교육학석사 학위논문

직선, 선분, 반직선에 대한
두 관점과 점의 특성에 관한 연구

2023년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

정 순 원

직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성에 관한 연구

지도교수 최 영 기

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함
2023년 8월

서울대학교 대학원
수학교육과
정 순 원

정순원의 석사 학위논문을 인준함
2023년 8월

위 원 장 권 오 남 (인)

부위원장 최 영 기 (인)

위 원 유 연 주 (인)

국문초록

본 연구의 목적은 직선, 선분, 반직선을 바라보는 서로 다른 관점과 각 관점에서 점이 갖는 특성을 도출하고 이를 통해 학교 기하 교육에의 시사점을 찾는 것이다. 연구 방법은 문헌 분석 및 고찰이며 연구 대상은 대표적인 기하학 저서인 유클리드『원론』과 힐베르트의 『Foundations of Geometry』, 그리고 '경계(boundary)'와 '사이성(betweenness)'에 대한 문헌 및 자료이다. 문헌 분석 및 고찰을 통해 도출된 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성은 다음과 같다.

'자연 연속체' 관점에서 직선, 선분, 반직선은 점이 모여서 구성된 것이 아니며 내재적으로 연속적인 선들인데 이러한 선을 분할하는 도구가 바로 점이다. 예를 들어 선분을 한 점으로 분할하면 두 개의 선분으로 나뉘어지며 두 선분의 분할된 지점에는 각각 점이 존재한다. 이렇게 점이 선을 분할하는 도구이거나 분할의 결과로서 선의 끝에 존재하는 것으로 생각할 때 점은 '경계적 특성'을 갖는다고 한다. 반면, '점의 집합' 관점에서 직선, 선분, 반직선은 점이 무수히 많이 모여 구성된 것으로 점들이 모이는 규칙이나 관계가 필요하다. 예를 들어, '두 점 사이에 한 점이 있다'와 같이 선 위에서 세 점 사이의 순서 관계를 통해 점의 존재성이 보장되고 배열 방식이 구체화될 수 있다. 이렇게 다른 두 점과의 규칙이나 관계에 의해 한 점의 존재성과 위치가 결정되는 경우에 점은 '사이적 특성'을 갖는다고 한다. 이러한 관점에서 직선, 선분, 반직선은 사이적 특성을 갖는 점들의 집합이다.

이어서 직선, 선분, 반직선에 대한 관점과 점의 특성을 바탕으로 초등학교와 중학교 기하 교과서에 대한 분석을 실시하였다. 그 결

과, 초등 교과서에서는 ‘자연 연속체’ 관점이 우세하며 중등 교과서에서는 ‘자연 연속체’ 관점과 더불어 ‘점의 집합’ 관점이 시작되는 것을 확인하였다. 또한, 초등 교과서에서 학습하는 점 중 다수를 차지하는 ‘∼의 꼭짓점’은 경계적 특성을 갖는 점으로 볼 수 있다. 분석 결과를 통해 초등 교과서에서는 ‘자연 연속체’ 관점과 경계적 특성을 갖는 점에 대한 강조가 이루어져야 한다고 판단하였으며, 이를 바탕으로 초등 검정 교과서의 구성에 있어 다음과 같은 시사점을 제시하였다. 첫째, 경계적 특성을 갖는 점을 가리키는 용어를 도입하여야 한다. 둘째, 직선, 선분, 반직선 중 양 끝에 경계적 특성을 갖는 점들이 있는 선분을 먼저 학습하여야 한다. 셋째, 경계적 특성을 갖는 점을 기준으로 직선, 선분, 반직선을 구분하고 관계를 파악하여 보는 학습 기회를 제공해야 한다.

본 연구의 결과인 직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점과 점의 특성은 학교 기하 교육에서 선과 점을 바라보는 새로운 안목이 될 수 있다는 점에서 의의가 있다. 하지만 본 연구가 이론적인 연구이므로 학생들의 실제적인 인지 수준이 고려되지 않았다는 점과 학교 기하 교육의 모든 점들에 대해 특성을 분석하지 않았다는 점, 사이적 특성에 대한 시사점을 제시하지 않은 점은 본 연구의 명백한 한계라 할 수 있다. 이러한 한계를 극복하고 본 연구의 내용이 폭넓고 의미있는 시사점을 제공하기 위해서는 더 깊은 이론적 연구와 실증적 연구가 함께 필요할 것이다. 부족하지만 본 연구가 후속 연구의 참고 자료로서 기능할 수 있기를 기대한다.

주요어 : 직선, 선분, 반직선, 자연 연속체 관점, 점의 집합 관점,
점의 경계적 특성, 점의 사이적 특성
학 번 : 2021-25636

목 차

제 1 장 서론 ······ 1

제 1 절 연구의 목적 및 필요성 ······ 1

제 2 절 연구 문제 ······ 3

제 2 장 이론적 배경 및 연구 방법 ······ 5

제 1 절 이론적 배경 ······ 5

1. 플라톤주의와 형식주의 ······ 5

2. 실질적 공리체계와 형식적 공리체계 ······ 8

3. '자연 연속체'와 '점의 집합' ······ 11

제 2 절 연구 방법 ······ 16

제 3 장 기하학 공리계 고찰 ······ 18

제 1 절 유클리드『원론』 ······ 18

1. 직선, 선분, 반직선 ······ 18

2. 점, 선의 정의 및 관계 ······ 21

3. 끝, 둘레, 둘러싸이다 ······ 26

제 2 절 힐베르트의『Foundations of Geometry』 ······ 29

1. 직선, 선분, 반직선 ······ 29

2. 무정의 용어인 점과 선 ······ 30

3. 점과 선의 관계 ······ 31

제 4 장 관점의 도출을 위한 논의 ······ 37

제 1 절 경계와 사이성 ······ 37

1. 경계에 대한 논의 ······ 38

1.1. 아리스토텔레스의 담론 ······ 38

1.2. 컨테이너 스키마 ······ 40
2. 사이성에 대한 논의 ······ 42
2.1. 『원론』의 결합과 사이성 ······ 42
2.2. 사이성에 대한 연구 ······ 46
2.3. 직선, 선분, 반직선의 정의 ······ 49
제 2 절 선에 대한 관점과 점의 특성 ······ 50

제 5 장 교과서 분석 ······ 52
제 1 절 선에 대한 관점 ······ 52
1. 분석 대상 ······ 52
2. 초등 교과서 분석 ······ 53
3. 중등 교과서 분석 ······ 59
제 2 절 점의 특성 ······ 65
제 3 절 학교수학에의 시사점 ······ 70

제 6 장 결론 ······ 75
제 1 절 요약 및 시사점 ······ 75
제 2 절 한계 및 제언 ······ 76

참고 문헌 ······ 78
Abstract ······ 86

표 목 차

<표 Ⅱ-1> 연구 설계 ······ 17
<표 Ⅲ-1>『원론』에서 점, 선의 정의 및 관계 (Heath, 1956; 이무현, 2018) ······ 21
<표 Ⅲ-2> ‘끝, 둘레, 둘러싸이다’가 등장하는 정의 (Heath, 1956; 이무현, 2018) ······ 27
<표 Ⅲ-3> 결합 공리 1, 2, 3 (Hilbert, 1971) ······ 32
<표 Ⅲ-4> 순서 공리 1, 2, 3 (Hilbert, 1971) ······ 34
<표 Ⅴ-1> 교과서 분석 대상 ······ 53
<표 Ⅴ-2> 초등 검정 교과서에서 직선, 선분, 반직선 학습 전 도입 활동 ······ 56
<표 Ⅴ-3> 중등 교과서에서 직선, 선분, 반직선 학습 전 도입 활동 ······ 59
<표 Ⅴ-4> 중등 교과서 7종에서 선에 대한 관점 ······ 62
<표 Ⅴ-5> 초등 교과서에서 학습하는 점 ······ 66
<표 Ⅴ-6> 초등에서 꼭짓점의 종류와 정의 ······ 66
<표 Ⅴ-7> 학습 순서가 다른 교과서에서 직선의 정의 ······ 72

그 림 목 차

[그림 Ⅲ-1]『광학』의 첫 번째 그림 (Burton, 1945, p. 357) ······· 19
[그림 Ⅲ-2]『Foundations of Geometry』에서 반직선 (Hilbert, 1971, p. 8) ······· 30
[그림 Ⅲ-3] 결합 기하학을 만족하는 모델 (Hartshorne, 2000, p. 67) ······· 33
[그림 Ⅲ-4] 순서 공리 1 (Hilbert, 1971, p. 5) ······· 34
[그림 Ⅲ-5] 순서 공리 2 (Hilbert, 1971, p. 5) ······· 35
[그림 Ⅲ-6] 순서 공리 2 (Greenberg, 1993, p. 74) ······· 36
[그림 Ⅲ-7] 원 위에 세 점이 존재하는 경우 (Greenberg, 1993, p. 74) ······· 36
[그림 Ⅳ-1] 컨테이너 스키마 (Lakoff & Núñez, 2000, p. 32) ······· 41
[그림 Ⅳ-2]『원론』1권의 명제 10 (Greenberg, 1993) ······· 43
[그림 Ⅳ-3] 점 D가 점 A와 점 B 사이에 있지 않은 경우 (Greenberg, 1993, p. 73) ······· 44
[그림 Ⅳ-4]『원론』1권의 명제 7 (Hartshorne, 2000) ······· 45
[그림 Ⅴ-1] 입체도형과 평면도형의 학습(1학년) ······· 54
[그림 Ⅴ-2] 삼각형의 학습(2학년) ······· 54
[그림 Ⅴ-3] 구체물을 이용한 학습(2학년) ······· 55
[그림 Ⅴ-4] 중등 ㄷ2 교과서에서 직선, 선분, 반직선의 학습 ······· 63
[그림 Ⅴ-5] 정비례 관계와 점들의 집합으로서의 선 ······· 64
[그림 Ⅴ-6] 점대칭도형과 대칭의 중심 ······· 68
[그림 Ⅴ-7] 대칭의 중심에 대해 파악하는 활동 (p. 67) ······· 69
[그림 Ⅴ-8] 국내 교과서와 외국 교과서 비교 ······· 71
[그림 Ⅴ-9] 세 선의 비교에서 ‘끝’에 주목하는 발문 ······· 73

제 1 장 서론

제 1 절 연구의 목적 및 필요성

본 연구의 목적은 직선, 선분, 반직선을 바라보는 서로 다른 관점을 도출하는 것이다. 이러한 연구 목적을 설정한 배경은 다음과 같다. 선은 점, 면과 함께 기하학적 대상을 구성하는 기본 요소이며 특히 직선, 선분, 반직선은 각각 다각형, 수직선, 각을 정의하는 데에 사용된다. 또한, 학교수학에서 '점'과 '선'이 무정의 용어임을 고려할 때 직선, 선분, 반직선의 정의에 대한 학습은 실질적인 기하 교육의 시작점이라고 할 수 있다. 그런데 2022년 3월부터 도입된 초등학교 3학년 검정 교과서 10종에서는 직선, 선분, 반직선을 서로 다른 순서와 방법으로 학습하고 있었다[1]. 기존의 국정 교과서에서 검정 교과서로의 전환은 직선, 선분, 반직선 개념에 대해 다음과 같은 교육적 질문을 유발한다. '직선, 선분, 반직선은 학생들에게 어떻게 지도되어야 하는가?' 교수학습 방법에 대한 이 일반적이고 광범위한 질문으로부터 연구가 시작되었다.

수학을 어떻게 지도할 것인가에 대한 논의는 수학의 본질을 어떻게 보는가에 따라 달라진다(우정호, 민세영, 2002). 마찬가지로 어떤 개념의 지도 방법은 그 개념의 본질을 바라보는 관점과 무관할 수 없다. 이 경우 개념의 본질은 기하학의 역사에서 직선, 선분, 반직선이 어떻게 정의되고 인식되었는가에 대한 것이다. 하지만 이에 대한 선행 연구는 미비하다. Lakoff & Núñez(2000)는 점으로부터 선을 개념화하는 세 가지 관점을 유형화하였

1) 교육부(2019)의 <교과용도서 다양화 및 자유발행제 추진 계획>에 따라 2015 개정 교육과정의 초등 수학 교과서가 기존의 국정 교과서에서 검정 교과서로 단계적으로 전환되었다. 직선, 선분, 반직선은 3학년 1학기 <평면도형> 단원에서 한 차시에 학습하는 개념으로 검정 교과서마다 내용 전개 방식이 달랐다. 학습 순서와 관련해서는 선분부터 학습하는 교과서와 직선부터 학습하는 교과서가 있으며, 학습 방법과 관련해서는 개념을 정의하기 전에 작도를 수행하는지, 다른 선과의 차이점을 비교하는지의 여부 등에서 차이가 있었다. 또한, 개념의 정의 자체가 다른 교과서도 있었는데 이러한 차이는 '교과서의 다양화 및 자율화 확보'라는 검정 교과서 전환의 의도라고 볼 수도 있지만, 한편으로는 교과서 간, 학년 및 학교급 간 연계성에 부정적 영향을 미칠 것이라는 우려도 있다(한채린, 임웅, 2022).

으며 이상은(2016)은 이를 바탕으로 중등 교과서에서 선에 대한 표현을 분석하였는데 이것은 일반적인 선에 대한 논의이다. 이규희(2021)는 선분의 길이를 측도론과 집합론을 이용하여 분석하였고 도종훈(2008)은 직선의 곧은 성질인 직선성(直線性)이 좌표평면에서 대수적으로 어떻게 다루어지는지 분석하였는데 이것은 선을 기하학의 시작점에서 바라보고자 하는 본 연구의 목적과는 거리가 멀다. 또한, 직선, 선분, 반직선 모두를 종합적으로 다루는 연구는 찾기 힘들다.

그렇다면 기하학의 기본 요소인 직선, 선분, 반직선의 개념 및 정의에 대한 이론적 연구는 왜 미비한 것인가? 그 이유는 다음 두 가지 측면에서 생각할 수 있다. 첫째, 이 개념들이 너무 직관적이고 쉬우므로 연구의 필요성을 느끼지 못할 수 있다. 직선, 선분, 반직선은 학생들의 학습하기 어려운 개념이 아니며 혹시 어려움이 존재하더라도 인지 수준이 성숙해지면 자연스럽게 해결될 것으로 예상할 수 있다. 하지만 Moravcová & Hromadová(2020)의 연구에 따르면 유한한 길이의 선으로 표현되는 직선은 학생들에게 혼란을 일으킬 수 있다. 이 연구에 따르면 직선을 의미하는 선이 양 옆으로 계속 이어진다는 것을 인식하는 초등학생은 연구 참여자의 절반을 넘지 않았다[2]. 또한, Jirotková & Littler(2003)은 학생들이 직선의 무한성을 서로 다른 방식으로 표현한다고 하였다. 일상 생활에 기반한 학생들의 인지 구조는 유한에 머물러 있으며, 아동기에 형성된 무한에 대한 직관은 그 이후에 크게 변하지 않는다(Fischbein, Tiroshi & Hess, 1979). 또한, 무한에 대한 이해는 맥락 의존적이라는 점(Monaghan, 2001)은 직선, 선분, 반직선의 교수학습이 신중하게 이루어져야 함을 의미한다.

둘째, 직선, 선분, 반직선에 대한 이론적 연구가 과연 어떤 시사점을 줄 수 있는가 하는 의문이 존재할 수 있다. 이에 대해서는 각(角)에 대한 연구가 하나의 예시가 된다. 초등 수학에서 직선, 선분, 반직선의 바로 다음 차시에 학습하는 '각'은 '두 반직선이 만나서 생기는 도형'으로 개념 자체는 간단하지만, 각에 대한 연구[3]는 비교적 풍부하며 기하 교육에 여러 시사점을 제공한다.

2) 이와 관련하여 백대현(2010)은 초등 수학 교과서에서 직선을 선분과 구분하기 위해 직선의 양 끝을 화살표로 나타낼 것을 제안한 바 있다.

3) 각에 대한 이론적 연구로는 역사적, 수학적 분석(이종희, 2001)과 우리나라 교과서 및

그 이유로는 각이 갖는 다면성, 즉 각을 바라보는 관점이 다양한 것을 꼽을 수 있는데[4], 크게는 각을 '한 점을 공유하는 고정된 두 반직선'으로 보는 정적인(static) 관점과 '한 반직선을 기준으로 다른 반직선이 회전한 결과'로 보는 동적인(dynamic) 관점이 존재한다. 박교식(2015), Kontorovich & Zazkis(2016), 김수미, 허혜자(2022)의 연구에서는 모두 각의 다양한 관점과 관련하여 교육적 시사점을 도출하였다. 각에 대한 이런 연구들은 과연 직선, 선분, 반직선에는 그것들을 바라보는 어떠한 관점과 교육적 시사점이 존재하는지에 대한 궁금증을 불러일으켰고 이는 연구 목적으로 이어졌다.

서두에서 밝힌 바와 같이, 본 연구의 목적은 직선, 선분, 반직선을 바라보는 서로 다른 관점을 도출하는 것이다. 그런데 점은 선의 구성 요소이거나 선 위에 놓일 수 있는 개체이기 때문에 선을 바라보는 관점에 있어 점은 고려하지 않을 수 없는 요소이다. 따라서 선에 대한 관점과 더불어 각 관점에서 두드러지는 점의 특성이 무엇인지 분석하고 이를 통해 학교수학에의 시사점을 얻고자 한다. 여기서 학교수학이라 함은 초등 수학의 기하 영역을 중점으로 하되 필요한 경우 중등 수학을 포함한다. 즉, 초등과 중등에서 직선, 선분, 반직선을 바라보는 관점이 어떠하며 점이 어떠한 특성을 갖는지 고찰하여 초중등 기하 학습의 차이점을 확인하고 초등 검정 교과서의 직선, 선분, 반직선의 학습에 시사점을 도출하고자 한다.

