연결시키는 것이 잘못되었습니다.

라온: 세 번째 항에서 네 번째 항으로 가는 등호 즉 세 번째 등호가 옳지 않은데요. 먼저 -8을 생각해 보면 -8은 $(-2)^3$이므로 $\{(-2)^3\}^{\frac{1}{3}} = -2$인데 $(-8)^2 = 2^6$이므로 $2^{6 \times \frac{1}{6}} = 2$입니다. 이렇게 문제가 생기는 이유는 어떤 숫자의 음수의, 음수의 유리수배의 제곱을 했을 때 그 값이 이제 음수로 나오고 그다음에 양수를 유리 수배했을 때 그 값

이 우리가 정의하기를 양수로 정의를 하기 때문에 오류가 생기는 것 같습니다. 따라서 이 부분을 수정해야 하고 그렇기 때문에 지금 오류가 된다고 생각합니다.

마온: 이 식에서 오류는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 $(-8)^{\frac{2}{6}}$과 같다라는 것에서 오류가 생기는데 그 이유는 좌변의 $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 $z^3=-8$의 근 중 실수를 의미하고, 우변에 $(-8)^{\frac{2}{6}}$은 $z^6=(-8)^2$ 즉 $(z^3-8)(z^3+8)=0$의 근을 의미함으로 좌변에서 우변으로 갈 때 필요충분조건이 아닌 충분조건이 됨으로 위와 같은 오류가 발생했음을 알 수 있습니다.

그러나 학생들의 설명과 달리 고등학교 <수학Ⅰ> 교과서에서는 실수 영역에서의 유리수 지수 표현 $a^{\frac{m}{n}}$의 존재성을 보장하기 위하여 $a>0$로 제한하므로 실수 영역에서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$과 같이 밑이 음수인 유리수 지수는 방정식의 해로 해석하지 않는다. 반면에 복소수 영역에서는 밑이 음수인 유리수 지수도 방정식의 해를 의미하는 대상으로 정의되며, 이때 방정식의 실수해가 아니라 모든 해를 의미하는 다가성을 갖는 대상으로 정의된다. 학생들은 유리수 지수 표현을 해석하는 문제 상황에서 실수 영역에서의 지식을 포괄적 개념에 위치시켜 복소수 영역을 전제로 한 문제 상황을 해결한 것으로 보인다(<표 4-4> 참고).

한편, 다온이, 라온이, 마온이는 밑과 지수가 모두 i인 지수 표현을 이해할 때, 아래의 예에서 볼 수 있듯이, 복소 지수의 정의를 제대로 적용하지 못하였다. 이는 복소 지수에 선행하여 학습한 복소 로그함수의 정의를 제대로 모르고 있기 때문으로 보인다.

다온: i^i이라고 써져 있는데. i^i은 $e^{i\log i}$가 되겠습니다. $\log i$의 값은, 어, $\log i$은 여러 가지 값이 나올 수 있는데, 그중에 우리는 대푯값으로 $\frac{\pi}{2}$를 취할 수가 있습니다. 그렇다면 i^i은 $e^{i\times\frac{\pi}{2}}$가 될 수 있습니다.

따라서 이 값은 이 값 외에도 $e^{i\times\frac{\pi}{2}+}$ ... 수정하겠습니다. 첫 번째 문제는 실수 값을 가질 수 없다 참입니다. 이유는 exponetial 꼴로 바꿔보면 exponential i라는 값이 $\log i$값을 어떻게 취한다 하더라도 사라지지 않습니다. 따라서 이 값은 항상 e^{i}이라는 값을 항상 곱해주게 되기 때문에, 그래서 실수 값을 가질 수가 없습니다.

마온: i^{i}이 실수값을 가질 수 없다는 거짓입니다. i^{i}은 $e^{i\log i}$이고 $\log i$는 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$이므로 이때 n이 0이 되게 되면. (정적). 정정하겠습니다. i^{i}은 실수값을 가질 수 없다는 참입니다. i^{i}은 $e^{i\log i}$이고 $e^{i\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$가 되는데 이는 $\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$가 되는데 이때 허수 부분인 $\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 가 모든 n에 대해서 0이 될 수 없기 때문에 i^{i}승은 실수값을 가질 수 없습니다.

참, 거짓을 올바르게 판단한 2명의 학생인 가온이와 나온이 중 나온이는 복소 지수의 정의를 언급하기는 했지만, 명시적으로 복소 지수의 정의를 사용하지 않았다.