제 2 절 연구 문제

연구의 목적을 달성하기 위한 연구 문제는 구체적으로 다음과 같다.

첫째, 유클리드와 힐베르트의 기하학 공리계에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 정의되는가? 만약 정의되지 않는다면 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 기반이 될 수 있는 정의나 공리는 무엇인가?

교육과정 분석(박교식, 2015; 김상미, 2018; 김수미, 허혜자, 2022) 등이 있다.

4) 한 예로 Shreves(1969)는 각의 본질을 회전량, 모양, 두 선의 기울기로 정리하였고, Freudenthal(1973)은 각을 초등기하학적 관점, 삼각법 관점, 해석기하학적 관점, 공간 기하에서의 관점으로 분류하였다.

둘째, 경계(boundary)와 사이성(betweenness)에 대한 역사적, 수학적, 철학적 논의를 바탕으로 선을 '자연 연속체'와 '점의 집합'으로 보는 두 관점에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 개념화되는가? 각 관점에서 점이 갖는 특성은 무엇인가?

셋째, 직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점과 점이 갖는 특성들은 학교 기하 교육에 어떠한 시사점을 줄 수 있는가?

제 2 장에서는 먼저 이론적 배경을 검토한다. 수학적 대상의 존재성에 대해 상반된 관점을 지닌 플라톤주의와 형식주의에 대해 살펴보고 공리계의 두 체계인 실질적 공리체계와 형식적 공리체계를 알아본다. 또한, 선을 개념화하고 인식하는 두 가지 은유 방식인 '자연 연속체'와 '점의 집합'을 Lakoff & Núñez(2000)의 논의를 중심으로 살펴본다. 이론적 배경을 살펴본 후에는 연구 대상과 방법을 설정한다.

제 3 장에서는 유클리드 『원론』과 힐베르트의 『Foundations of Geometry』에서 제시된 기하학 공리계를 고찰하여 첫 번째 연구 문제에 답하고자 한다. 각 공리계에서 일반적인 선과 직선, 선분, 반직선이 어떻게 정의되고 점과의 관계가 어떠한지 살펴본다. 만약 직선, 선분, 반직선이 공리계 내에서 정의된다면 정의에 사용되는 공리나 다른 정의와의 관련성을 살펴보고, 정의되지 않는다면 어떠한 공리나 정의가 직선, 선분, 반직선의 개념화에 도움이 될 수 있는지 고찰한다.

제 4 장에서는 두 번째 연구 문제에 답하며 직선, 선분, 반직선을 바라보는 관점을 도출하고자 한다. 첫 번째 연구 문제의 답에 대한 핵심어인 경계(boundary)와 사이성(betweenness)에 대한 역사적, 수학적, 철학적인 논의가 무엇이 있는지 살펴보고 이 두 요소를 바탕으로 직선, 선분, 반직선을 이해하는 관점을 명료화한다. 또한, 각 관점에서 점이 갖는 특성이 무엇인지 밝히고자 한다.

제 5 장에서는 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성이 학교 기하 교육에 어떠한 시사점을 줄 수 있는지 확인하여 세 번째 연구 문제에 답하고자 한다. 마지막으로 제 6 장에서는 지금까지의 논의를 요약하고자 한다.

제 2 장 이론적 배경 및 연구 방법

제 1 절 이론적 배경

선은 무엇인가? 점은 선과 어떠한 관계를 갖는가? 수학에서 점과 선만큼 심오한 개념은 없다(Lakoff & Núñez, 2000, p. 259). 선은 일상적으로도 사용되므로 누구에게나 친숙한 용어이지만, 기하학적 대상인 선을 어떻게 정의해야 하는지에 대해 답하기는 쉽지 않다. 이 장에서는 선을 이해하는 데에 바탕이 될 수 있는 이론적 배경을 고찰한다. 먼저, 수학적 대상의 존재성에 대한 서로 다른 철학적 입장인 플라톤주의와 형식주의를 살펴보고, 기하학 공리계의 두 가지 체계인 실질적 공리체계와 형식적 공리체계, 그리고 선을 이해하는 두 가지 방식인 '자연 연속체'와 '점의 집합' 관점에 대해 알아본다.

1. 플라톤주의와 형식주의

절대주의 수리철학은 수학이 객관적이고 절대적인 진리이며 합리적이고 확실한 기초를 지닌 것으로 여기는 전통적인 수리철학이다. 절대주의 수리철학의 하위 갈래인 플라톤주의(Platonism)와 형식주의(Formalism)는 수학적 대상의 의미와 존재성에 대해 서로 다른 입장을 갖는다. 플라톤주의는 인간의 정신 밖에 존재하는 수학적 실체의 존재를 가정하고 인간의 이성에 의해 수학적 진리에 도달한다고 여기는 존재론적 관점이다. 플라톤주의에서 수학적인 대상들의 존재는 객관적인 사실이며 인간의 지성(知性)이나 수학적 체계와는 독자적으로 존재한다. 반면, 형식주의는 수학적 대상을 실재하는 것으로 보지 않으며 수학적 대상을 지칭하는 용어들은 의미를 지니지 않는 것으로 여긴다. 형식주의에서 수학은 수학적인 체계 내에서 일정한 규칙에 따라 연역적으로 이루어지는 논리와 기호

의 조작이다(정영옥, 1997).

플라톤주의는 그 이름에서 드러나듯이 만물의 근원과 절대적 진리의 존재에 대한 플라톤의 철학에 뿌리를 두고 있다. 절대적이고 객관적인 진리가 존재한다는 스승 소크라테스의 사상을 이어받은 플라톤은 진리의 척도는 인간이 아니라고 보았으며 절대적 진리가 존재한다는 이데아론을 펼쳤다. 이데아론의 핵심은 개별적이고 변화하는 사물들에 대해 유일하면서 실재하는 불멸의 원형인 이데아(idea)의 세계가 존재한다는 것이다. 플라톤은 세상이 변화하는 것들의 세계인 가시계(可視界)와 변하지 않는 세계인 가지계(可知界)의 쌍으로 구성된다고 하였다[5]. 가시계는 감각으로 경험할 수 있는 세계이며 가지계는 감각을 초월하며 사고(思考)를 통해 닿을 수 있는 세계로 바로 이데아를 가리킨다. 가시계에 존재하는 만물의 근원은 가지계인 이데아에 있다(임재훈, 1998).

플라톤주의에 따르면 수학적 대상의 존재성은 그것들에 대한 인간의 지식과는 독립적으로 객관적인 사실이다(Davis, Hersh, & Marchisotto, 2012). 플라톤주의자인 René Thom은 수학자들이 수학적 대상이 실재한다는 확신을 가져야 한다고 하였으며, Kurt Gödel은 존재성에 대한 직관은 감각을 통한 인식만큼이나 객관적 현실성을 드러낼 수 있다고 하였다(Davis, Hersh, & Marchisotto, 2012, p. 357에서 재인용). 또 다른 플라톤주의자인 Roger Penrose(1991, p. 95)은 한 프랙털[6]의 존재성을 다음과 같이 에베레스트 산에 비유하기도 하였다. '프랙털은 인간 정신의 고안물이 아니라 발견물이다. 에베레스트 산이 존재하듯이, 이 집합은 분명히 있다.'

플라톤주의에서 선은 실재한다. 인간이 어떠한 방식으로 선을 나타내더라도 그것은 엄연히 말해 얇은 두께를 가진 띠에 해당하지만 그러한 띠를 우리가 선으로 인식하고 다룰 수 있는 이유는 기하학적인 선의 원형이 이데아의 세계에 존재하기 때문이다. 플라톤주의에서 선은 인간이

5) 『파이돈』 78c-79a
6) 이 프랙털은 구체적으로는 만델브로 집합을 가리킨다. 만델브로 집합은 다음 점화식 $z_{n+1}=z_n^2+c$ 으로 표현되는 수열 $\{z_n\}$ (단, $z_0=0$)의 절댓값이 무한대로 발산하지 않는 복소수 c의 집합으로 정의된다(Mandelbrot, Evertsz, & Gutzwiller, 2004)

그것들을 표현하고 인지하는 방식과 상관없이 존재한다. 이러한 플라톤주의에 입각한 기하학 공리계를 담고 있는 저서 중 하나가 유클리드『원론』이다(우정호, 권석일, 2006). 선을 폭을 갖지 않는 것으로 정의한 유클리드는 선을 경험적, 물리적인 대상이 아니라 추상적이고 이상적인 대상으로 보았는데, 이것은 감각을 초월하고 사고를 통하여 닿을 수 있는 세계인 이데아에 대한 플라톤의 철학을 담고 있다.

하지만, 19세기 이후 수학자 힐베르트를 중심으로 수학의 기초를 더욱 공고히 확립하고자 하는 연구가 진행되었는데, 힐베르트를 비롯한 다수의 현대 수학자들이 취하고 있는 관점이 바로 형식주의이다(Kline, 1980). 형식주의는 플라톤주의와 다르게 수학적 대상을 실재하는 것으로 보지 않는다. 형식주의에서 정의, 공리, 정리들은 어떤 실재하는 것들을 지칭하는 것이 아니며 수학은 의미를 지니지 않는 형식적인 체계이다. 또한, 수학 명제가 참이라는 것은 어떠한 논리식들의 연역 과정을 통해 그 결과를 도출할 수 있다는 것을 말한다. 따라서 형식주의 관점에서 수학의 주된 과제는 체계의 논리를 세우고 연역적 논리를 통해 정리와 명제 등을 발전시켜나가는 것이다(정영옥, 1997).

힐베르트 외에 다른 형식주의자로는 Moritz Pasch(1843～1930), Giuseppe Peano(1858～1932)가 있다. Pasch는 당시 여러 수학자들에 의해 제기된 유클리드 『원론』의 결함, 즉 유클리드 공리계에서 정의되지 않지만 암묵적으로 사용되는 공리를 제거하고 형식적인 기하학 체계를 만들려고 하였다. Pasch는 공간 직관에 의해 자명한 것으로 인식되는 가정들을 없애고 논리적 언어로만 기하학을 구성하려 하였다. 한편, Peano는 자신이 고안한 기호논리학의 표현을 사용하여 Pasch의 기하학을 번역하였고 이를 통해 Pasch의 기하학을 발전시킨 Peano의 기하학은 완전히 추상화되어 변수 사이의 관계에 대한 계산 그 자체가 되었다. 이어서 힐베르트는 기하학을 절대적으로 추상적인 기호로 기호화해 나가던 당시의 추세에 역행하여 기하학의 기본 용어와 관계에 주목하였다. 힐베르트는 『원론』의 내용을 현대적인 관점에서 Pasch와 Peano보다 더 명확하게 서술하고자 하였으며 이는 힐베르트의 저서 『Foundations of Geometry』에서 드러난다(Reid, 1996).

힐베르트의 연구는 공리들간의 순수한 논리적 관계에 대한 것이었으며 우리가 실제로 경험하는 공간과 대상들을 기술하는 것과는 무관하다. 이것은 기하학을 경험과 직관에서 탈피한 순수수학으로 여기는 것이며 더 이상 기하학을 통해 현실의 문제를 해결한다거나 현실에 어떻게 응용될 수 있는지는 중요하지 않았다. 아울러 공리계에서 다루는 수학적 대상의 존재성과 공리의 진리성을 묻는 것 또한 의미를 갖지 않게 되었다. 형식주의자들에게 수학은 오로지 형식적 체계의 모임이며, 각 체계 안에서 논리와 연역을 바탕으로 체계를 확장시키는 것이 수학자의 과제이자 목표인 것이다. 형식주의는 오랜기간 수학자들이 수학의 본성에 대해 가졌던 철학적 문제, 즉 '수학적 대상이 존재하는가? 수학적 지식은 정말 참인가?'에 대한 고뇌로부터 해방시켰다는 점에서 의의가 있다(정영옥, 1997).

2. 실질적 공리체계와 형식적 공리체계

Eves(1997)는 공리체계를 크게 실질적 공리체계와 형식적 공리체계로 분류하였다. 먼저, 실질적 공리체계의 구조는 다음와 같다(Eves, 1997, pp. 13-14).

(1) 체계의 기본적인 전문 용어들에 대한 최초의 설명이 주어지며, 이는 독자에게 이러한 기본용어(basic terms)들이 의미하는 바를 제시하려는 의도이다.
(2) 기본용어와 관련이 있고 최초의 설명에 근거하여 참으로 받아들여질 수 있는 주요한 명제의 목록이 제시된다. 이러한 주요한 명제를 *공리 혹은 공준(axioms or postulates)*이라 한다.
(3) 체계의 다른 모든 전문용어는 그 이전에 도입된 용어를 사용하여 정의된다.
(4) 체계의 다른 모든 명제는 그 이전에 받아들였거나 증명된 명제로부터 논리적으로 연역된다. 이와 같이 연역된 명제를 *정리(theorems)*라 한다.

실질적 공리체계를 갖는 대표적인 기하학 저서는 유클리드『원론』이다. 『원론』에서는 점과 선의 의미를 설명하는 정의가 제시되는데, 이때 정의 방식은 사전적 정의이다(이지현, 2011). 사전적 정의의 목적은 이미 존재하는 대상을 기술(description)하는 것인데(Hunter, 2009, p. 39), 여기서 대상을 기술한다는 것은 그 대상을 지칭하는 용어가 일반적으로 사용되는 방식을 특징짓는 것이다(Alcock & Simpson, 2002)[7]. 또한, 정의하고자 하는 대상의 존재성을 가정하는 것은 점과 선을 실재하는 것으로 보는 플라톤주의와 상응한다. 이러한 기본용어들은 오직 하나의 이상화된 실재를 지칭한다는 점에서 변수가 아닌 상수이다(Wilder, 1967).

그런데 유클리드는 이 기본용어들을 공간 직관을 토대로 이해하였고, 따라서 공리계에서 명시되지 않은 성질, 이를테면 순서 혹은 연속성에 대한 암묵적 가정을 하였다. 이에 대해 Mueller(1969, pp. 294-295)는 공간 직관에 의존한 여지를 둔 기본용어의 정의 방식 그 자체가 원론의 결함 중 하나라고 지적하였다. 즉, 기본 용어를 어떻게 정의하더라도 그 정의 내용에 대한 직관적 이해가 공리체계의 내용 전개에 개입하여 논리적 엄밀성에 영향을 미칠 수 있다. 따라서 정의되지 않은 용어, 즉 무정의 용어가 필요한데, 이것은 실질적 공리체계와 형식적 공리체계의 주된 차이점 중 하나이다.

한편, 힐베르트 공리계로 대표되는 형식적 공리체계(formal axiomatic system)의 구조는 다음과 같다(Eves, 1997, pp. 148-149)

(1) 이 체계는 의도적으로 무정의 용어로 선택된 전문용어(개체, 개체들간의 관계, 개체들에 수행되는 연산)들의 집합을 포함한다. 이러한 용어를 *기본용어(primitive terms)*라 한다.

(2) 이 체계는 기본용어들에 대해 의도적으로 증명하지 않고 받아들이는

7) 대상을 기술한다는 것은 그 대상을 지칭하는 용어가 일반적으로 사용되는 방식을 특징짓는 것으로, 정의항과 피정의항이 일치할 필요가 없다. 반면, 정의항과 피정의항이 정확하게 일치하는 정의를 수학적 정의라 하는데(Alcock & Simpson, 2002), 수학적 정의는 힐베르트 공리계의 분석에서 다루기로 한다.

명제들의 집합을 포함한다. 이러한 명제를 *공리(postulates or axioms)*라 한다.

(3) 체계의 모든 다른 전문용어는 그 이전에 도입된 용어를 사용하여 정의된다.

(4) 체계의 다른 모든 명제는 그 이전에 받아들였거나 증명된 명제로부터 논리적으로 연역된다. 이 연역된 명제들을 *정리(theorems)*라 한다.

(5) 체계의 각 정리 T_i들에 대해, 그것들이 공리 P로부터 논리적으로 연역되었음을 확언하는 진술들이 존재한다. (종종 그러한 진술들은 정리의 증명 마지막에 '그리하여 이 증명은' 혹은 '이것으로 정리의 증명이 완료되었다'와 같은 문장으로 제시된다. 어떤 기하책에서는 그러한 진술이 증명의 마지막 부분에 *Q,E,D.(Quod erat demonstrandum)*로 나타난다. Paul R. Halmos가 제안한 현대적 기호인 '□' 혹은 이것의 변형이 증명의 종료를 나타내기 위해 자주 사용된다.)

형식적 공리체계의 특징적인 점은 '기본용어'를 무정의 용어로 도입한다는 것이다. 실질적 공리체계에서는 용어의 의미를 설명하는 정의가 제시한 반면, 형식적 공리체계는 기본 용어에 대한 정의를 제시하지 않는다. 예를 들어, 힐베르트의 공리계에서는 '점, 선, 면, 위에 있음, 사이에 있음, 합동'을 정의되지 않는 기본용어로 설정하였는데, 기본 용어를 지칭하는 단어들은 대상을 지칭하는 이름에 불과하다. 따라서 공리로써 기술되는 관계들이 유지된다면 다른 단어들로 얼마든지 교환 가능한 변수이다(Eves, 1997).