나온: 1번은 거짓입니다 i^{i}의 값은 계산해 보면 실제로 주치값을 설정함에 따라서 e의 실수 승을 취할 수 있기 때문에 실수 값을 가질 수 있습니다.

복소 지수의 정의를 사용하여 올바르게 1번 문항에 답변한 가온이와 나온이를 제외한 나머지 학생들은 복소 지수의 정의를 복소수 영역의 영역 특수 개념 이미지로 가지고 있다고 판단하기 어렵다. 복소 지수의 정의가 영역 특수 개념에 위치하지 않았기 때문에 기존에 알고 있었던 실수 영역의 개념을 사용하여 2번과 3번 문항에 답한 것으로 보인다.

위의 내용을 바탕으로 CRR 그룹에 해당하는 학생들의 다의적 개념 이미지는 <표 4-4>와 같이 도식화할 수 있다. CRR 그룹에 속하는 학생들

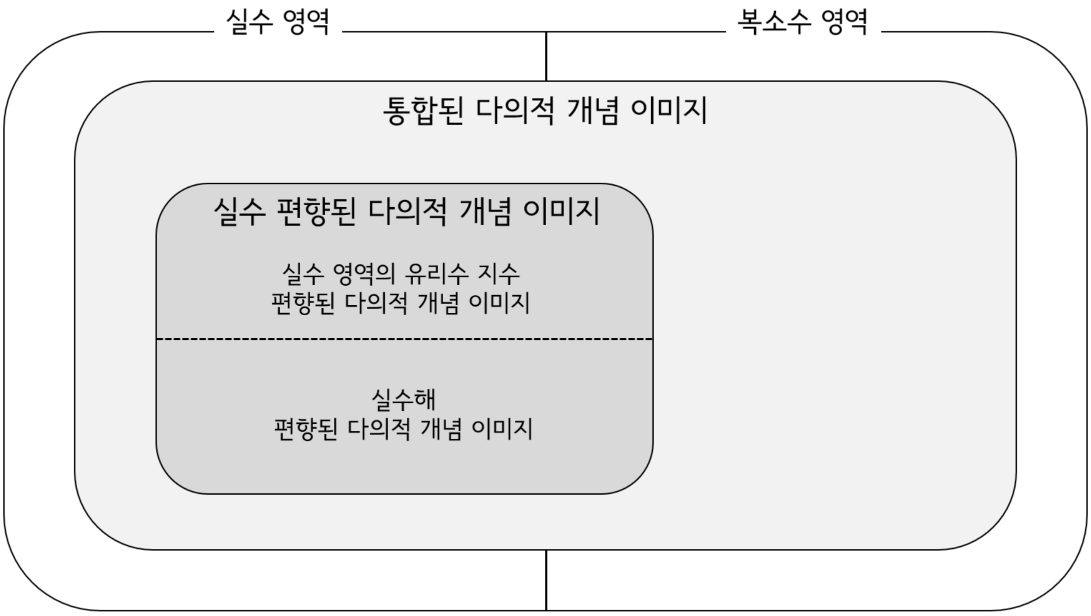
의 다의적 개념 이미지는 CCR 그룹과 CRC 그룹에 나타난 편향이 모두 나타났으므로 실수 편향된 개념 이미지를 갖는다고 할 수 있다.

<표 4-4> CRR 그룹 학생들의 다의적 개념 이미지 도식

<table>
<tr><th rowspan="3">영역
특수
개념</th><th colspan="2">영역</th></tr>
<tr><th>실수</th><th>복소수</th></tr>
<tr><td></td><td>• 복소 지수는 $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$로 정의된다.</td></tr>
<tr><th>포괄적
개념</th><td colspan="2">• a^{x}는 지수 표현이다.
• $1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$이다. (실수 유리수 지수 편향)
• $A + A = 2A$이다. (단가성 편향)
• 유리수 지수에서 밑은 0보다 큰 실수에서만 정의된다.
• 유리수 지수법칙은 밑이 0보다 큰 실수에서만 성립한다.
• 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$은 방정식 $x^{n} = a^{m}$의 실수해를 의미한다.</td></tr>
<tr><th>메타
전제</th><td colspan="2">• 확장 전 영역에서 성립하는 성질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다.
• 하나의 수학적 기호는 하나의 수학적 대상을 가리킨다.
• 문제에 표현된 수가 속하는 가장 작은 수 집합이 무엇인지에 따라 수학적 표현의 의미를 이해하면 된다.</td></tr>
</table>

제 5 절 지수 표현에 관한 예비 교사의 다의적 개념 이미지

지금까지 지수와 관련된 예비 교사의 이해를 다의적 관점에서 분석하였다. 이를 위해 지수와 관련된 구두시험 문항에 대한 예비 교사의 답변을 근거로 그룹별 영역 특수 개념과 포괄적 개념을 도출하였다. 분석 결과 예비 교사의 다의적 개념 이미지를 통합된 다의적 개념 이미지(CCC 그룹), 실수 영역의 유리수 지수 편향된 다의적 개념 이미지(CCR 그룹), 실수해 편향된 다의적 개념 이미지(CRC 그룹), 실수 편향된 다의적 개념 이미지(CRR 그룹)로 분류할 수 있었다. 이를 정리하여 그림으로 나타내면 [그림 4-1]과 같다.



[그림 4-1] 지수 표현에 관한 예비 교사의 다의적 개념 이미지 분류

통합된 다의적 개념 이미지를 가진 CCC 그룹과 일부 편향된 다의적 개념 이미지를 가진 나머지 그룹은 메타 전제에서 차이를 보였다. 이후에서는 그룹별 메타 전제의 차이에 주목하여 영역 특수 개념과 포괄적 개

념에 차이를 갖게 한 원인을 살펴본다.

첫째, 통합된 다의적 개념 이미지를 보인 CCC 그룹에 속한 학생들은 다의성을 갖는 지수 개념을 이해하는 데 적합한 메타 전제를 가졌다. 이 연구 맥락에서 드러난 CCC 그룹 학생들의 메타 전제는 ‘문제에 표현된 수가 속하는 수 집합이 무엇인지와 관계없이 문제가 전제하는 수 집합에서 수학적 기호의 의미를 이해해야 한다.’와 ‘확장 전 영역에서 성립하는 성질이 확장 후 영역에서도 항상 성립하는 것은 아니다.’가 있었다. 이와 같은 두 메타 전제는 형식불역의 원리와 무모순성의 원리를 메타 전제로 확장된 다의성을 갖는 지수 표현을 이해하는 데 적합한 일반화된 사고방식이었다. 그러나 이러한 메타 전제는 학습자가 중·고등학교와 대학교에 걸친 다수의 학습 과정에서 경험해보지 못한 새로운 메타 전제이기도 하다. 따라서 다의성을 갖는 지수 표현을 이해하기 위해서는 이에 적합한 새로운 메타 전제의 구축이 중요하다고 할 수 있다.

둘째, 편향된 다의적 개념 이미지를 보인 CCR 그룹, CRC 그룹, CRR 그룹에 속한 학생들은 다의성을 갖는 지수 개념을 이해하는 데 방해가 되는 메타 전제를 가졌다. 세 그룹에 속한 학생들은 공통적으로 ‘확장 전 영역에서 성립하는 성질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다.’라는 메타 전제를 가졌다. 이는 Kontorovich(2018b)에 소개된 Benny라는 학생이 제곱근 개념을 이해할 때 가졌던 메타 전제와 같은 것이다. CCR 그룹과 CRR 그룹에 속한 학생들은 ‘하나의 수학적 기호는 하나의 수학적 대상을 가리킨다.’를 메타 전제로 가졌다. 이는 학생들이 실수 지수를 포함한 과거 학습 과정에서 접한 대부분의 수학적 대상이 단가성을 갖는다는 점에 근거하여 구성된 메타 전제로 보인다. 그러나 다가성을 가지는 복소 지수에는 이러한 메타 전제가 적용되지 않는다. CRR 그룹에 속한 학생들은 ‘문제에 표현된 수가 속하는 가장 작은 수 집합이 무엇인지에 따라 수학적 표현의 의미를 이해하면 된다.’를 메타 전제로 가졌다. 이 메타 전제도 학생들이 과거 실수 영역에서 지수를 학습할 때는 성립했던 사고방식이지만 복소 지수에서는 성립하지 않는 일반화된 사고방식이다. 복소수 영역까지 확장된 지수의 경우 같은 수학적 표현이라도 문제 상황에

전제된 영역에 따라 그 의미가 달라지기 때문이다. 정리하자면, 편향된 다의적 개념 이미지를 보인 그룹에 속한 학생들이 가진 이러한 메타 전제는 실수 지수를 이해하는 데에는 성립하지만, 복소수 영역에서 다의성을 갖는 지수 표현을 이해하는데 더는 적용되지 않는 일반화된 사고방식이다.