무정의 용어를 이용하여 진술된 공리와 정리들은 일종의 명제함수이다. 명제함수란 "x는 y이다[8]"와 같이, 그 자체가 명제인 것은 아니지만, 변수 x, y에 명확한 의미를 갖는 용어를 대입하였을 때 참 혹은 거짓인 명제를 얻는 문장을 말한다. 따라서 참인 명제를 얻기 위해 변수인 무정의 용어에 어떠한 의미를 대응시키느냐가 중요한데 모든 무정의 용어에 구체적인 의미를 대응하는 것을 '해석'이라고 하며, 모든 공리를 참으로 만드는 해석을 '모델'이라고 한다. 하나의 공리체계가 여러 모델을 가질

8) 이 예시는 두 개의 변수를 가진 명제함수이다. 명제함수를 구성하는 변수의 개수에는 제한이 없으며, 한 개의 변수를 가질 수도 있다(Eves, 1997, p. 148).

수 있는데 어떤 두 모델의 구조가 대등한 경우, ‘동형’이라고 한다[9] (Francis, 2002).

실질적 공리체계에서는 기본용어의 직관적 의미가 정리의 증명에 개입될 수 밖에 없고 이것은 논리적 결함의 원인이 되지만, 형식적 공리체계에서 기본용어의 의미는 공리체계 전체에 의해 규정되므로 직관이 개입할 여지가 없다. 실질적 공리체계에서 형식적 공리체계로의 변화는 기본용어의 직관적 의미에 암묵적으로 의존하는 증명 방식에서 공리체계에만 의존하는 증명 방식으로의 변화를 의미한다. 실질적 공리체계의 시작인 유클리드『원론』과 『원론』의 결함을 보완하기 위해 만들어진 힐베르트의 『Foundations of Geometry』에서 제시되는 기하학 공리체계는 그 변화를 잘 드러낸다(이지현, 2011).

3. ‘자연 연속체’와 ‘점의 집합’

Lakoff & Núñez(2000)에 따르면 수학의 역사에서 선은 두 가지 서로 다른 방식으로 인식되었다. 하나는 선을 비이산적인 자연 연속체로 보는 것이며, 다른 하나는 선을 이산적인 점들의 집합으로 보는 것이다. 그런데 선에 대한 인식은 그 선이 포함된 공간을 어떻게 인식하느냐와 밀접히 관련된다. 선을 자연 연속체로 보는 관점에서 공간은 진공 상태이며 어느 부분도 단절되어 있지 않고 모든 방향에서 연속적이다. 이렇게 공간 자체를 하나의 연속체로 보는 관점을 ‘연속론’이라고 한다. 반면, 선을 점의 집합으로 보는 관점에서는 공간도 선과 마찬가지로 무수히 많은 점들이 모여 구성된 것이다. 이렇게 공간을 더 이상 분할할 수 없는 최소 입자인 점들의 집합으로 보는 관점을 ‘원자론’이라 한다(김용운, 1988).

19세기 중반까지 대중적으로 공간에 대한 인식은 연속론이었으며 이에 대한 설명은 다음과 같다(Lakoff & Núñez, 2000, p. 260).

---

9) 예를 들어, 힐베르트 공리계를 모두 만족하는 모델 중 하나는 실수 카테시안 평면(real Cartesian plane)으로 다른 모델들은 모두 이와 동형이다. 한편, 만족하는 모든 모델이 동형인 공리체계를 ‘범주적(categorical)’이라고 한다(Hartshorne, 2000).

공간은 절대적으로 연속이다. 공간은 어떤 개체들로 구성되지 않는다. 그것은 개체들이 위치할 수 있는 배경 환경(background setting)이다. 공간은 그 안에 위치하는 개체들보다 앞서(prior to) 독립적으로 존재한다.

연속론에서 공간은 점과 선이 존재할 수 있는 배경이다. 연속론은 공간에 대한 인간의 무의식적이고 기본적인 관념으로(Lakoff &Núñez, 2000), 같은 맥락의 사고를 서양 고대 철학에서부터 찾을 수 있다. 플라톤에게 공간은 세상의 만물이 창조되고 위치할 수 있는 장소이며(이상봉, 2009)[10], 아리스토텔레스는 공간은 그 안에 있는 물체와 독립적으로 존재하고 그 물체가 움직이더라도 공간은 움직이지 않는다고 하였다[11]. 한편, 중세시대 철학자인 크레스카스(1340~1410)는 3차원의 공간이 모든 방향으로 계속 뻗어 있다는 점에서 공간을 무한하며 동질적이라고 하였다. 이 무한한 공간은 물질이 놓일 준비가 된 허공의 거대한 연속이다(이상봉, 2010). 이처럼 연속론의 관점에서 공간은 모든 방향으로 연속적으로 펼쳐져 있는 비어있는 배경이다.

이러한 연속론의 관점에서 점과 선은 다음과 같이 존재한다(Lakoff & Núñez, 2000, p. 260).

... 선은 마치 움직이는 점이 지나간 길(path)과 같이 절대적으로 연속이다. 선은 그 위에 위치하는 개체인 점들보다 먼저 독립적으로 존재한다. ... 점은 공간 속 선 위에서의 위치이다.

선은 그 자체로써 공간에 존재하며, 점은 선 위에 존재하는 위치이다. 그 자체로 존재한다는 것은 선이 갖는 특성은 내재적(inherent), 즉 그 특성의 존재성이 다른 조건이나 관계 등 외부적 요소에 기인하지 않음을 뜻한다. 선이 갖는 내재적 특성 중 하나는 그것들이 본질적으로 공간적(spatial)이라는 것이다(Lakoff & Núñez, 2000). 이것은 '기하학적

10) 『티마이오스』 52b.
11) 『자연학』 4권 2장, 209b22-30.

(geometrical)'이라는 뜻으로(Janich, 1992), 일정한 모양을 가지고 있다는 것을 의미한다. 그러한 모양은 어떠한 외부 조건이나 관계에 의해 생성된 것이 아니며, 인간이 가지고 있는 직관에 의해 인식된다.

연속론에서 이러한 선의 개념은 '자연 연속체(natural continuum)'에 해당한다고 할 수 있다. 연속체는 직관적으로는 분명하지만 논리적으로 정의하기는 매우 힘들다. 오랫동안 인정받아온 연속체의 정의 중 하나는 아리스토텔레스의 것으로, 아리스토텔레스는 연속체를 '무한 분할 가능한 것'으로 정의하였다(Janich, 1992에서 재인용). 즉, 아리스토텔레스에게 연속적인 것은 계속해서 분할되는 것이다(유재민, 2009). 따라서 선은 계속해서 무한 분할 가능하며 이때 분할의 결과들은 항상 선이다. 아리스토텔레스는 선을 무한히 분할하다고 해서 선들이 점점 짧아져 점에 도달할 수는 없다고 하였다. 점은 크기가 없기 때문에 아무리 많이 모아도 크기(길이)를 갖는 선이 될 수 없다. 따라서 점들의 집합이 선은 아니며, 선을 무한히 분할하더라도 분할의 결과 점이 되지 않는다.

그렇다면 선 위에 위치하는 점은 어떻게 이해해야 하는가? 홍진곤(2008, p. 474)은 아리스토텔레스의 존재론에 기반하여 점과 선의 관계를 다음과 같이 설명하였다.

> 생각하기에 따라서는, 무한개의 점이 선 위에 이미 존재하고 있는 것이 아니라면 선분을 무한히 분할할 수 있는 가능성도 없는 것이 아닌가 하고 질문할 수도 있다. 그러나 이는 현실태(형상이 실현된 존재)와 가능태(가능성으로의 존재)를 구별한 아리스토텔레스의 존재론으로 충분히 설명 가능하다. 즉, 직선 위의 '점'은 마치 옥수수의 알갱이처럼 이미 존재하고 있는 것이 아니라 대리석을 조각해서 가능성으로만 존재하던 어떤 작품을 만들어내는 것처럼 직선을 분할하는 것을 통하여 '만들어내는' 존재라고 해석하면 되는 것이다.

위 설명에 따르면, 선 위의 점은 선을 분할하였을 때 드러나는 존재이며 분할 이전에는 가능성으로서 존재하다. 이때 선은 연속체로써 무한히 분할 가능하므로 선이 분할되면서 드러나는 점은 무한히 많다. 이렇게

연속체로서의 선이 먼저 존재하고 있으며 그 선분 위의 '위치'로서의 점만을 끝없이 생각할 수 있을 뿐이라고 보는 관점은 가무한적 관점에 해당한다(홍진곤, 2008).

한편, 원자론에서 공간은 점들이 무한히 모여 구성된 것이며 선도 마찬가지로 점의 집합이다. 원자론에 대한 설명은 다음과 같다(Lakoff & Núñez, 2000, p. 263)

> 공간은 특정한 관계를 갖는 개체들의 집합이다. '공간'에는 내재하는 공간적인 것은 없다. 점은 모든 종류의 집합의 구성 요소이다. 점들은 이산적인 개체들이며 서로가 구분된다.
>
> 점들은 그들이 속해있는 어떠한 집합과도 독립적으로 존재한다. 공간과 선은 그들을 구성하는 점들에 독립적으로 존재하지 않는다... 선은 특정한 관계를 갖는 점들의 집합이다.

이러한 관점에서 공간 속의 모든 개체들은 점들이 모여 구성된다. 이렇게 만물을 구성하는 최소 입자(원자)의 존재를 가정하고 탐구한 원자론자들은 고대부터 존재하였다. 대표적인 그리스의 원자론자 중 한 명인 데모크리토스는 연속체가 더 이상 쪼갤 수 없는 원자, 즉 점으로 구성되어 있다고 하였다(Bell, 2019, p. ix). 하지만 원자론자들에게 공간이 점으로 이루어진 것은 아니다. 원자론자들은 원자들의 결합과 분리로 인해 물질이 생성되고 소멸된다고 생각하였으며 결합과 분리라는 운동이 가능한 열린 공간, 즉 허공(kenon)이 있어야 한다고 하였다. 따라서 데모크리토스는 공간을 비어있는 것으로 보았으며(김성환, 2018), 에피쿠로스 또한 허공이 없다면 운동도 없을 터인데 원자들의 운동이 있으므로 허공도 존재한다고 하였다(Furley, 1989, p. 78). 원자론자인 에피쿠로스에게 있어 공간은 원자로 이루어진 물체들의 무대인 셈이다(이상봉, 2009).

피타고라스 학파는 공간이 점들로 구성되었다고 생각하였다(Boyer & Merzbach, 1991, pp. 120-122). 하지만 당시의 엄밀하지 못한 정의는 여러 역설을 만들어냈다[12]. 기하학적 대상을 점의 집합으로 보는 수학적인

12) 대표적으로 제논의 역설이 있다. Tannery에 의하면 제논의 역설을 통해 제논이 반

‘원자’를 가정하게 되면 여러 논리적인 모순이 생겨날 수 있다(홍진곤, 2008, p. 474). 하지만 현대에 와서 선과 공간이 점으로 이루어졌다는 사고 방식을 바탕으로 수학적 체계와 구조를 본격적으로 설명하게 되는데 이것을 이산화 프로그램(discretization program)이라고 한다[13]. 대표적으로 데카르트는 수론과 기하학을 접목하여 해석기하학을 창시하였고 이것은 기하학적 대상을 점의 집합들로 이해하는 것을 가속화시켰다.

원자론은 앞서 살펴본 연속론과는 여러 면에서 차이가 있다. 연속론에서 기하학적 대상의 특성은 내재적인 반면, 원자론에서 기하학적 대상의 특성은 관계나 함수에 의해 결정된다. 이를테면 연속론에서 원은 그 자체로 공간상에서 둥근 모양을 갖는 대상이지만, 원자론에서 원은 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합이다. 이때, 공간에서의 거리 함수와 ‘거리가 같다’는 것을 어떻게 정의하는지에 따라 원의 모양이 동그랗지 않을 수 있다. 따라서 원자론에서의 기하학적 대상이 갖는 특성은 내재적이지 않다. 또한, 연속론은 무의식적인 사고인 반면, 원자론은 연속론의 관점을 의식적인 목적성을 갖고 수학적으로 구조화한 관점이다 (Lakoff & Núñez, 2000).

현대 수학에서 선은 ‘점의 집합’으로 간주되므로 원자론에 해당한다고 할 수 있다. 하지만 여러 선들을 구분하는 데에 단순히 점이 모였다는 사실만으로는 불충분하다. 점들의 집합이 직선이 되기 위해서는 이들 점 사이의 관계나 연결상태, 즉 ‘위상(位相)’이 정의되어야 한다(김용운, 1988, p. 25; 홍진곤, 2008, p. 474). 이를테면, 선의 연속성을 위해 점들이 빈틈없이 모여야 하는데, 이것은 힐베르트 공리계 내에서는 연속 공리가 규정하고 있다. 또한, 무한개의 점이 모여 선이 만들어진다고 생각하는 관점은 선분 위에 처음부터 무한개의 점이 존재하고 있다고 생각하는 실무한적 관점에 해당한다(홍진곤, 2008, p. 473).

박하고 싶었던 것 중 하나는 ‘공간이 점들의 합’이라는 것이다(백승주, 최영기, 2020에서 재인용). 즉, 공간을 점들의 합으로 간주할 경우 생기는 모순을 논하는 것이 제논의 역설이다.

13) 이산화 프로그램이란 Lakoff & Núñez(2000)가 사용한 표현으로 기하학적 대상을 점들이 모여서 이루어진 것으로 개념화하는 수학적 시도의 총체를 말한다고 할 수 있다.

제 2 절 연구 방법

본 연구는 직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점을 도출하고 각 관점에서 점의 특성을 밝힘으로써 학교 기하 교육에 시사점을 제공하고자 하는 것이 목적이다. 이러한 목적을 달성하기 위해 본 연구에서는 문헌 분석을 실시하고자 한다. 우정호 외(2016)에 따르면 문헌 분석은 특히 교수학적 분석 연구에 많이 사용되는 연구 방법이다. 교수학적 분석은 "학교수학의 특정한 주제를 가르치기 적절하게 교재와 수업을 조직하는데 유용한 시사를 얻기 위해 그 주제의 본질을 여러 측면에서 분석하는 연구(p. 31)"를 뜻한다. 여기서 말하는 '특정한 주제'에 해당하는 것은 '직선, 선분, 반직선'이 될 것이며, 이 주제의 본질을 파악하여 시사점을 얻고자 하는 것이 본 연구의 목적이다. 구체적인 문헌 분석의 대상과 절차는 다음과 같다.

첫째, 먼저 유클리드『원론』과 힐베르트의 『Foundations of Geometry』에서 드러난 기하학 공리계의 내용을 고찰하고 분석한다. 이 두 저서를 선택한 이유는 이론적 배경에서 살펴본 것처럼 각각 플라톤주의와 형식주의를 기반으로 하고 있으며, 실질적 공리체계와 형식적 공리체계의 대표적인 예이기 때문이다. 아울러 Blanché(1962)는 이 두 공리계를 공리계의 역사적 단계를 구분하는 지점으로 꼽은 만큼, 두 공리계를 통해 직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점을 도출할 수 있으리라 예상하였다. 또한, 이론적 배경에서 알아본 선에 대한 두 관점인 '자연 연속체' 혹은 '점의 집합' 관점이 각 기하학 공리계에서 어떻게 드러나는지 살펴보도록 한다.

둘째, 관점의 도출을 위한 추가적인 논의를 위해 각 공리계에서 직선, 선분, 반직선을 이해하는 데에 기반이 될 수 있는 공리 혹은 개념에 초점을 두고 추가적으로 자료를 수집하여 분석하였다. 이것은 사전 분석 결과, 두 공리계에 대한 분석만으로는 본 연구의 목적을 달성하기 어려웠기 때문이다. 따라서 관점의 도출에 도움이 될 수 있는 역사적, 수학적, 철학적 자료를 수집하여 살펴보도록 한다. 이 자료들에 대한 분석을

통해 두 번째 연구 문제에 대한 답을 찾고 직선, 선분, 반직선에 대한 관점과 점의 특성을 도출한다.

셋째, 선에 대한 관점과 점의 특성을 바탕으로 초등학교와 중학교 교과서를 분석한다. 이를 통해 기하 교육에서의 시사점과 특히, 초등학교 검정 교과서에서 직선, 선분, 반직선의 학습에 대한 제언을 하고자 한다.

본 연구에 대한 전반적인 연구 설계는 아래의 <표 Ⅱ-1>와 같다.

<표 Ⅱ-1> 연구 설계

구분	내용
연구 가설	이론적 배경에 근거하여 볼 때, 직선, 선분, 반직선을 바라보는 서로 다른 관점들이 존재할 수 있다. 또한, 이런 관점들 속에서 점은 서로 다른 특성을 가질 것이다.
연구 목적	직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점을 도출한다.
연구 문제	1. 유클리드와 힐베르트의 기하학 공리계에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 정의되는가? 만약 정의되지 않는다면 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 기반이 될 수 있는 정의나 공리는 무엇인가?
	2. 경계(boundary)와 사이성(betweenness)에 대한 역사적, 수학적, 철학적 논의를 바탕으로 선을 '자연 연속체'와 '점의 집합'으로 보는 두 관점에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 개념화되는가? 각 관점에서 점이 갖는 특성은 무엇인가?
	3. 직선, 선분, 반직선에 대한 서로 다른 관점과 점이 갖는 특성들은 학교 기하 교육에 어떠한 시사점을 줄 수 있는가?
연구 방법	문헌 분석 및 고찰

제 3 장 기하학 공리계 고찰

본 장에서는 첫 번째 연구 문제인 “유클리드와 힐베르트의 기하학 공리계에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 정의되는가? 만약 정의되지 않는다면 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 기반이 될 수 있는 정의나 공리는 무엇인가?”에 대한 답을 찾는 것이 목표이다.