이상을 종합하면, 다의성을 갖는 지수 개념을 통합된 방식으로 이해하기 위해서는 과거 학습 경험에서 유효했던 메타 전제가 아니라 다의성을 갖는 대상을 이해하는 데 필요한 새로운 메타 전제를 구축하는 것이 중요함을 알 수 있다. 다의성을 갖는 지수 개념에 대한 통합된 개념 이미지를 보인 CCC 그룹에 속한 학생들의 메타 전제가 새로운 메타 전제의 예로 볼 수 있다.

제 5 장 결론

제 1 절 요약

이 연구는 다의성을 갖는 지수 표현을 예비 교사가 어떻게 이해하는지를 다의적 관점에서 살펴보고자 하였다. 이를 위한 연구 질문은 다음과 같다.

지수 표현에 관한 예비 교사의 다의적 개념 이미지는 어떠한가?

이러한 연구 질문에 답하기 위하여 중·고등학교의 지식을 복소수 영역으로 확장하는 내용을 다루는 <복소해석학> 수업에서 연구가 수행되었다. 연구자는 2020학년도 1학기 <복소해석학> 수업의 교과 조교로 학생들의 과제와 학기말 시험 답안을 수집하고 채점하였기에 자료를 해석하기에 용이하였다.

학생들의 구두시험 답안을 분석하기 위해 학기말 고사에 출제된 문항 중 지수와 관련된 세 문항에 대한 녹음된 답안을 수집하였다. 답안의 내용을 바탕으로 복소수 영역에 기반한 답변과 실수 영역에 기반한 답변으로 나눈 뒤 코딩하여 학생들을 네 그룹(CCC 그룹, CCR 그룹, CRC 그룹, CRR 그룹)으로 분류하였다. Kontorovich(2018b)에 제시된 개념 이미지에 대한 다의적 관점을 분석틀로 다의성을 갖는 지수 표현에 대한 예비 교사의 이해를 분석하였다. 지수와 관련된 개념 이미지를 영역 특수 개념, 포괄적 개념으로 구분하여 특징을 관찰하였다. 또한, 영역 특수 개념과 포괄적 개념의 기저에 있는 일반화된 사고방식인 메타 전제를 도출하였다. 이를 통한 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 지수 표현의 다의성에 대한 예비 교사의 다의적 개념 이미지를

통합된 다의적 개념 이미지와 편향된 다의적 개념 이미지로 분류할 수 있었다. 편향된 다의적 개념 이미지는 실수 영역의 유리수 지수 편향된 다의적 개념 이미지, 실수해 편향된 다의적 개념 이미지, 그리고 앞선 두 가지 편향을 모두 가진 실수 편향된 다의적 개념 이미지로 세분화할 수 있었다. CCC 그룹은 통합된 다의적 개념 이미지를 갖고 있었다. 이 학생들은 교과서와 전공 교재에 서술된 지수 관련 내용과 일치하는 포괄적 개념과 영역 특수 개념을 가졌다. CCR 그룹은 실수 영역의 유리수 지수 정의에 편향된 다의적 개념 이미지를 갖고 있었다. 이 학생들은 복소 지수의 정의와 성질을 복소수 영역의 영역 특수 개념으로 갖고 있었지만, 실수 영역에서만 성립하는 유리수 지수의 정의와 성질을 실수 영역의 영역 특수 개념이 아니라 포괄적 개념에 위치시켰다. CRC 그룹은 유리수 지수가 실수 영역에서 방정식의 실수해에 관련된다는 사실에 편향된 다의적 개념 이미지를 갖고 있었다. 이 학생들은 복소 지수의 정의와 성질을 복소수 영역의 영역 특수 개념으로 갖고 있었지만, 유리수 지수 표현이 방정식의 실수해를 의미한다는 사실을 실수 영역의 영역 특수 개념이 아니라 포괄적 개념에 위치시켰다. CRR 그룹은 실수 편향된 다의적 개념 이미지를 가지고 있었다. 즉, CCR 그룹과 CRC 그룹에 속한 학생들이 보인 편향을 모두 보였다. 이 학생들은 복소 지수의 정의를 알고 있었지만, 실수 영역에서만 성립하는 유리수 지수의 정의와 성질 및 방정식의 실수해와의 연관성을 실수 영역의 영역 특수 개념이 아니라 포괄적 개념에 위치시켰다.