제 1 절 유클리드『원론』[14)]

1. 직선, 선분, 반직선

먼저 유클리드 『원론』에서 직선은 다음과 같이 정의된다.

정의 4. 직선은 점들이 쭉 곧게 있는 것이다

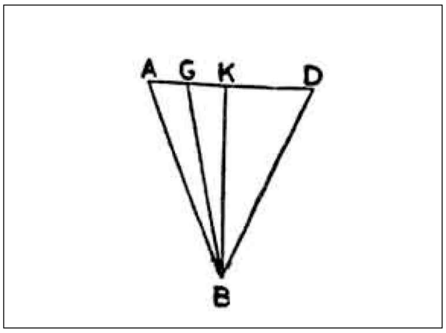
A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.

Heath(1956, p. 25)는 이 정의가 플라톤의 정의에서 유래된 것으로 보았다. 플라톤은 직선을 ‘가운데가 양 끝을 막는 것[15)]’이라고 정의하였다. 여기서 ‘막는 것’의 의미는 ‘보이지 않게 하는 것’으로 이해할 수 있다. 즉, 한 끝에 눈을 대고 그 시선이 다른 끝을 바라볼 때, 가운데 놓여있는 선에 의해 다른 끝이 보이지 않는 상황을 암시한다. 이것은 인간의 시선이 직선이라는 암묵적인 가정에 의존하는데, 이러한 가정은 유클리드의 또 다른 저서인 『광학(Optics)』에서도 드러난다(Russo, 2004).

14) 본 연구에서는 유클리드『원론』의 내용을 제시함에 있어 다음을 따른다. 첫째,『원론』 내용의 한글 번역은 이무현(2008), 영어 번역은 Heath(1956)의 것을 따랐다. 필요한 경우에는 그리스 원문을 제시하였는데 이때는 Fitzpatrick(2008)의 것을 따랐다. 둘째,『원론』1권의 내용을 제시할 때에는 권 수를 따로 표기하지 않았다. 그 까닭은 선과 점에 대한 내용이 대부분 1권에 해당하기 때문이다. 단, 1권의 내용이 아닌 경우 몇 권인지 표기하였다.

15) 『파르메니데스(Parmenides)』137e: 3-4.

『광학』에서는 인간의 시야를 원뿔 형태로 정의하고 있으며[16], [그림Ⅲ-1]과 같이 특정 대상(A, G, K, D)에 대한 시선을 눈의 위치(B)와 대상들을 곧게 이은 선으로 표현하고 있다. 이를 통해 고대 그리스에서 인간의 시선이 직선이라는 것을 인식하고 있었으며, 또한 플라톤의 직선에 대한 정의는 인간의 시선을 이용하여 직선의 곧은 성질인 직선성(直線性)을 암묵적으로 나타냈다고 해석할 수 있다.



[그림 Ⅲ-1]『광학』의 첫 번째 그림 (Burton, 1945, p. 357)

『원론』에서 직선의 정의는 플라톤의 정의에 비해 기하학적 대상인 점으로 정의를 구성하였다는 점에서 의의가 있다(Heath, 1956). 하지만 이 직선에 대한 정의는 부자연스럽고 불충분하다. ‘쭉 곧게’라는 표현이 의미하는 바는 원론의 이후 내용에서 추가적으로 설명되지 않는다(Janich, 1992, p. 16; Zormbala & Tzanakis, 2004). 이 정의를 통해 직선을 이해하기 위해서는 이미 직선에 대한 이미지를 갖고 있어야 한다(Greenberg, 1993, p. 11). 즉, 이 직선을 알지 못하는 사람이 이 정의만을 듣고 직선에 대해 정확히 이해하기 어렵다[17]. 이 정의를 통해 알 수 있는 것은 직선 위에 점들이 ‘있다’는 것이다. 하지만 점들이 과연 몇 개나 있다는 것인지, 점들이 모여 직선이 되는지에 대해 답할 수 없는 것

16)『광학』의 정의 2 : 인간의 시야가 포함된 공간의 형태는 꼭짓점이 눈에 있고 밑면이 시야의 끝에 해당하는 원뿔이다(Burton, 1945).
17) 직선의 특징은 양 옆으로 무한히 뻗어나간다는 점, 굽지 않고 곧은 선이라는 점, 연속적으로 이어진 선이라는 점이다. 하지만 정의 4는 세 가지 특징 중 어느 것 하나도 명확히 설명하지 않는다.

은 여전하다.

다음으로 유클리드 『원론』에서 선분은 명시적으로 정의되지 않지만, 선분으로 이해할 수 있는 용어가 존재한다. Hartshorne(2000)은 공준 2[18]에서 등장하는 '유한한 직선(finite straight line)'을 현대의 선분 개념으로 이해할 수 있다고 하였다. 유한한 직선이라는 표현은 명제 1[19]과 명제 10[20]에도 등장한다. 또한, 정의 17[21]에서는 원의 지름을 '양쪽 다 원둘레에서 끝나는 직선'으로 정의하고 있는데 이것도 선분에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 하지만 현대적인 의미의 직선을 고려할 때 이 두 표현은 모순이 존재한다. 표준국어대사전에 따르면 수학에서의 직선은 '양쪽으로 끝이 없는 곧은 선'을 뜻한다. 따라서 직선에 '유한한'이나 '양쪽 다 원둘레에서 끝나는'이라는 조건이 붙는 것은 직선 자체가 가지고 있는 의미와 상반되는 것이다.

마지막으로 유클리드 『원론』에서 반직선은 선분과 마찬가지로 명시적으로 정의되지 않는다. 하지만, 선분과 다른 점은 『원론』에서 반직선으로 이해가능한 용어가 존재하지 않는다는 점이다. 학교수학에서 반직선은 각을 정의하는데 사용되는데, 원론에서는 각의 정의에 반직선이 아닌 선(혹은 직선)[22]이 사용된다.

요약하면 유클리드 『원론』에서 직선은 정의되지만 선분과 반직선은 정의가 되지 않는다. 하지만 직선의 정의도 현대 수학의 관점에서 보면 불충분하다. 물론 『원론』을 현대 수학의 관점에서만 분석하는 것은 적절하지 못하지만, 그렇다고 해서 현대 수학의 관점을 아예 배제할 수는 없을 것이다. 『원론』에서 다루어지는 선이 자연 연속체인지 아니면 점의 집합인지에 대해 알기 위해서는 직선의 정의만으로는 부족하므로 일반적인

18) 공준 2 : 유한한 직선이 있으면, 그것을 얼마든지 길게 늘릴 수 있다.
19) 명제 1 : 주어진 유한한 직선으로 정삼각형을 작도하여라.
20) 명제 10 : 주어진 유한한 직선을 이등분하여라.
21) 정의 17 : 원의 지름은 중점을 지나고 양쪽 다 원둘레에서 끝나는 직선을 말한다. 지름은 원을 이등분한다.
22) 정의 8 : 평면에 있는 두 선이 서로 만나고, 그들이 한 직선에 놓여있지 않을 때, 그들이 서로 기운 정도를 각이라 부른다.
정의 9 : 각을 만드는 선이 둘 다 직선일 때, 그 각을 직선각이라 부른다.

선과 점의 정의, 그리고 선과 점의 관계에 대해 알아볼 필요가 있다.

2. 점, 선의 정의 및 관계

<표 Ⅲ-1>『원론』에서 점, 선의 정의 및 관계 (Heath, 1956; 이무현, 2018)

	내 용
점과 선의 정의	정의 1. 점은 쪼갤 수 없는 것이다.
	정의 2. 선은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.
점과 선의 관계	정의 3. 선의 양 끝은 점들이다.
	공준 1. 모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다.

정의 1. 점은 쪼갤 수 없는 것이다.

A point is that which has no part.

정의의 내용을 통해 점과 선은 우리가 일상생활에서 경험할 수 있는 물리적 대상이 아님을 알 수 있다. 유클리드 이전의 철학자 플라톤은 수학적 대상을 인간의 정신과는 독자적으로 실재하는 형상으로 인식하였는데(임재훈, 1998), 유클리드의 정의는 이러한 플라톤적 사고가 반영되어 점과 선을 이상적이고 실재하는 대상으로 바라봄을 알 수 있다.

한편, 점에 대한 정의는 영어로 'A point is that which has no part.' 인데 이것을 직역하면 '점은 부분을 갖지 않는 것'이다. 하지만 Heath(1956, p. 155)는 점을 아무것도 아닌 것(nothing)이라고 정의하지 않고 '부분'에 대해 언급한 유클리드의 진의를 고민하였으며 '점은 쪼갤 수 없는 것이다'로 해석하는 것이 옳다고 하였다[23]. 쪼갤 수 없다는 것은

23) 이렇게 해석하는 것의 또 다른 근거로, Heath는 독일의 평론가 Hermann Bonitz(1814-1888)의 해석을 들고 있다. Bonitz는 아리스토텔레스의 『형이상학』에서 '~의 부분이 있다'라는 고대 그리스어를 '~를 각 부분으로 쪼갤 수 있다'로 해석한 바 있다(Heath, 1956, p. 155에서 재인용).

곧 분할이 불가능하다는 것이다.『원론』은 당대의 기하학적 지식을 집대성하였으므로 분할 불가능하다는 것의 의미를 이해하기 위해서 유클리드 이전에 어떻게 점을 정의하고 점에 대해 사유(思惟)하였는지 살펴보아야 한다.

최초로 점을 정의한 것으로 추정되는 피타고라스 학파는 점을 '위치가 있는 모나드(monad)'로 정의하였다(Heath, 1956; Morrow, 1970). 여기서 모나드는 unit을 의미하는 그리스어 monas에서 유래된 것[24]으로, 만물이 수(數)로 구성되어 있다고 생각한 피타고라스 학파는 수가 바로 이 모나드로부터 생겨난다고 하였다(Drozdek, 2016, p. 63). 따라서 피타고라스 학파에게 모나드는 '만물의 궁극적인 근원'으로 인식된다(Sextus Empiricus, 1976; kutateladze, 2006에서 재인용). 점은 위치가 있는 만물의 궁극적인 근원으로 이해할 수 있고 따라서 여기서의 점은 보다 포괄적이고 철학적인 의미를 지닌다.

모나드를 이용하여 점을 정의한 피타고라스 학파와 달리, 아리스토텔레스는 모나드와 점을 각각 정의한다. 아리스토텔레스의 『형이상학(Metaphysics)』에서 점은 '분할 불가능하면서 위치를 갖는 것', 모나드는 '분할 불가능하면서 위치를 갖지 않는 것'이라고 정의하였다[25](Furley, 1967, pp. 47-48). 이 정의에서 점과 모나드는 위치를 갖는지의 유무에만 차이가 있으므로 점을 위치가 있는 모나드로 정의한 피타고라스와 차이가 없어 보인다. 하지만 아리스토텔레스의 정의는 '분할 불가능성'을 직접적으로 언급하였다는 데에 의의가 있다. 아리스토텔레스는 『자연학(Physics)』에서 전체를 부분들로 나누는 것이 '분할'이며 이 부분들을 합쳐서 다시 전체를 구성할 수 있어야 한다고 하였다[26](유재민, 2009). 분할은 전체를 부분들로 쪼개어지는 것이므로 '점이 부분을 갖지 않는 것'은 '점은 쪼갤 수 없는 것'과 같은 의미라 할 수 있다. 한편, 유

24) Oxford English Dictionary에 따르면 오늘날 모나드는 1. 산술적 단위로써 숫자 일(一) 2. 신 또는 신에 대응되는 존재, 3. 존재의 분할 불가능한 단위, 절대적으로 단일한 실체, 4. 개별적인 인간 주체 등 다양한 의미를 갖는다.
25)『형이상학(Metaphysics)』1016 b 23-26.
26)『자연학(Physics)』 4권 10장, 218a6-8.

클리드의 정의는 아리스토텔레스의 점에 대한 정의인 '분할 불가능하면서 위치를 갖는 것'에서 '위치를 갖는 것'이라는 설명이 생략되었는데, Proclus(p. 93)는 그 이유를 기하학적 대상 중에서 분할 불가능한 것은 점이 유일하기 때문이라고 하였다.

다음으로 선의 정의에 대해 살펴보도록 하자.

정의 2. 선은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.

A line is breadthless length.

Proclus는 이 정의가 '길이(length)'라는 차원을 도입하며 다른 차원인 '폭(breadth)'은 부정한다고 하였다(p. 96). 또한, '폭'이 없다는 것에는 또 다른 차원인 '깊이(depth)'도 없음이 내재되어 있다고 하였다. 길이, 폭, 깊이는『원론』11권의 정의 1[27]에도 등장하지만 명시적으로 정의되지 않는 무정의 용어이다.

차원에 대해 최초로 고찰한 사람은 아리스토텔레스로 여겨진다. 아리스토텔레스는 『천체학[28]』에서 길이는 위와 아래 방향, 폭은 왼쪽와 오른쪽 방향, 깊이는 앞쪽과 뒤쪽 방향과 관련된다고 하였다. 아리스토텔레스의 맥락에서 차원은 분할이 가능한 방향의 수에 의해 결정되는 것으로 이해할 수 있다(Janich, 1992, p. 13). 아리스토텔레스는 선을 오직 한 방향으로만 분할 가능한 크기[29]라고 표현하였다. 아리스토텔레스에게 여기서의 분할은 무한히 가능하다(Janich, 1992). 같은 맥락에서 분할이 불가능한 점은 차원을 갖지 않는 것으로 이해할 수 있다.

점과 달리, 선은 그 길이와 모양에 따라 종류가 무수히 많다. 하지만 정의 2의 내용만으로는 특정한 종류의 선들만을 다루고자 한 것인지, 일반적인 모든 선들을 다루고자 한 것인지 정확히 알 수 없다. 하지만 이에 대해, Hartshorne(2000, p. 28)은 정의 2에서의 '선'은 현대 용어인 '곡선'에 대응된다고 하였다. Encyclopedia of mathematic에 따르면 곡선은

27)『원론』11권 정의 1 : 입체는 길이, 폭, 깊이를 갖는 것이다.
28) De caelo1, 2, 284 b 24
29) Metaph. 1016 b 25-27

직선을 포함하는 일반적인 선을 지칭한다. 정의 4에서 직선(straight line)이 따로 정의되는 것은 직선성(straightness)이 논리학에서의 종차(種差), 즉 상위개념에 속한 어떤 하위 개념들을 다른 하위 개념들과 구별되도록 하는 요소로 기능함을 알려준다. 즉, 정의 2의 선에는 직선성을 갖지 않는 선들이 포함된다. 직선성이 종차로 기능하는 것은 정의 8에서 각을 정의하고 정의 9에서 직선각을 따로 정의한 것에서 한번 더 확인할 수 있다[30].

요약하자면 점은 어떤 방향(차원)에서도 분할 불가능한 것, 선은 길이의 차원에서만 무한 분할 가능한 것이다. 하지만 점과 선의 정의만으로는 유클리드의 의도가 선이 단지 점들을 포함하는 것인지, 아니면 선이 점들이 모여 구성된 것인지 구체적으로 알기 어렵다(Tubbs, 2009, p. 207). 따라서 점과 선의 관계를 파악할 수 있는 정의 3과 공준 1을 순서대로 살펴보도록 한다.

정의 3. 선의 양 끝은 점들이다.

The extremities of a line are points.

Heath(1956, p. 165)는 정의 3이 점과 선 사이의 관계를 정립하기 위한 것으로 보았으며 유클리드의 고유한 아이디어라 하였다. 하지만, Proclus(AD. 412～485)는 이 정의 3의 모호함에 대하여 지적하였다(Morrow, 1970). 이를테면 이 정의는 ‘선의 양 끝’이 항상 존재하는 것처럼 가정하고 있는데, 원이나 무한히 이어지는 선과 같이 끝이 존재하지 않는 경우가 존재한다. 이에 대해, Heath(1956, p. 165)는 이 정의를 ‘만약 선이 끝을 갖는다면, 그 끝은 점들이다.’로 이해해야 한다고 하였다. 이에 따르면, 원의 일부분인 호(弧, arc)는 분명히 끝이 존재하며 그 끝은 점이 된다. 하지만 호가 계속 이어져 원이 된다면 그 끝은 존재하지 않게 된다.

---

30) 정의 8 : 평면에 있는 두 선이 서로 만나고, 그들이 한 직선에 놓여있지 않을 때, 그들이 서로 기운 정도를 각이라 부른다.

정의 9 : 각을 만드는 선이 둘 다 직선일 때, 그 각을 직선각이라 부른다.

공준 1. 모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다.

To draw a straight line from any point to any point.

『원론』에서 명시하지는 않지만 공준 1의 작도에 사용되는 도구가 ‘자’임을 짐작할 수 있는데, 작도는 『원론』에서 기하학적 대상의 존재성을 증명하는 방법이다(유미영, 최영기, 2015; 김창수, 강정기, 2017; Hartshorne, 2000, p. 2). 따라서 공준 1은 작도를 통해 직선의 존재성을 보장한다. 또한, 작도 경험을 통해 두 점을 지나는 직선이 단 하나인 것을 확인할 수 있다는 점에서, 직선의 유일성을 함의한다고 볼 수 있다. 두 점을 지나는 직선의 유일성에 대한 인식은 명제의 증명에서도 드러난다. 현대 수학의 ASA 합동 정리에 대응되는 명제 4[31]의 증명 과정에서는 다음과 같은 논리가 등장한다. ‘완전히 포개어지지 않는다는 것은 두 점을 지나는 직선들 사이에 공간이 생긴다는 것이다. 하지만 두 점을 지나는 직선은 유일하므로 이것은 불가능하다.’(Hartshorne, 2000).

Tall & Katz(2014)는 작도를 통해 한 점에서 다른 점까지 그려진 선은 단일한 개체로 인식되며 점들은 선의 구성 요소가 아닌 선 위에 존재하는 것으로 보았다[32]. 또한, Mueller(1969, p. 299)는 『원론』에서 다루어지는 기하학적 대상들이 수학적으로 구조화된 개체가 아니라 직관적으로 인지되는 공간적 개체라 하였다. 『원론』에서 점은 어떠한 수학적 체계나 구조를 구성하는 것으로 간주되지 않는데, Mueller는 그렇기 때문에 현대 수학의 관점에서 『원론』의 논리적 결함[33]이 많은 것임을 지적하였다. 점을 수학적 대상의 구성 요소로 인식하는 것은 현대 수학의 사고 방식으로, 이러한 사고의 발전이 『원론』의 결함을 발견할 수 있

31) 명제 4 : 두 삼각형의 두 변의 길이가 각각 같고, 그 두 변이 만드는 각의 크기가 같다고 하자. 그러면 나머지 한 변의 길이도 같으며, 두 삼각형은 서로 같다. 또한 남은 각, 즉 같은 길이의 변과 마주 보는 각의 크기가 서로 같다.

32) 이러한 인식은 Tall이 제시한 수학적 사고의 발달 양식 중 ‘조작적 상징주의(operational symbolism)’에 해당한다. 조작적 상징주의는 물리적 행위를 통해 수학적 과정들이 연산과 기호로 개념화되는 것을 일컫는다(Tall & Katz, 2014).

33) 『원론』의 논리적 결함은 제 4장의 제 1절에서 다루도록 한다.

는 기반이기 때문이다.

정리하자면 『원론』에서의 선은 점의 집합 관점보다는 자연 연속체 관점에 가깝다[34]. 그 근거는 첫째, 선과 점의 정의 자체를 통해서는 점들이 모여 선을 구성하는 것으로 생각하기 어렵다(Tubbs, 2009, p. 207). 둘째, 선과 점의 관계를 드러내는 정의 3, 공준 1에서도 선 끝의 점과 작도의 기준이 되는 점이 나타날 뿐 점들이 무한히 모여 선이 되지 않는다. 특히, 작도된 선은 단일한 개체로 인식된다(Tall & Katz, 2014). 셋째, 『원론』에서 기하학적 대상은 수학적으로 구조화되지 않고 직관적으로 인지되는 공간적 개체이다(Mueller, 1969). 따라서 본 연구자는 『원론』에서의 선은 '자연 연속체'에 가깝다고 판단하였으며 자연 연속체의 관점에서 직선, 선분, 반직선을 개념화하기 위해 앞에서 살펴본 '정의 3 : 선의 양 끝은 점들이다'에 주목하였다. 이어서 다음 절에서는 정의 3에 주목한 까닭과 『원론』에서 경계 개념의 중요성에 대해 살펴보기로 한다.

3. 끝, 둘레, 둘러싸이다

앞서 Heath(1956)가 말한 바와 같이 정의 3은 점과 선 사이의 관계를 정립한다는 측면에서 중요하지만 이것이 정의 3이 중요한 유일한 이유는 아니다. 정의 3이 중요한 또 다른 이유는 이 정의에서 사용되는 '끝'이라는 용어가 기하학적 대상을 정의하는 데에 지속적으로 사용되기 때문이다. 'A의 끝은 B이다'와 같은 형태는 '정의 6 : 면의 끝은 선들이다'과 『원론』11권의 '정의 2 : 입체의 끝은 면들이다'에서 다시 등장한다. 여기서 '끝'은 점과 선, 선과 면, 면과 입체의 관계를 설명하는 중요한 용어이지만 직접적으로 정의되지 않고 사용되는 일종의 무정의 용어이다.

한편, '끝'이라는 용어가 포함된 또 다른 정의는 바로 '둘레'에 대한 정

34) 직선의 정의인 '점들이 쭉 곧게 있는 것'이 선을 '점의 집합'으로 보는 관점이 아니냐는 반론이 있을 수 있다. 하지만 이것은 '쭉 곧게'라는 표현의 모호함과 '작도된 직선은 선을 점과 독립적인 개체로 인식하게 한다'는 Tall & Katz(2014)에 의해 재반박 가능하다.

의이다. 정의 13에서 ‘둘레는 어떤 것의 끝’으로 정의된다. 그리고 둘레는 정의 14에서 도형(figure)을 정의하는 데에 사용된다. 정의 14는 ‘도형은 둘레 또는 둘레들에 둘러싸인 것이다’인데 이러한 정의 형태, 즉 ‘A는 B에 둘러싸인 것이다(A is/are contained by B)’는 이후에 여러 기하학적 대상을 정의하는 데에 공통적으로 사용되는 방식이다. 정리하자면, ‘끝’, ‘둘레’, ‘둘러싸이다’는 기하학적 대상의 정의에 내용이나 형식적인 측면에서 연쇄적으로 기하학적 대상의 정의에 사용된다

<표 Ⅲ-2> ‘끝, 둘레, 둘러싸이다’가 등장하는 정의 (Heath, 1956; 이무현, 2018)

	내 용		비 고
‘끝’에 대한 정의	1권 정의 3	선의 양 끝은 점들이다.	
	1권 정의 6	면의 끝은 선들이다.	
	11권 정의 2	입체의 끝은 면들이다.	
‘둘레’에 대한 정의	1권 정의 13	둘레는 어떤 것의 끝이다.	
‘둘러싸이다’가 사용되는 정의	1권 정의 14	도형은 둘레 또는 둘레들에 둘러싸인 것이다.	1권 외의 정의들은 〈부록1〉 참조
	1권 정의 15	원은 어떤 선으로 둘러싸인 평면도형이 있어서, ..(후략)..	
	1권 정의 18	반원은 지름과 지름에 의해 잘린 원둘레에 둘러싸인 도형이다. ..(후략)..	

하지만, 사실 ‘끝’, ‘둘레’, ‘둘러싸이다’에 대한 정의와 그 쓰임들은 엄밀하지 않기 때문에 직관적으로 이해할 수 밖에 없고 그 과정에서 모호함이 야기된다. 이를테면 다음과 같은 모호함이 존재한다. 첫째, 각종 도형을 둘레 또는 둘레들에 둘러싸인 것으로 정의할 때 그 도형이 내부를 포함하는 것인지 경계만을 일컫는 것인지 명확하지 않다는 점이다. 이러한 모호함 때문에 『원론』에 대한 서로 다른 해석이 존재한다.

Kidd(1999, p. 259)는 유클리드의 도형 정의가 경계와 내부를 모두 포함하는 것으로 본 반면, Posidonius는 도형을 경계로만 파악하였다. 학교수학에서도 다각형은 선분으로만 둘러싸인 것으로 정의되는데 이 정의의 모호함 때문에 내부의 포함 여부에 대한 문제가 발생한다(박교식, 임재훈, 2004). 둘째, 점이 선의 끝인 것은 선이 면의 끝, 면이 입체의 끝인 것과 동일하게 이해하기 힘들다는 점이다. 먼저, 『원론』의 정의에 따르면 선의 끝, 면의 끝, 입체의 끝은 각각 점, 선, 면이고, 어떤 것의 끝은 둘레로 정의한다. 따라서 점, 선, 면은 각각 선, 면, 입체의 둘레이다. 하지만, Proclus는 이 '둘레'라는 용어가 선, 면, 입체에 동일하게 적용되지 않는다고 하였다(Morrow, 1970, p. 136). 그 이유는 선은 면을 둘러싸고 면은 입체를 둘러싸지만 점은 선을 둘러싸지 않기 때문이다. 물론 이것은 '둘러싸다'라는 표현 자체도 수학적으로 엄밀하지 않기 때문에 생기는 문제이다.

하지만 이러한 모호함이 존재한다고 해서 『원론』에서 '끝, 둘레, 둘러싸다'로 표현되는 이른바 '경계' 개념의 중요성이 훼손되는 것은 아니다. 앞서 살펴본 내용과 같이 『원론』에서의 선은 직관적으로 인식되는 개체이지 수학적으로 엄밀히 구조화된 개체가 아니며, 이것은 다른 도형들에 대해서도 마찬가지이다. '경계'에 대한 개념은 현대 수학의 중요한 갈래 중 하나인 위상수학에서 엄밀히 정의되지만, 『원론』을 분석하고 고찰함에 있어 일방적으로 현대 수학의 관점만을 갖는 것은 적절하지 않다. 현대 수학의 관점에서만 바라보는 것은 『원론』이 탄생한 시대와 배경을 도외시하는 것은 물론이고 분석 자체에도 한계가 있기 때문이다. 따라서 본 연구자는『원론』에서 경계 개념이 중요하다는 입장을 견지하고 '정의 3 : 선의 양 끝은 점들이다'에 주목하고자 한다. 선의 끝에 존재하는 점, 즉 경계점은 직선, 선분, 반직선을 구분하는 기준이 될 수 있다고 판단하였으며 제 4 장에서 경계와 경계점에 대해 더 깊은 논의를 하고자 한다. 이를 통해 자연 연속체 관점에서 직선, 선분, 반직선을 개념화하도록 한다.

제 2 절 힐베르트의 『Foundations of Geometry』

1. 직선, 선분, 반직선

힐베르트 공리계에서 직선은 명시적으로 정의되지 않는다. 하지만 힐베르트 공리계에 대한 일부 연구에서는 무정의 용어인 ‘선(line)’을 직선으로 해석한다. 예를 들어, Wylie(1944), Greenberg(1993), 양성덕, 조경희(2011)의 연구에서는 직선을 무정의 용어로 보고 있다. 그 까닭은 선의 의미는 공리들에 의해 규정되는데, 힐베르트 공리계를 만족하는 모델 중 하나가 무정의 용어인 선을 직선으로 해석하는 것이기 때문이다. 이에 대한 자세한 설명은 ‘3. 점과 선의 관계’에서 다루기로 한다.

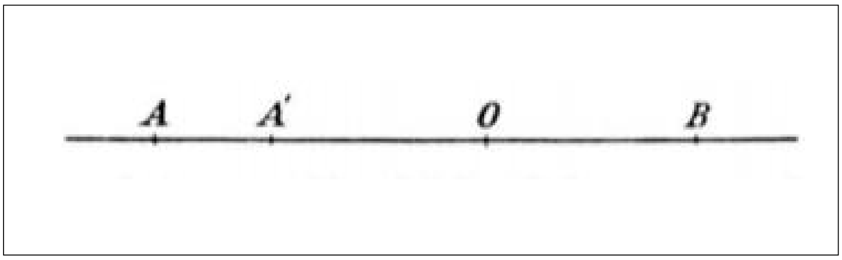
한편, 선분은 다음과 같이 정의된다.

> 선 a 위의 두 점 A, B를 고려하자. A와 B의 집합을 선분(segment)이라 부르고, AB나 BA로 표기할 것이다. A와 B 사이에(between) 있는 점들은 선분 AB의 점들이라 부르고 또한 선분 AB의 안(inside)에 있다고 말한다. 점 A, B는 선분 AB의 끝점(end point)이라 부른다. 선 a의 다른 모든 점들은 선분 AB의 밖(outside)에 놓여있다고 말한다(Hilbert, 1971, p. 5).

선분을 유한 직선(finite straight line)으로 암묵적으로 사용한 『원론』과 달리, 힐베르트 공리계에서는 선분이 명시적으로 정의된다. 하지만 힐베르트 공리계에서 선분은 우리가 갖는 일반적인 생각과는 달리 두 점 집합을 지칭한다. 그리고 점 A, B의 사이에(between) 있는 점들을 내부, 나머지 점들을 외부에 있는 것으로 정의한다. 이렇게 ‘사이에’와 ‘집합’이라는 표현을 통해 선분 AB와 선분 AB의 점들을 정의하고 있는데 이것은 Lakoff & Núñez(2000, p. 306)가 분류한 선의 개념화 방법 중 선을 점들의 집합으로 보는 것에 대응된다고 할 수 있다.

또한, 반직선은 다음과 같이 정의된다.

점 A, A', O, B를 선 a 위의 네 점이라 하자. 이때, O는 A와 B 사이에(between) 있지만 A와 A' 사이에 있지는 않다. A와 A'는 선 a 위에서 점 O의 같은 쪽에 있다고 말하고, A와 B는 선 a 위에서 점 O의 다른 쪽에 있다고 말한다. 선 a 위에서 점 O의 같은 쪽에 있는 점들의 집합(totality)을 O로부터 시작되는 반직선(ray emanating from O)이라고 부른다(Hilbert, 1971, p. 8).



[그림 Ⅲ-2] 『Foundations of Geometry』에서 반직선 (Hilbert, 1971, p. 8)

2. 무정의 용어인 점과 선

힐베르트 공리계에서 점과 선은 다음과 같다.

여기서 세 가지 대상의 개체를 고려하고자 한다. 첫 번째 대상을 점이라 하고, A, B, C, ... 등으로 표기하자. 두 번째 대상은 선이라 하며, a, b, c, ... 등으로 표기하자(Hilbert, 1971, p. 3).

힐베르트 공리계에서 점과 선은 정의하지 않고 남겨두는 무정의 용어이다. 이것은 점과 선의 본질을 사전적으로 기술하고자 한 『원론』과 대조적이다. 『원론』에서의 정의 방식은 공간 직관에 의존할 여지를 두어 논리적 결함의 한 요인이 되는데(Mueller, 1969, pp. 294-295), 힐베르트 공리계에서 점과 선은 경험적이고 직관적인 이해는 배제되고 오로지 집합의 원소들로 이해된다(Boyer & Merzbach, 1991). 점과 선의 의미는 내재적인 본질이 아니라 그것들의 사용 규칙인 공리 체계에 의해 결정되므로 만약 공리체계 내에서 모순이 없다면 다른 단어나 기호로 대체 가

능하다(Nagel, 1939, p. 202). 점과 선은 절대적인 대상을 지칭하는 고정된 상수가 아니라 공리 체계를 만족하는 임의의 변수이며(이지현, 2011) 그렇기 때문에 공리체계 전체를 살펴보는 것이 더욱 중요하다.

힐베르트 공리계뿐만 아니라 일반적인 현대 기하학에서는 점을 사전적으로 정의하지 않는 것이 보편적이다. Eves(1969)는 공리-연역적 체계에는 직관이 개입하여 논리의 결점이 생길 수 있는데, 이를 피하기 위해서는 용어들을 의미가 배제된 기호로 대체하여 엄격한 논리를 기반으로 결론에 도달해야 한다고 하였다. 또한, Greenberg(1993)는 한 용어를 정의하기 위해서는 또 다른 용어를 사용해야 하고, 어떤 용어를 정의하지 않는 것으로 남겨놓지 않는다면 무한회귀에 빠질 것이라고 하였다. 따라서 현대 수학에서는 점에 내재된 의미를 기술하는 사전적 정의 대신, 의미를 배제한 형식적 정의를 내린다.

어떤 대상을 형식적으로 정의한다는 것은 그 대상을 무정의 용어로 남겨두는 것을 의미한다. 무정의 용어란 말 그대로 정의되지 않은 채 사용되는 용어를 의미한다(박교식, 임재훈, 2005). 한 예로, Birkhoff & Beatley(1999)의 『Basic geometry』에서는 점을 무정의 용어로 둔다. 또한, The School Mathematics Study Group(SMSG)은 고등학교 기하 교육을 위해 Hilbert와 Birkhoff의 공리체계를 절충하여 22개의 공리를 구성하였는데 이 공리계에서도 점은 무정의 용어로써 취급된다. 하지만 어떤 대상이 무정의 용어로 다루어진다고 해서 아무런 의미를 갖지 않는 것은 아니며, 그 대상의 의미와 쓰임은 그 대상을 포함하는 일련의 공리들을 통해서 규정된다(홍갑주, 강정민, 2017).

3. 점과 선의 관계

힐베르트 공리계에 존재하는 총 5개의 공리군은 결합, 순서, 합동, 평행, 연속에 대한 내용을 담고 있는데 결합 공리군은 8개, 순서 공리군은 4개, 합동 공리군은 5개, 평행 공리 1개, 연속 공리군은 2개의 공리로 이루어져 있다. 이 중에서 점과 선의 관계를 규정하는 공리는 결합 공리군,

순서 공리군이다. 구체적인 분석의 대상이 되는 공리는 결합 공리 1, 2, 3과 순서 공리 1, 2, 3이다.