둘째, 지수 표현에 관한 서로 다른 개념 이미지 구성의 기저에는 메타 전제가 있었다. 통합된 개념 이미지를 가진 CCC 그룹에 속한 학생들은 '문제에 표현된 수가 속하는 수 집합이 무엇인지와 관계없이 문제가 전제하는 수 집합에서 수학적 기호의 의미를 이해해야 한다.'와 '확장 전 영역에서 성립하는 성질이 확장 후 영역에서도 항상 성립하는 것은 아니다.'와 같은 메타 전제를 가졌다. 이는 다의성을 갖는 지수 표현을 이해하는 데 적합한 일반화된 사고방식이다. 이와 달리 편향된 개념 이미지를 가진 CCR 그룹, CRC 그룹, CCR 그룹에 속하는 학생들은 '확장 전

영역에서 성립하는 성질은 확장 후 영역에서도 항상 성립한다.', '하나의 수학적 기호는 하나의 수학적 대상을 가리킨다.', '문제에 표현된 수가 속하는 가장 작은 수 집합이 무엇인지에 따라 수학적 표현의 의미를 이해하면 된다.'와 같은 메타 전제를 가졌다. 이는 실수 지수까지의 학습 과정에서는 적용되는 일반화된 사고방식이지만, 복소 지수에서는 더는 적용되지 않는 일반화된 사고방식이다.

이 연구는 설문지를 통해 학생들의 개념 이미지를 탐구한 선행 연구와는 달리(예를 들어, Biza, 2021; Kontorovich, 2018a), 연구 참여자에게 생각을 논리적으로 표현하도록 권장하는 구두시험의 환경에서 얻은 자료를 바탕으로 개념 이미지를 분석하였다. 이를 통해 지수에 대한 예비 교사의 개념 이미지를 자세히 분석할 수 있었다. 이 연구의 의의는 다음과 같다.

첫째, 이 연구는 지수 표현을 중심으로 학습자가 중·고등학교에서 대학교로의 수학 학습의 전이 과정에서 경험하는 단절 현상을 분석하였다. 즉, Klein(1903/1939)이 제안한 이중 단절 중 일차 단절을 다의성을 갖는 지수 표현과 관련하여 분석한 것이다. 지수 표현에 관련된 선행 연구는 일차 단절 현상에 주목하기보다는 주로 고등학교 학교급으로 한정하여 연구를 진행하였다(예를 들어, 신보미, 2021; 최영기, 2000; Choi & Do, 2005). 그러나 지수 표현은 중·고등학교와 대학교에 걸쳐 장기간 다뤄지며 의미가 확장되며 변하는 대상이므로 장기적 관점의 분석이 필요하다. 이를 위하여 이 연구는 접선 개념과 제곱근 개념을 장기적 관점에서 분석한 선행 연구를 지수 개념에 관한 연구로 확장하였다(Biza, 2021; Kontorovich, 2018a). 지수 표현과 관련된 일차 단절 현상은 실수 영역의 유리수 지수 편향된 다의적 개념 이미지, 실수해 편향된 다의적 개념 이미지 그리고 앞선 두 가지의 편향을 모두 가진 실수 편향된 다의적 개념 이미지로 나타났다. 이러한 편향된 다의적 개념 이미지의 분류는 학생들의 이해를 파악하고 이에 적합한 교수·학습을 설계하는 데에 활용될 수 있을 것이다.