<표 Ⅲ-3> 결합 공리 1, 2, 3 (Hilbert, 1971)

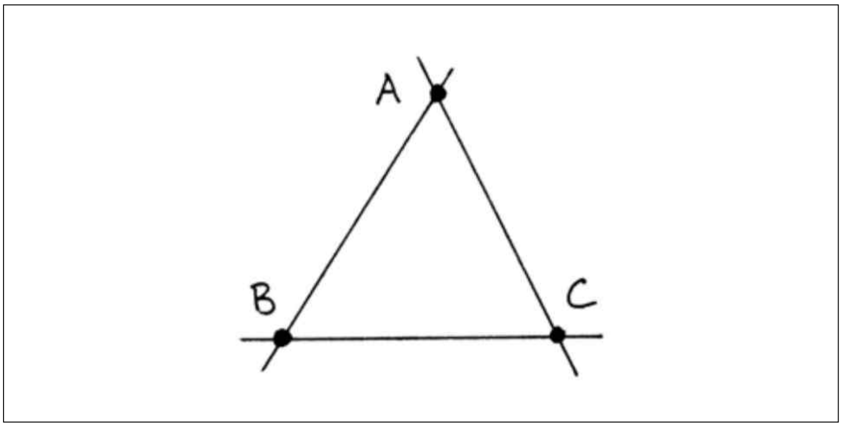
		내용
결합 공리	1	어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 선이 있다.
	2	어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 선은 많아야 하나 있다.
	3	한 선에는 점이 적어도 두 개 있다. 한 선에 있지 않은 점이 적어도 세 개 있다.

결합 공리 1은 두 점을 지나는 선의 존재성은 보장하지만 그 선이 유일한지 여부는 확실하지 않다. 결합 공리 2는 두 점을 지나는 선은 두 개 이상은 존재하지 않으며 유일성을 보장한다. 결합 공리 1과 2를 합하면 어떠한 두 점에 대해서도 그 두 점을 지나는 선이 오직 하나 존재함을 보장한다. 이것은 원론 1권 명제 4의 증명에서 암묵적으로 등장하였던 두 점을 지나는 선의 유일성을 공리화한 것이다(Hartshorne, 2000).

이는 원론의 공준 1인 '모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다'와 비교 가능하다. 공준 1은 눈금없는 자의 역할을 의미하는데 두 점이 있다면 직선을 작도할 수 있다는 점에서 결합 공리 1과 대응된다. 한편 실제로 두 점을 지나도록 선을 긋는 작도는 오차가 없는 이상적인 상황에서 오직 하나의 선만을 만든다. 즉, 작도라는 행위와 그 결과에 대한 직관은 결합 공리 2에서 말하는 유일성과 대응된다. 힐베르트 공리계에서 점과 선이 어떠한 공간적인 모델을 특별히 지칭하는 것은 아니지만, 유클리드 원론과 견주어 본다면 힐베르트 공리계에서의 선은 유클리드의 '직선'에 해당한다고 볼 수 있다. 그렇게 본다면 결합 공리 3은 '직선에는 점이 적어도 두 개 있다'로 이해 가능하다.

결합 공리 1, 2, 3을 만족하는 점과 선들의 집합을 결합 기하학(incidence geometry)라고 한다(Hartshorne, 2000). 결합 기하학을 만족

하는 모델로는 세 점 집합이 있다. 점들의 집합을 $\{A, B, C\}$로 정하고, 그 부분집합인 $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$를 선이라 하자. 이것은 [그림 Ⅲ-3]과 같은 다이어그램으로 나타낼 수 있지만 이것은 평면 위의 삼각형과는 관련이 없다.



[그림 Ⅲ-3] 결합 기하학을 만족하는 모델 (Hartshorne, 2000, p. 67)

다음으로는 순서 공리군을 살펴보도록 하자. Hartshorne(2000, p. 65)은 유클리드 『원론』과 비교하였을 때 힐베르트 공리계 중에서 가장 획기적인 부분이 순서 공리군(order axioms)이라 하였다. 순서 공리군은 무정의 용어 '사이에(between)'의 의미를 규정하고 이를 통해 선, 면, 공간에서 존재하는 점들에 순서를 부여하는 것이 가능해진다. '사이에'는 다음과 같이 선 위의 점들의 관계를 기술하는 용어이다.

(정의) 선의 점들은 서로 특정한 관계에 있으며, 그것을 기술(description)하기 위해 "사이에(between)"이라는 단어가 사용될 것이다(Hilbert, 1971, p. 5).

<표 Ⅲ-4> 순서 공리 1, 2, 3 (Hilbert, 1971)

	내용
순서 공리 1	점 B가 A와 C 사이에 있으면, A, B, C가 한 선의 서로 다른 세 점이고 B는 또한 C와 A 사이에 있다.
순서 공리 2	임의의 두 점 A와 C에 대하여, 선 AC에 적어도 한 점 B가 있어서 C가 A와 B 사이에 있다.
순서 공리 3	한 선에 있는 세 점 중 많아야 한 점만이 나머지 두 점 사이에 있다.

Greenberg(1993)의 논의를 중심으로 순서 공리 1, 2, 3의 의미를 구체적으로 살펴본다.

순서 공리 1 : 점 B가 A와 C 사이에 있으면, A, B, C가 한 선의 서로 다른 세 점이고 B는 또한 C와 A 사이에 있다.

[그림 Ⅲ-4] 순서 공리 1 (Hilbert, 1971, p. 5)

Greenberg(1993)는 "점 B가 점 A와 점 C 사이에 있다"를 $A * B * C$로 표현하는데, 간결함을 위해 본 연구에서는 이 표현을 따르기로 한다[35]. 순서 공리 1은 사실 다음 명제 두 개가 결합된 것으로 볼 수 있다.

(1) $A * B * C$ 이면 점 A, B, C 는 직선 위의 서로 다른 세 점이다.
(2) $A * B * C$ 이면 $C * B * A$ 이다.

(1)은 두 점 A, B와 그들 사이의 세 번째 점 C가 주어졌을 때, 점 C

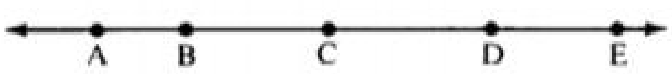
35) '점 B가 점 A와 C 사이에 있다'를 나타내는 표현은 연구자마다 다양하다. 하지만 본 연구에서는, 특히 제 4장에서 사이성에 대해 논할 때 기본적으로 '$A * B * C$'를 사용하기로 한다. 하지만 필요한 경우에는 다른 표현을 사용하고 그 의미를 설명하였다.

가 직선 AB 위에 있다는 것을 보장한다. 유클리드『원론』에서 '사이'가 정의되지 않은 용어임을 상기할 때, 유클리드 공리만을 이용하여 이 사실을 증명하는 것은 불가능하다. 또한, (2)는 B가 'A와 C 사이에 있다'와 'C와 A 사이에 있다'가 동등하다는 것을 의미한다.

순서 공리 2 : 임의의 두 점 A와 C에 대하여, 선 AC에 적어도 한 점 B가 있어서 C가 A와 B 사이에 있다.

[그림 Ⅲ-5] 순서 공리 2 (Hilbert, 1971, p. 5)

순서 공리 2의 의미는 아래 [그림 Ⅲ-6]와 같이 주어진 다른 두 점 B와 D에 대해, $A*B*D$, $B*C*D$, $B*D*E$ 를 만족하는 점 A, C, E가 직선 BD 위에 존재한다는 것이다.

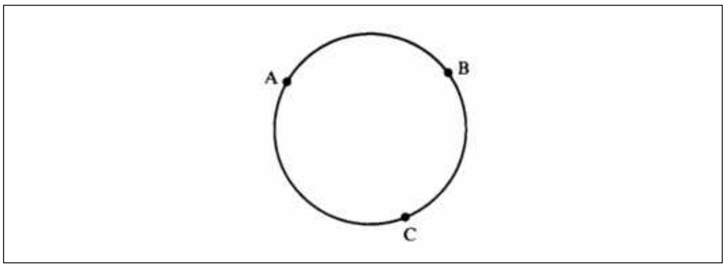


[그림 Ⅲ-6] 순서 공리 2 (Greenberg, 1993, p. 74)

즉, 순서 공리 2는 직선 위의 임의의 두 점에 대해 그 두 점 사이뿐만 아니라 두 점 사이가 아닌 위치에 있는 직선 위의 점들의 존재성을 부여하고 있다. 따라서 직선 BD는 점 B나 점 D에서 끝나지 않는다.

순서 공리 3인 '한 선에 있는 세 점 중 많아야 한 점만이 나머지 두 점 사이에 있다'는 선이 순환하지 않음을 보장한다. 만약 아래 [그림Ⅲ

-7]과 같이 세 점이 원 위에 있다면, 모든 각 점은 서로 다른 두 점 사이에 있다고 말해야 한다. 혹은 어떤 호를 바라보느냐에 따라 어떤 점도 다른 두 점 사이에 있지 않다고 말할 수도 있을 것이다(Greenberg, 1993, p. 74).



[그림 Ⅲ-7] 원 위에 세 점이 존재하는 경우 (Greenberg, 1993, p. 74)

제 3 장에서는 첫 번째 연구 문제인 "유클리드와 힐베르트의 기하학 공리계에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 정의되는가? 만약 정의되지 않는다면 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 기반이 될 수 있는 정의나 공리는 무엇인가?"에 대한 답을 찾는 것이 목표였다. 이에 대해 답하면 다음과 같다. 유클리드 공리계에서는 직선(straight line)만이 명시적으로 정의되고 선분은 유한한 직선(finite straight line)이라는 용어로 암묵적으로 등장하는 것을 확인하였다. 또한, 반직선은 명시적으로 정의되지 않고 암묵적으로 사용되지도 않는다. 유클리드 공리계에서 선은 수학적으로 구조화되지 않은 직관적이고 단일한 개체로 자연 연속체 관점에 대응된다고 보았으며, '정의 3 : 선의 양 끝은 점들이다'에 등장하는 끝점, 즉 경계점이 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 기반이 될 것으로 보았다. 한편, 힐베르트 공리계에서 직선은 명시적으로 정의되지는 않는 반면, 선분과 반직선이 무정의 용어인 '사이에(between)'를 이용하여 '～인 집합'으로 정의된다. 따라서 힐베르트 공리계에서 선은 점의 집합 관점에 대응된다고 보았으며, 직선, 선분, 반직선을 정의하거나 이해하는 데에 무정의 용어 '사이에'의 의미를 규정하는 순서 공리군이 중요하다고 보았다.

제 4 장 관점의 도출을 위한 논의

본 장에서는 두 번째 연구 문제인 “경계와 사이성에 대한 역사적, 수학적, 철학적 논의를 바탕으로 선을 ‘자연 연속체’와 ‘점의 집합’으로 보는 두 관점에서 직선, 선분, 반직선은 어떻게 개념화되는가? 각 관점에서 점이 갖는 특성은 무엇인가?”에 대한 답을 찾는 것이 목표이다.

제 1 절 경계와 사이성

관점에 대한 논의를 하기에 앞서 ‘경계’와 ‘사이성’에 대한 용어의 의미를 명확히 밝힐 필요가 있다. 먼저, 『원론』에서는 기하학적 개념을 정의하고 설명함에 있어 ‘끝, 둘레, 둘러싸이다’라는 용어가 반복적으로 사용된다. 앞으로의 논의에서는 분석의 용이함을 위해 ‘경계’를 끝과 둘레를 총칭하는 의미로 사용하기로 한다. 또한, ‘～에 둘러싸이다’는 ‘～에 의해 경계지어지다’로 이해하고자 한다. 그 이유는 다음과 같다. 첫째, 표준국어사전에서 경계의 의미는 끝, 둘레의 의미와 유사하다[36]. 둘째, ‘경계’는 위상수학에서 정의되고 사용하는 용어이다. 셋째, 점과 선의 특성을 다룬 아리스토텔레스에 대한 연구에서 ‘경계’라는 용어가 사용된다[37].

한편,『Foundations of Geometry』에서는 무정의 용어인 ‘사이에’의 의미가 순서공리군에 의해 규정되며 선분과 반직선을 정의하는 데에 사용된다. 이에 ‘사이에(between)’의 명사형인 ‘사이성(betweenness)’을 순서공리군에 의해 무정의 용어 ‘사이에’가 갖게 되는 의미의 총칭으로 약속한다. 이후의 논의를 통해 사이성의 의미를 보다 구체화할 것이다.

---

36) 경계, 끝, 둘레의 사전에서의 의미는 다음과 같다. ‘끝’은 시간, 공간의 한계도 포함하지만 이 세 단어는 모두 공통적으로 사물의 한계 혹은 테두리를 의미한다.

경계 : 사물이 어떠한 기준에 의하여 분간되는 한계

끝 : 시간, 공간, 사물 따위에서 마지막 한계가 되는 곳

둘레 : 사물의 테두리나 바깥 언저리

37) 아리스토텔레스에서 기하학적 대상의 존재론적 위상과 경계적 성격(유재민, 2009).
자연철학에서 ‘경계’(peras) 개념과 제논의 장소의 역설(유재민, 2015).

1. 경계에 대한 논의

1.1. 아리스토텔레스의 담론

아리스토텔레스는 『형이상학(Metaphysics)』4권에서 ‘경계’를 크기 혹은 크기를 갖는 것의 형태로 정의하였다(유재민, 2015). 여기서 크기 자체는 경계와는 무관한 순수한 양(量)을 의미한다. 따라서 기하학적 대상들은 크기라는 ‘양’과 형태라는 ‘경계’로 구성된다고 할 수 있다. 아리스토텔레스에 따르면 이 두 구성 요소에 의해 기하학적 대상이 갖는 특성이 파생되는데, 어떤 기하학적 대상이 ‘크기’를 가질 때 ‘양적인 성격’을 가진다고 하며, 어떤 기하학적 대상 A가 다른 기하학적 대상 B의 ‘경계’가 될 때 A는 ‘경계적 성격’을 갖는다고 한다. 예를 들어 점은 크기를 갖지 않기 때문에 양적인 성격은 갖지 않으며 오로지 ‘경계적 성격’만을 갖는다고 하였다(유재민, 2009). 아리스토텔레스가 말한 ‘경계’와 기하학적 대상의 ‘경계적 성격’의 특징을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 기하학적 대상의 ‘경계적 성격’은 분할 불가능성을 기반으로 한다. 기본적으로 경계는 분할과 밀접한 관련이 있다. 아리스토텔레스에게 분할 개념은 『자연학(Physics)』에서 드러나는데, 어떤 대상(전체)이 부분들로 나누어지는 것을 ’분할‘되었다고 하며 이때 이 부분들은 다시 합쳤을 때 전체를 구성할 수 있어야 한다[38](유재민, 2015). 한편, 아리스토텔레스는 『형이상학(Metaphysics)』 13권에서 ‘경계는 (다른 대상을) 분할하는 도구이지만, 그 자체로 분할될 수는 없다’고 하였다. 여기서 분할의 대상이 자기 자신인지 아니면 다른 대상인지에 따라 분할 가능 여부가 다름을 알 수 있다. 이런 관점에서 점은 그 자체로는 분할될 수 없지

38) 따라서 아리스토텔레스의 관점에서 점은 선의 ‘부분’이 아니다. 왜냐하면 아리스토텔레스는 점은 크기를 갖지 않는 것이고 크기를 갖지 않는 점은 아무리 많이 모아도 선이 될 수 없다고 보았기 때문이다. 아리스토텔레스는 선을 분할해서 만들어지는 부분들은 ‘단위-선’이라고 보았으며 선을 점들이 모인 것으로 환원하려는 체계가 아니다. 각 차원의 대상들은 다른 상위 혹은 하위 차원의 대상들에 ‘독자적으로’ 존재한다(유재민, 2009). 이것은 선과 점을 독립적으로 보는 것은 자연 연속체 관점과 유사하다고 할 수 있다.

만 선을 분할할 수 있는 도구이다(유재민, 2015).

그런데 유재민(2015)에 의하면 '분할'에 있어 중요한 것 중 하나는 기하학적 대상을 어떤 차원에서 분할하느냐이다. 아리스토텔레스는 선분은 폭과 깊이는 갖지 않으므로 길이에 있어서만 점에 의해 분할 가능하다. 다시 말해 점이 '선을 분할하는 도구'로 쓰일 때에는 '길이'의 차원에서만 분할하는 것이다. 선은 넓이와 폭을 갖지 않는데 이것은 선은 넓이와 폭의 차원에서 그 자신이 분할될 수 없다는 뜻이며, 반대로 선은 면을 넓이와 폭의 차원에서 분할할 수 있다. 요약하자면 기하학적 대상이 어떤 차원에서 분할 불가능할 때, 다른 기하학적 대상을 그 차원에서 분할하는 것이 가능하다. 따라서 길이, 폭, 깊이를 모두 갖는 '입체'는 이 세 가지의 차원에서 자신이 분할되므로 다른 대상을 분할하는 경계가 될 수 없다. 이것은 점, 선, 면, 입체에 일관되게 적용된다(유재민, 2009).

둘째, 경계는 잠재적이다. 표준국어대사전에 따르면 '잠재적'이란 '겉으로 드러나지 않고 숨은 상태로 존재하는'을 의미한다. 선을 분할하는 도구, 즉 선의 경계인 점이 잠재적이라는 것은 다음과 같이 이해할 수 있다. 선이 하나의 점에 의해 두 개의 선으로 분할되었다면 한 선의 끝에는 점이 있고 다른 한 선의 시작에도 점이 있다. 하나의 점으로 분할하였는데 두 개의 점이 생겨난 셈이다. 하지만 점은 분할 불가능하므로 이것을 하나의 점이 분할되어 두 개의 점이 된 것으로 이해할 수 없다. 아리스토텔레스에 따르면 이것은 한 점의 '질료'가 두 점이라는 '형상'으로 나타난 것으로 이해할 수 있다. 즉 '점이 잠재적'이라는 것은 선 위에 점이 '질료'로써 숨어있다가 분할에 의해 두 개의 '형상'으로 드러날 수 있다는 것을 뜻한다[39]. 물론 여기서 '분할이라는 조작'은 실제의 물리적인 행동이 아니라 사유에 의해 이루어지는 것이다. 잠재적으로 존재하는 기하학적 대상은 사유에 의해 현실화된다[40](유재민, 2009).