둘째, 이 연구는 지수 표현에 관한 개념 이미지 구성의 기저에 있는 메

타 전제를 분석하였다. 개념 이미지의 특징을 개념 정의와의 차이를 중심으로 분석한 개념 이미지 관련 선행 연구에서 더 나아가, 이 연구는 메타 전제를 분석함으로써 지수 표현과 관련된 개념 이미지 구성의 원인을 설명하였다(Kontorovich, 2018b). 편향된 개념 이미지를 가진 학생들의 메타 전제는 실수 지수 학습 과정에는 적합한 사고방식이지만 복소 지수를 학습하는 과정에는 적합하지 않은 사고방식이었다. 이 연구에서 분석된 메타 전제는 지수 표현과 관련하여 학습자가 겪는 일차 단절을 해결하는 데 도움이 되는 수업을 설계하는 데에 아이디어를 제공할 수 있다. 메타 전제는 수학 개념에 대한 이해의 기저에 있는 일반화된 사고방식으로 학생들이 가지고 있는 오개념의 원인을 파악하고 자신의 실수를 깨닫게 하는 잠재력이 있기 때문이다(Kontorovich, 2018b). 특히 이 연구에서는 고등학교에서 학습한 실수 영역에 편향된 개념 이미지를 가진 학생들의 사고의 기저에 있는 메타 전제를 도출하였다. 도출된 메타 전제를 명시적으로 활용하는 교수 상황을 설계한다면, 편향된 개념 이미지를 통합된 개념 이미지로 발전시키는 데 도움이 될 것이다.

제 2 절 연구의 한계 및 제언

이 연구는 다의적 개념 이미지 분석틀을 통하여 지수 표현과 관련하여 학습자가 중·고등학교에서 대학교로의 수학 학습의 전이 과정에서 경험하는 일차 단절의 원인을 분석하였다. 특히 단절의 원인을 메타 전제를 중심으로 살펴보았다. 이는 지수 표현과 관련하여 예비 교사가 경험하는 이중 단절 현상을 깊이 이해하기 위함이다. 그렇지만, 이 연구는 일차 단절 현상의 원인에만 초점을 두었기 때문에, 편향된 개념 이미지를 가진 학습자가 일차 단절 현상을 극복하고 통합된 개념 이미지를 구성하는 과정은 분석하지 못하였다는 한계가 있다. 또한, 지수 표현과 관련하여 예비 교사가 대학교에서 중·고등학교로의 전이 과정에서 경험하는 이차 단절 현상을 분석하지 못하였다는 한계가 있다. 이에 따른 교수학적 방법

및 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 지수 표현과 관련하여 예비 교사가 경험하는 일차 단절을 해결하는 데 도움을 주는 수업 설계를 생각할 수 있다. 이 연구는 지수 표현을 중심으로 예비 교사가 중·고등학교에서 대학교로의 전이 과정에서 겪는 일차 단절의 원인을 분석하였다. 이로부터 도출된 지수 학습에 관련된 각 다의적 개념 이미지의 메타 전제를 활용하여 복소해석학 수업에서 일차 단절을 해결하는 데 도움을 주는 수업을 설계할 수 있다. 구체적으로 새로운 영역에 적합하지 않은 메타 전제를 드러내어 해체하도록 학습자를 돕는 교수 설계가 필요하다. 메타 전제는 학습자에게 통합된 수학 개념과 다른 이해의 원인을 스스로 파악할 수 있도록 하는 행동 유도성을 갖는다(Kontorovich, 2018b). 그렇지만, 이를 현실화하기 위해서는 다의성을 갖는 개념을 이해하는 맥락에서 학습자가 가진 부적절한 메타 전제를 명시적으로 드러내어 해체하고 적절한 메타 전제를 재구성하도록 하는 학습 경험이 필요하다. 이러한 학습 경험은 학습자가 지수 개념에 관한 구획되고 종합적인 다의적 개념 이미지를 구성하도록 하는 기회를 줄 수 있을 것이다(Vosniadou, 2014).

둘째, 지수 표현과 관련하여 예비 교사가 경험하는 이차 단절을 유연하게 하는 데 도움이 되는 교수 실험을 생각할 수 있다. 이를 위하여 중학교 혹은 고등학교에서 이뤄지는 교수 상황에서 출발하여 대학 수학을 학습하고 이후 다시 중학교 혹은 고등학교 교수 상황으로 내려가는 교수·학습 모델을 활용하는 교수 실험을 설계할 수 있다(Wasserman et. al., 2017; Weber et. al., 2020). 학교 수학과 학문 수학을 넘나드는 교수 실험을 통해 실수 영역과 복소수 영역에서의 지수 표현에 대한 예비 교사의 다의적 개념 이미지를 발전시키는 기회를 제공할 수 있을 것이다. 또한, 실제 교수·학습 과정에서 메타 전제의 역할과 잠재력을 확인할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

류희찬, 선우하식, 신보미, 정동승, 장영훈, 설정수, 박슬히(2020a). **중학교 수학 1**. 천재교과서.