---

39) 아리스토텔레스의 철학에서 질료와 형상은 주요한 개념인데, 질료는 가능성을 의미하는 가능태, 형상은 가능성이 발현된 형태인 현실태이다. 본 연구의 이론적 배경에서 살펴보았던 홍진곤(2008, p. 474)의 비유를 다시 살펴보자면 조각되지 않은 대리석은 가능태(가능성으로서의 존재), 대리석을 조각하여 만든 작품은 현실태(형상이 실현된 존재)라 할 수 있다.

그렇다면, 분할된 대상이 다시 결합하면 경계는 어떻게 되는가? 두 물체가 결합할 때, 두 물체가 결합되는 지점에 있던 두 경계가 결합 후 없어진다. 여기서 말하는 없어진다는 것은 아예 소멸된다는 뜻이 아니며, 실체로써 존재하던 경계의 존재성이 잠재적으로 변한다는 뜻이다. 두 경계는 하나의 공통의 경계(koinon horon)를 가지게 되며, 이것은 그 대상이 연속이라는 뜻이다[41](유재민, 2008).

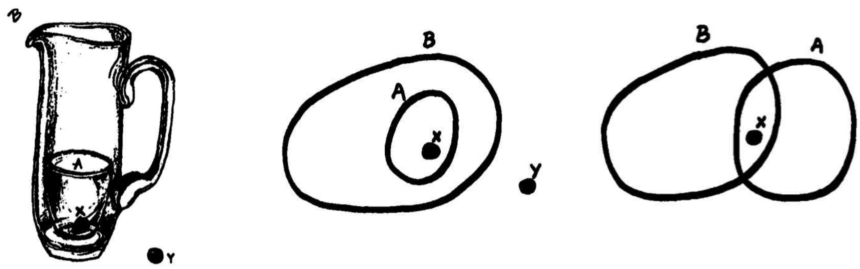
1.2. 컨테이너 스키마

Lakoff & Núñez(2000, pp. 30-32)는 인간이 가지고 있는 경계와 관련된 인지 구조를 컨테이너 스키마(Container schema)라 하였다. 컨테이너 스키마는 안(in)과 밖(out)이라는 단어들의 의미 작용에 핵심적인 역할을 한다. 컨테이너 스키마는 오로지 경계만으로 구성되지는 않는다. 스키마는 *내부(Interior), 외부(Exterior), 경계(Boundary)*로 구성된다. 이때, 경계와 외부가 없이는 내부도 존재하지 않으며, 경계와 내부가 없이는 외부가 존재하지 않는다. 마찬가지로 외부와 내부가 없이는 경계가 존재하지 않는다. 즉, 이 구조는 전체가 갖추어지지 않는다면, 그 어떤 부분도 존재성과 의미를 상실한다.

이러한 특징은 본질적으로 생활 속에서 인간의 다양한 인지 경험과 밀접하게 관련되어 있는데, 이를테면 '유리잔 속에 우유가 들어있고 우유 속에는 시리얼이 있다([그림 Ⅳ-1]의 (a) 참조)[42]'와 같은 시각적 인지와 들어맞는다. 우유(A)는 유리잔(B)이라는 경계에 의해 유리잔 밖(Y)이 아닌 내부에 존재한다. 이러한 인지적 경험은 그림 (b)와 같은 내재적인 공간 도식을 자연스럽게 도출시키고 (b)-1, (b)-2와 같은 공간 논리를 이끌어낸다.

---

40) 『형이상학(Metaphysics)』 1051a 21-33 참고.
41) 『범주론』에서 아리스토텔레스는 어떤 대상의 부분들이 공통의 경계를 가진다면 그 대상은 연속이라고 하였다(유재민, 2008). 하지만 연속에 대한 다른 정의도 존재하는데, 무한분할 가능한 것을 연속이라고 정의한다.
42) [그림 Ⅳ-1]의 (a)에서 유리잔은 B, 우유는 A, 시리얼은 X, 유리잔 밖은 Y이다.



(a) (b) (c)

(b)-1 컨테이너 스키마 A, B와 개체 X에 대해, A가 B 안에 있고, X가 A 안에 있다면, X는 B 안에 있다.
(b)-2 컨테이너 스키마 A, B와 개체 Y에 대해, A가 B 안에 있고, Y는 B의 밖에 있다면, Y는 A의 밖에 있다.

[그림 Ⅳ-1] 컨테이너 스키마 (Lakoff & Núñez, 2000, p. 32)

위의 (b)-1, (b)-2는 그림 (b)로부터 명백하다. 이것은 컨테이너 스키마가 본연의 이미지 구조 속에 공간적인 논리를 함의하고 있고, 그것들이 공간 개념으로써 작용하며 공간적 정당화에 직접적으로 이용되기 때문이다. 이어서 위의 그림 (c)는 한발 더 나아가 물리적인 한계를 뛰어넘는 개념적 컨테이너의 모습을 제시한다. 이 경우 개체 X는 컨테이너 A와 B에 동시에 존재한다. 컨테이너 스키마는 이처럼 물질적 경험으로부터 추상화되지만 나아가 물질적 한계를 뛰어넘으며 우리로 하여금 공간에 대한 도식과 논리를 쉽게 이해하고 인식할 수 있게 하는 인지적 구조이다(Lakoff & Núñez, 2000, pp. 32-33). 또한, 컨테이너 스키마가 고도로 세련되고 논리화된 수학적 형태가 바로 집합론[43])으로(Lakoff & Núñez, 2000, p. 140), 교집합, 합집합, 여집합, 결합 법칙, 교환 법칙, 분배 법칙, 공집합 등의 아이디어는 컨테이너 같은 개체(containerlike

43) 더 나아가 집합론을 기반으로 한 위상수학에서는 '경계(boundary)'에 대해 엄밀한 정의를 내리지만 본 연구에서 그 정의를 다루는 것은 불필요하다고 판단되어 다루지 않았다.

entity)들의 개념으로부터 시작된다.

컨테이너 스키마라는 용어가 확립되기 이전부터 경계에 대한 인식은 존재했다. 고대 이집트인들은 나일강의 범람으로 허물어진 땅의 경계를 다시 세우고자 하였으며 이것이 기하학의 기원이 되었다고 한다. 플라톤은 『메논(Menon)』에서 '모든 도형에 대해서, 입체가 경계에 의해 한계지워지는 바의 것이 도형'이라 한 바 있다[44]. 또한, 고대 그리스인들은 세상의 만물은 '형상'에 의해서 한계지어지면서 본연의 모습을 나타내고 인간들이 그것을 알아볼 수 있게 된다고 생각하였다. 또한, 세계는 경계(peras)를 지님으로써 완전해지고 인간도 본질적으로 이러한 한정 속에서 존재한다는 것, 그리고 조화로운 것, 아름다운 것, 선한 것에는 늘 한계가 있다고 생각하였다(김용운, 1988, pp. 10-11).

인간은 감각이라는 내적인 인지 능력을 소유하고 있으며, 이러한 감각을 통해 경험을 축적하고 지식을 생성한다(Trendelenburg, 1898, p. 25). 이렇게 일상적 경험에 대한 인간의 감각을 통해 생긴 개념을 자생적 개념(spontanueous concpet)라 하는데(Cornu, 1981; Tall, 1991, p. 154에서 재인용), 경계 개념은 바로 이 자생적 개념에 해당한다고 할 수 있다. 즉, 일상에서 마주치는 사물에 대한 감각 경험을 통해 인간은 '경계'에 대해 자연스럽게 파악하고 인지하며 이것은 보다 추상화된 기하학적 대상의 경계에 대한 이해로 이어지는 것이다.

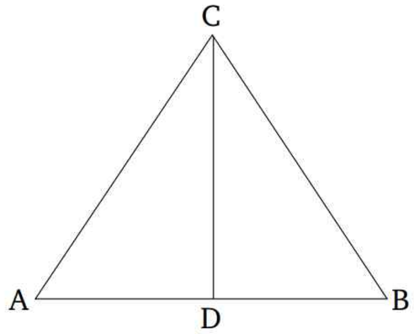
2. 사이성에 대한 논의

2.1. 『원론』의 결함과 사이성

수학이 점차 발전함에 따라『원론』에서 여러 논리적 결함이 발견되었는데, 그 중 하나가 바로 사이성(betweenness)에 대한 것이다(Greenberg, 1980).『원론』에는 사이성에 대한 공리가 존재하지 않음에도 불구하고 유클리드는 증명 과정에서 사이성을 암묵적으로 가정하였다

44)『메논(Menon)』 76a.

(Hartshorne, 2000, p. 2). 그 예는 명제 10에 대한 증명에서 드러난다.



명제 10 : 주어진 선분을 이등분하여라.

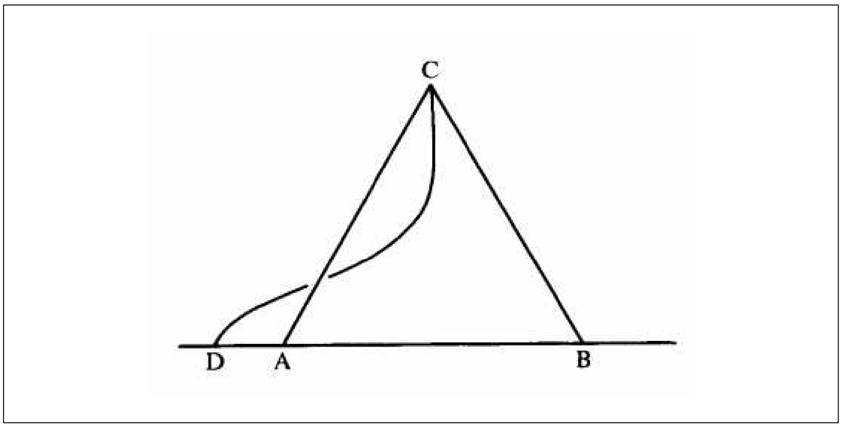
(1) AB를 주어진 선분이라 하자.
(2) AB 위에 정삼각형 ABC를 그린다(명제 1).
(3) $\angle ACB$가 선분 CD에 의해 이등분되도록 한다(명제 9[45]).
(4) 이제 선분 AB가 점 D에 의해 이등분됨을 보이자.
(5) 선분 AC와 CB는 서로 같고, 선분 CD는 공통이므로 두 선분 AC와 CD는 각각 선분 BC, CD와 같다.
(6) 그리고 $\angle ACD$와 $\angle BCD$는 같다.
(7) 따라서, 밑변 AD는 밑변 BD와 같다(명제 4[46]).

[그림 Ⅳ-2] 『원론』1권의 명제 10 (Greenberg, 1993)

이 증명의 결함은 (3)에 있다. 모든 각이 이등분 가능하다는 것은 명제 9에서 이미 증명되었다. 하지만, $\angle ACB$의 이등분선이 선분 AB와 만나는 것을 어떻게 알 수 있을까? 만약 만난다고 하더라도 그 교점이 점 A와 B 사이에 있다는 것을 어떻게 알 수 있는가? 물론 그림을 그린다면 명백한 사실이지만, 그림을 이용하지 않는다면 어떻게 타당화할 수 있는가? 이 질문들에 답하기 위해 직관에 의존하는 것은 위험하다. 다음 그림과 같은 상황이 생긴다고 생각할 수도 있기 때문이다(Greenberg,

45) 명제 9 : 주어진 각을 이등분하여라.
46) 명제 4는 SAS 합동 정리를 의미한다.

1980).

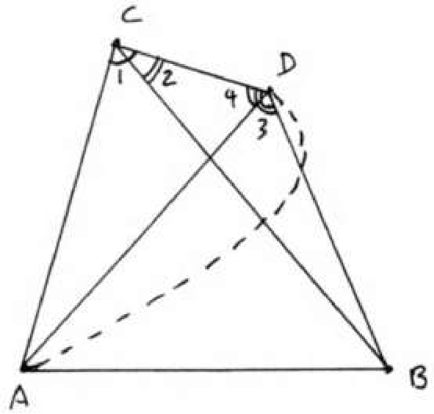


[그림 Ⅳ-3] 점 D가 점 A와 점 B 사이에 있지 않은 경우
(Greenberg, 1993, p. 73)

위와 같은 그림에서도 증명의 나머지 단계는 모두 유효하다. 즉, 밑변 AD와 밑변 BD는 같다는 결론이 나온다. 따라서 이 증명에서 그림에 의존하지 않고 점 D가 점 A와 B 사이에 있다는 사실을 보장할 수 있는 새로운 공리가 필요하다.

사이성에 대한 논의는 두 점이 아니라 두 선을 기준으로 생각할 수도 있다. 한 선이 두 선 사이에 있는지의 여부는 두 선이 만드는 각의 내부를 지나는지에 대한 논의이기도 하다(Hartshorne, 2000, p. 34). 이 경우의 예는 명제 7의 증명[47]에서 드러난다.

47) 명제 7은 삼각형의 SSS 합동 조건에 대한 명제 8의 증명에 사용된다는 점에서 중요하다.



명제 7 : 한 직선의 양 끝점에서 주어진 길이의 두 직선을 한 점에서 만나도록 그렸다면, 같은 직선의 양 끝점에서 방금 그은 것과 같은 길이의 두 직선을 그려 다른 점에서 만나도록 그릴 수 없다.

(1) 주어진 명제가 거짓이라고 하자. 선분 AB의 양 끝점에서 점 C에서 만나도록 두 선분 AC, CB를 그리고, AC, CB와 각각 길이가 같도록 AD, DB를 그려 D에서 만나도록 한다.
(2) 삼각형 ACD는 이등변삼각형이므로 $\angle ACD$와 $\angle ADC$는 같다(명제 5).
(3) 삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로 $\angle BCD$와 $\angle BDC$는 같다(명제 5).
(4) $\angle BCD$는 $\angle ACD$보다 작으므로 $\angle BCD$는 $\angle ADC$보다 작다.
(5) 그런데 $\angle ADC$는 $\angle BDC$보다 작다.
(6) 따라서 $\angle BCD$는 $\angle BDC$보다 작다. 그런데 이 두 각은 이등변삼각형의 밑각이므로 서로 같고 따라서 주어진 명제는 참이다.

[그림 Ⅳ-4]『원론』1권의 명제 7 (Hartshorne, 2000)

이 증명은 점 C와 D에서 만나는 선들의 상대적인 위치가 각들의 크기 차이를 결정하는 것에 의존하고 있다. 그림을 그린다면 증명 과정이 자연스럽지만, 그림을 그리지 않는다면 다음과 같이 생각할 수도 있다. [그림Ⅱ-?]의 점선과 같이, 선 AD가 $\angle BDC$의 외부에서 점 D에 닿는다고 생각한다면, $\angle BCD$는 $\angle ACD$보다 작고, $\angle BDC$는 $\angle ADC$보다 작으므로

모순이 발생하지 않는다. 이런 사고 과정은 최초의 증명이 사실 각의 내부에 존재하는 선들의 특정한 배치와 순서에 의존하며 이는 다이어그램을 사용하지 않고는 설득력있게 설명할 수 없다. 이러한 배치와 순서는 평면 도형들에 대해 공통적으로 성립하는 특성과 관련있는데 그러한 특성을 규정짓는 것이 사이성에 대한 공리이다(Hartshorne, 2000, p. 35).

2.2. 사이성에 대한 연구

Hartshorne(2000, p. 73)은 사이성에 대한 개념은 우리의 일상적인 삶의 경험에 너무 깊이 뿌리박혀 있어서 우리의 직관을 버리고 그것을 공리로 대체하는 것이 굉장히 어렵다고 하였다. 실제로 사이성은 기하에 대한 완벽한 공리화를 위한 가장 큰 장애물로 19세기 이전까지 기하학의 기초를 다지기 위한 시도에서 간과되었다. 2.1절에서 살펴본 바와 같이 관련된 공리가 없이 사이성을 암묵적으로 가정하는 것은 논리적 결함을 발생시키므로 순서 공리군은 기하학의 기초를 재정립한 힐베르트 공리계에서 중요한 부분을 차지한다. 이전까지 미비했던 순서 관계, 즉 사이성에 대한 논의는 수학의 기초에 대한 이해에 필수적인 것이 되었다(Russell, 2014).