류희찬, 선우하식, 신보미, 정동승, 장영훈, 설정수, 박슬히(2020b). **중학교 수학 2**. 천재교과서.

류희찬, 조완영, 이정례, 선우하식, 이진호, 손홍찬, 신보미, 조정묵, 이병만, 김용식, 임미선, 선미향, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 김명수, 정성윤(2019a). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: ㈜천재교육.

류희찬, 조완영, 이정례, 선우하식, 이진호, 손홍찬, 신보미, 조정묵, 이병만, 김용식, 임미선, 선미향, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 김명수, 정성윤(2019b). **고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서**. 서울: ㈜천재교육.

도종훈, 박윤범(2011). 고등학교 수학 교과서에 제시된 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의에 관한 소고. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>**, **50**(1), 61-67.

이승우 (2002). 형식불역의 원리에 관한 소고. **학교수학**, **4**(3), 463-481.

이승우 (2021). 지수의 범위를 정수에서 유리수로 확장할 때 교과서 기술에 나타나는 논리적 비약에 대한 분석: 2015 개정 교육과정에 따른 수학Ⅰ 교과서를 중심으로. **학교수학**, **23**(2), 235-249.

이준열, 최부림, 김동재, 한대희, 정용주, 장희숙, 조석연, 조성철, 황선미, 박성훈(2019a). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: ㈜천재교육.

이준열, 최부림, 김동재, 한대희, 정용주, 장희숙, 조석연, 조성철, 황선미, 박성훈(2019b). **고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서**. 서울: ㈜천재교육.

신보미 (2021). 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해 분석. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>**, **60**(1), 21-39.

최영기 (2000). $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류 해석. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>**, **39**(2), 145-150.

Alcock, L., & Simpson, A. (2011). Classifiation and concept consistency. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(2), 91 - 106.

Alcock, L., & Simpson, A. (2017). Interactions between defining, explaining and classifying: The case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 5 - 19.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218 - 229.

Biza, I. (2021). The discursive footprint of learning across mathematical domains : The case of the tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 1 - 12.

Choi, Y., & Do, J. (2005). Equality Involved in 0.999... And $(-8)^{1/3}$. *For the Learning of Mathematics*. *25*(3), 13-15.

Durkin, K., & Shire, B. (1991). Lexical ambiguity in mathematical contexts. In K. Durkin & B. Shire (Eds), *Language in mathematical education: Research and Practice* (pp. 71-84). Milton Keynes: Open University Press.

Even, R., & Tirosh, D. (1995). 'Subject-matter knowledge and knowledge about students as source of teacher presentations of the subject matter', *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 1-20.

Eves, H. (1990, sixth edition). *An introduction to history of mathematics*, Orlando, FL, Holt, Rinehart and Winston.

Klein, F. (1908/1939). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Part I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Part II: Geometry.* (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). New York: Dover Publications.

Goel, S., & Robillard, M. (1997). 'The equation $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=2$', *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 319-320.

Kahneman D., Slovic P., and Tversky, A. (1982) *Judgment Under*

Uncertainty: Heuristics and Biases. New York: Cambridge University Press.

Kontorovich, I. (2018a). Undergraduates' images of the root concept in $\mathbb{R}$ and in $\mathbb{C}$. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 184–193.

Kontorovich, I. (2018b). Why Johnny struggles when familiar concepts are taken to a new mathematical domain: Towards a polysemous approach. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 5–20.

Kontorovich, I. (2016). The answer depends on your lecturer. *Research in Mathematics Education*, *18*(3), 283–298.

Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(2), 209–219.

Mamolo, A. (2010). Polysemy of symbols: Signs of ambiguity. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(2), 247–262.

Naftaliev, E., & Hershkowitz, R. (2021). Construction of a geometrical concept within a dialectical learning environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *64*, 100913.

Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2006). *Complex Variables*, Birkhäuser Boston.

Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science* (Third Ed.). Prentice Hall.

Sangwin, C. J. (2019). Textbook accounts of the rules of indices with rational exponents. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(8), 1191–1209.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teacing. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically:*

Exploring the Three Worlds of Mathematics. Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept dfinition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151 - 169.

Tirosh, D., & Even, R. (1997). 'To define or not to define: the case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$, *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 321-330.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 356-366.

Wawro, M., Sweeney, G., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 1-19.

Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Villanueva, M., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2017). Making Real Analysis Relevant to Secondary Teachers: Building Up from and Stepping Down to Practice. *PRIMUS*, *27*(6), 559 - 578.

Weber, K., Mejía-Ramos, J. P., Fukawa-Connelly, T., & Wasserman, N. (2020). Connecting the learning of advanced mathematics with the teaching of secondary mathematics: Inverse functions, domain restrictions, and the arcsine function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *57*, 100752.

Woo, J. H. & Yim, J. H. (2008). Revisiting 0.999... and $(-8)^{1/3}$ in school Mathematics from the perspective of the algebraic permanence principle. *For the Learning of Mathematics*, *28*(2), 11-16.

Zandieh, M., Ellis, J., & Rasmussen, C. (2017). A characterization of a unified notion of mathematical function: The case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 21 - 38.

Zazkis, R. (1998). Divisors and quotients: Acknowledging polysemy. *For the Learning of Mathematics*, *18*(3), 27-30.

Abstract

Analysis of Pre-service Teachers' Understanding of the Exponential Expression: Focusing on a Polysemous Approach

Kyeonjun Kim

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

The concept of exponentiation is covered in the curricula of middle school, high school, and university education. In middle school, exponential expression is introduced through the concept of repeated multiplication, and in high school, it is extended to include real exponents. In university, the concept is further expanded to encompass complex exponents within the discipline of Complex Analysis. When the concept of exponentiation is extended from real numbers to complex numbers, some of the properties that held true

for real exponents undergo a change in meaning. This leads to a multiplicity of interpretations within the domain of exponential notation. It is a product of efforts to maximize the usefulness of results and minimize potential inconsistencies based on the principles of formal invariance and non-contradiction. Consequently, even a single exponential expression can have different interpretations depending on whether the considered domain is real or complex. From this perspective, exponential expression is understood as a concept with multifaceted interpretations for learners studying university-level mathematics.

To examine pre-service teachers' understanding of exponential expression, we analyzed their concept images of exponential expression from a polysemous approach. To do this, we collected oral exam responses from students who had taken a Complex Analysis course at a teacher education college. From the pre-service teachers' answers, we derived domain-specific conceptions, overarching conceptions, and meta-premises. Based on this information, we analyzed the characteristics of group-specific polysemous concept images of exponential expressions. The research findings are as follows:

First, pre-service teachers' polysemous concept images of exponential expression can be categorized into unified polysemous concept image (CCC group) and biased polysemous concept image (CCR group, CRC group, CRR group). Biased polysemous concept image can be further divided into biased polysemous concept image of rational exponents in the real number domain (CCR group), biased polysemous concept image influenced by real roots (CRC group), and biased polysemous concept image influenced by real numbers (CRR group). Students belonging to the groups other than CCC group mistakenly placed domain-specific conceptions into overarching conceptions. These students regarded exponential expressions in the complex number domain as a single-object phenomenon or mistakenly applied prior knowledge that only holds in the real number domain. Furthermore, they sometimes misunderstood the concept of rational exponentiation with a negative base, which is undefined in the real number domain, through the domain-specific conception that only holds in the complex number domain.

Second, the formation of different concept images regarding exponential expression was due to differences in meta-premises. Students in the CCC group, who had unified polysemous concept image, possessed a meta-premises such as "properties that hold in the pre-extension domain do not necessarily hold in the post-extension domain." This generalized way of thinking is suitable for understanding exponential expression with polysemy. In contrast, students in the CCR, CRC, and CRR groups with biased concept images held a meta-premises such as "Properties that hold in the pre-extension domain always hold in the post-extension domain." This is a generalized way of thinking that applies in the learning process up to real exponents but is no longer applicable in the complex exponentiation domain.

This study is significant in presenting a polysemous approach to understanding how learners comprehend mathematical concepts with polysemy, which are studied over an extended period. Specifically flexible understanding of polysemous mathematical concepts by prospective teachers is essential for grasping the essence of mathematical content in school and for dealing with various teaching situations. Therefore this research can provide ideas for teaching exponentiation in school mathematics in the future and offer implications for the education of prospective teachers in Complex Analysis.

keywords : concept image, exponential expression, polysemous approach, meta-premise, complex analysis
Student Number : 2019-23685