1888년에 Pasch는 사이성의 개념을 기반으로 한 새로운 공리적 기초를 제시하였다. 이 Pasch의 기하학은 순서 기하학(ordered geometry)라고 불리우는데 순서 기하학은 사이성을 주요 개념으로 하면서 측정(Measurement)의 개념을 배제하는 기하학의 한 형태를 말한다[48]. Pasch의 공리계는 Peano(1889), Veblen(1904) 등 여러 수학자에 의해 개선되었으며 힐베르트 공리계에도 많은 영향을 미쳤다(Coxeter, 1969). 힐베르트 공리계의 순서 공리군은 Pasch에 의해 제안되었는데(Troyanov, 2014), 특히 네 번째 순서 공리는 Pasch의 저명한 업적으로 인정되어 'Pasch의 정리[49]'로 불린다. 이 공리는 직관적으로 한 직선이 삼각형의

48) 순서 기하학은 아핀(affine) 기하학, 유클리드(Euclidean) 기하학, 절대(absolute) 기하학, 쌍곡(hyperbolic) 기하학에 내재된 사이성에 대한 기본구조(framework)를 제공한다.
49) A, B, C를 한 선 위에 있지 않은 점이라 하고 a를 세 점 A, B, C 중 어떤 점도

한 변을 거쳐 내부로 들어간다면, 다른 한 변을 거쳐 외부로 나온다는 것을 말한다(Greenberg, 1993, p. 80).

순서 기하학에서 점과 선에 대한 공리를 살펴보면 다음과 같다.

(공리 a) 만약 A와 B가 다른 두 점이면, $A*B*C$를 만족하는 적어도 한 개의 점 C가 존재한다.

(공리 b) 만약 $A*B*C$이면, A와 C는 다른 점이다.

(공리 c) 만약 $A*B*C$이면, $C*B*A$이지만 $B*C*A$는 아니다.

(공리 d) 점 C와 D가 선 AB 위의 서로 다른 점이면, A는 선 CD 위에 있다.

(공리 a)는 점 A, B가 존재할 때 $A*B*C$를 만족하는 점 C의 존재성을 보장하고 있다. 여기서 주목할만한 것은 새로운 점 C가 두 점 A, B의 사이에 존재하는 것이 아니라는 점이다. 즉, 공리를 통해 존재성을 갖게 되는 점이 두 점의 사이에 존재하는 점이 아닌 것이다. (공리 b)에서 'B가 A와 C 사이에 있다'는 것은 점 A와 C가 서로 다르다는 것을 의미하고 그렇기 때문에 'B가 C와 A 사이에 있다' 즉, $C*B*A$가 참인지 여부가 유효한 논의가 된다. (공리 c)는 $C*B*A$가 참이며 이와 더불어 $B*C*A$는 거짓임을 말고 있다. $B*C*A$가 거짓이라는 것은 마치 힐베르트 공리계의 순서 공리 3이 선이 순환하지 않음을 보장하였던 것과 비슷한 역할을 한다. 단, 순서 기하학에서는 아직 선을 약속하지 않았으므로 사이성만을 이용해 표현하여야 한다. $A*B*C$가 $C*B*A$는 맞지만 $B*C*A$는 거짓임을 함의한다면, $C*B*A$는 $B*A*C$가 거짓임을 함의한다. 따라서 세 점 중 점 B만이 나머지 두 점 사이에 있다고 말할 수 있다. (공리 d)로 인해 다음 정리가 증명 가능하다. '만약 선 AB 위에 다른 두 점 C와 D가 있다면, 선 AB와 선 CD는 같다.' 이 정리는 한 선 위의 네 개의 점 A, B, C, D에 대하여 어떤 두 점을 선택하여 선을 구성하더라도 그 선들은 서로 같음을 보장한다.

지나지 않는 평면 ABC 위의 선이라 하자. 만약, 그 선이 선분 AB 위의 점을 지나면 그 선은 선분 AC 혹은 선분 BC 위의 점을 지난다.

사이성은 기하학 공리체계 내의 공리뿐만 아니라 여러 방법을 통해서 다양한 수학적 상황에서 정의될 수 있다. Ten Brinke et al., (2004)는 거리 공간에서의 사이성을 거리 함수를 통해 정의하였다. 거리 함수 d와 서로 다른 세 점 a, b, c에 대해 삼항관계 β는 다음과 같이 정의된다.

$$(a,b,c)\in\beta \Leftrightarrow d(a,b)+d(b,c)=d(a,c)$$

Venema(2011)에 따르면, 사이성은 다음과 같이 실수 체계의 순서 관계를 이용해서도 정의 가능하다.

> A, B, C를 직선 l 위의 서로 다른 세 점이라 하자. 그리고 함수 $f: l \rightarrow \mathbb{R}$를 l에 대한 좌표 함수라 하자 점 C가 A와 B 사이에 있는 것은 $f(A) < f(C) < f(B)$ 또는 $f(A) > f(C) > f(B)$인 것과 동치이다.

한편, 벡터 공간에서 실수 x가 a와 b 사이에 있음을 의미하는 삼항 관계 (axb)는 대수적으로 다음과 같이 정의된다(Hashimoto, 1958).

$$(axb) \Leftrightarrow x=\alpha a+(1-\alpha)b,\ 0\le\alpha\le1$$

특히, Russell(2014)은 사이성을 나타내는 삼항 관계에 대해 깊이 논하였다. Russell에 따르면, 사이성에 대한 관계 R은 오직 두 개의 항으로는 그 관계를 정의할 수 없다. 순서 관계가 정의되기 위해 기본적으로 서로 다른 세 개의 요소가 필요하며, 그것들 중 하나는 다른 두 개의 사이에 있다. 세 개의 항을 a, b, c라 하면 'b가 a와 c 사이에 있다'라는 명제에 대한 정의이자 필요충분조건은 b에 대한 a의 관계, c에 대한 b의 관계가 존재할 때이다. 하지만 이때, a에 대한 b의 관계, b에 대한 c의 관계는 존재하지 않아야 한다. 만약 y에 대한 x의 관계 R를 xRy로 나타낸다면, 'b는 a와 c 사이에 있다는 것'의 정의는 다음과 같다. '세 항 a, b, c에 대해 aRb, bRc이지만 bRa, cRb는 아닌 관계 R이 존재한다[50)]'. 이러한 정의 하에서 다음 명제들은 일반적으로 자명한 것으로 인정된다

(Russell, 2014).

(1) b가 a와 c 사이에 있고 c가 b와 d 사이에 있다면, b는 a와 d 사이에 있다.
(2) b가 a와 c 사이에 있고 d가 a와 b 사이에 있다면, b는 d와 c 사이에 있다.

즉, '사이성'이라는 것은 외연상으로는 세 항 사이의 관계인 것처럼 보이지만 사실은 '두 항 사이의 관계에 대한 관계'를 말한다(Russell, 2014, p. 211). 이때 두 항 사이의 관계는 추이적(transitive)이고 반대칭적(asymmetrical)이다(p. 216)[51].

2.3. 직선, 선분, 반직선의 정의

Peano는 사이성을 이용하여 직선을 다음과 같이 정의하였다. '직선은 두 점 a, b에 대해 $x*a*b$를 만족하는 x들의 집합, $a*x*b$를 만족하는 x들의 집합, $a*b*x$를 만족하는 x들의 집합과 점 a, b의 합집합이다.' 보다 추상적으로 Vailati는 추이적이고 반대칭적인 관계들의 특정한 동치류를 이용하여 직선을 정의하였다. 그러한 동치류를 K라 하면 어떠한 두 점 사이에는 동치류 K에 대한 관계가 오직 하나 존재한다. 그러한 관계를 R이라 하면 관계 R은 직선을 정의한다. 즉, a, b가 aRb를 만족하는 두 점이면 a는 직선을 포함한다. 왜냐하면 만약 aRb이면, aRc와 cRb를 만족하는 점 c가 존재하며, bRd를 만족하는 점 d도 존재한다. 이것은 결국 위의 Peano의 정의에서 필요한 요소를 모두 갖는다는 것을 의미한다(Russell, 2014, pp. 394-395).

50) 이것은 다음과 같이 표현할 수도 있다. 'b는 a와 c 사이에 있다는 것'은 'a와 b, 그리고 b와 c를 관계짓는 추이적이고 반대칭적인 관계 R이 존재한다'와 동치이다.
51) 관계 R에 대해 'xRy, yRz이면 xRz'일 때 관계 R은 추이적이라고 한다. 또한, 'xRy이면 yRx'일 때 관계 R은 대칭적(symmetrical)이라고 하며 대칭적이지 않을 때 즉, xRy이지만 항상 yRx인 것은 아닐 때 반대칭적이라고 한다.

Veblen(1904)은 Peano의 방식과 마찬가지로 직선을 정의하였으며, a와 b에 대한 두 점 집합과 $a*x*b$를 만족하는 x들의 집합의 합집합으로 선분을 정의하였다. 그리고 이때, 점 a와 b는 선분의 끝점으로 불린다. 또한, 자신의 공리계 내에서 다음과 같은 정리가 성립함을 증명하였다.

> 만약 k가 직선 AB 위의 어떤 점일 때, k를 제외한 직선의 점들은 두 집합으로 나뉘어지며 첫 번째 집합과 두 번째 집합에서 각각 어떠한 점을 골라도 그 두 점 사이에 k가 있다. 그리고 한 집합 내의 어떤 두 점을 골라도 그 사이에 k가 있지 않다.

이 정리에 의해 만들어진 점들의 두 집합은 '반직선(들)'로 불리우며 점 k는 반직선의 '시작점' 혹은 '끝점'으로 불린다. 어떤 선분 AB에 대해 점 B를 끝점으로 갖지만 점 A를 포함하지 않는 반직선을 선분 AB의 점 B 너머로의 연장(prolongation of the segment AB beyond B)이라고 한다.

제 2 절 선에 대한 관점과 점의 특성

이제 직선, 선분, 반직선에 대한 관점과 각 관점에서 점의 특성을 정리하면 다음과 같다. 먼저, '자연 연속체' 관점에서 직선, 선분, 반직선은 점이 모여서 구성된 것이 아니며 점은 그 자체로 연속적인 선을 분할하는 도구로써의 역할을 한다. 아리스토텔레스의 논의에 따르면 다른 대상을 분할하는 도구를 '경계'라고 하며 경계는 잠재적으로, 즉 가능성으로서 존재한다. 이때, 점에 의해 분할된 선은 분할된 위치에 점이 존재하며 이때 그 점은 '경계적 특성(boundary property)'을 갖는 것으로 지칭하고자 한다. 다시 말해 점이 선을 분할하는 도구이거나 분할의 결과로서 선의 끝에 존재하는 것으로 생각할 때 점은 '경계적 특성'을 갖는다. 자연 연속체 관점에서는 이 경계적 특성을 갖는 점을 통해 직선, 선분, 반직선을 구분할 수 있다. 예를 들어, 분할되지 않은 선인 직선은 경계적 특성을 갖는 점이 존재하지 않는다. 직선을 그 위에 존재하는 한 점에 의해 분

할하면 두 개의 반직선이 되고 각각의 반직선에는 한 개의 경계적 특성을 갖는 점이 존재한다고 할 수 있다. 또한, 하나의 반직선을 그 위에 존재하는 한 점에 의해 분할하면 한 선분과 한 반직선으로 분할된다. 이때 선분은 경계적 특성을 갖는 점이 양 끝에 존재하므로 선분에는 경계적 특성을 갖는 점이 두 개 존재한다. 그런데 아리스토텔레스에게 분할은 전체를 부분으로 나누는 조작이며 여기서 그 부분들은 다시 합하였을 때 전체를 구성할 수 있는 것이다. 따라서 예를 들어 직선을 분할하여 두 개의 반직선이 된다면 그 두 개의 반직선을 합하여 다시 본래의 직선을 구성할 수 있는 것으로 바라본다.

반면, '점의 집합' 관점에서 직선, 선분, 반직선은 점이 모여 구성된 것으로 점들이 모이는 규칙이나 관계가 필요하다. 예를 들어, '두 점 사이에 한 점이 있다'와 같이 세 점 사이의 순서 관계를 통해 점의 존재성이 보장되고 배열 방식이 구체화될 수 있는데, 힐베르트 공리계에서 선 위에 있는 점들의 존재성과 배열 방식을 규정하는 것은 순서 공리군이다. 즉, 순서 공리군은 점들이 갖는 사이성을 규정한다. 여기서 사이성을 갖는 점의 특성을 '사이적 특성(betweenness property)'으로 지칭하고자 한다. 그런데 사이성은 반드시 공리체계 내의 공리만을 이용해서 정의되지 않을 수 있고, 특히 학교수학은 엄격한 공리적 체계가 아니다. 따라서 점의 사이적 특성에 대해, 다른 두 점과의 규칙이나 관계에 의해 한 점의 존재성과 위치가 결정되는 경우에 이 세 점들은 '사이적 특성'을 갖는다고 약속하고자 한다. 점의 집합 관점에서 직선, 선분, 반직선은 사이적 특성을 갖는 점들의 집합이며, Greenberg의 표기 방식과 Peano의 정의를 혼용하여 다음과 같이 이들을 정의할 수 있다[52]. 만약, '점 x가 점 a와 b 사이에 있다'를 $a*x*b$로 표기한다면, 직선은 집합 $\{x|x*a*b\}$, $\{a\}$, $\{x|a*x*b\}$, $\{b\}$, $\{x|a*b*x\}$들의 합집합이다. 선분은 세 개의 집합인 $\{a\}$, $\{x|a*x*b\}$, $\{b\}$의 합집합이며 반직선은 $\{x|x*a*b\}$, $\{a\}$, $\{x|a*x*b\}$, $\{b\}$의 합집합 혹은 $\{a\}$, $\{x|a*x*b\}$, $\{b\}$, $\{x|a*b*x\}$의 합집합으로 정의된다.

52) 사이성을 어떻게 정의하느냐에 따라 세 선들에 대한 다른 정의 방식이 존재할 것이다

제 5 장 교과서 분석

제 1 절 선에 대한 관점

학교수학에서 ‘선’은 정의하지 않고 사용하는 무정의 용어이다. 하지만 학교수학은 선을 힐베르트 공리계에서의 무정의 용어와 같은 의미로 이해하는 것은 적절하지 않다(박교식, 임재훈, 2005). 강홍규, 조영미(2002)는 학교수학에서 무정의 용어는 암묵적 방법에 의해 정의된다고 하였다. 즉, 이들은 직접적으로 정의되지는 않지만 관련 내용들을 다루면서 학생들이 자연스럽게 그 단어들에 대한 개념을 파악하길 기대하는 용어이다. 이 절에서는 초등과 중등 교과서에서 선이 다루어지는 방식을 고찰하여 교과서에서 암묵적으로 다루어지는 선에 대한 관점이 무엇인지를 확인해 보고자 한다.

1. 분석 대상

선에 대한 인식을 파악하기 위한 분석의 대상은 초등학교와 중학교의 교과서이다. 초등 3, 4학년은 2022학년도부터 검정 교과서를 사용하여 학습하고 있다. 초등 5, 6학년은 2023학년도부터 검정 교과서를 사용하고 있으며 초등 1, 2학년은 검정 교과서가 아닌 국정 교과서를 사용한다. 직선, 선분, 반직선에 대한 학습은 초등학교 3학년 수학에서 다루고 있으므로 분석의 대상이 되는 초등 교과서는 1, 2학년 국정 교과서와 3학년 검정 교과서 10종이다. 초등 수학 교과서를 제작하는 출판사는 총 7곳이며, 이 중 2곳은 대표 저자를 다르게 하여 2권씩의 교과서를 출판한다. 또한, 중학교 검정 교과서는 총 10종으로 아래와 같다.

<표 Ⅴ-1> 교과서 분석 대상

초등			중등		
구분	출판사명	대표 저자	구분	출판사명	대표 저자
A	금성	류희찬	ㄱ	교학사	고호경
B	대교	강 완	ㄴ	금성출판사	주미경
C1	동아출판	박교식	ㄷ1	동아출판	강옥기
C2		안병곤	ㄷ2		박교식
D	미래엔	장혜원	ㄹ	미래엔	황선욱
E	비상교육	신항균	ㅁ	비상교육	김원경
F	아이스크림 미디어	김성여	ㅂ	신사고	김화경
G	와이비엠	박성선	ㅅ	지학사	장경윤
H1	천재교육	박만구	ㅇ1	천재교육	류희찬
H2		한대희	ㅇ2		이준열

2. 초등 교과서 분석

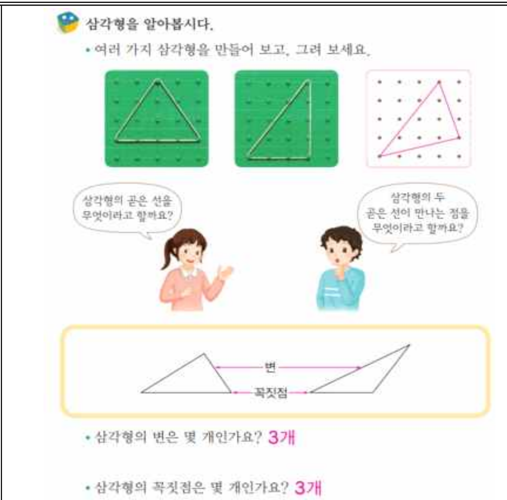
학생들은 먼저 1학년 교과서에서 여러 구체물을 통해 입체도형과 평면도형에 대한 감각적 탐색 경험을 하게 된다. 그리고 2학년에서 선은 삼각형의 ‘변’으로써 처음 등장한다. 초등 1, 2학년군의 성취기준에서 선은 명시적으로 드러나지 않으며, 지도상의 유의점에서도 ‘선’이 아닌 삼각형과 사각형의 ‘변’이 등장한다[53]. 즉, 1, 2학년군에서 선은 독립적인 개체가 아니라 도형의 일부분으로써 다루어진다. 구체적인 교과서 내용을 살펴보면 다음과 같다.

53) 삼각형과 사각형에 대한 직관적 이해를 통하여 도형의 이름과 변 또는 꼭짓점의 개수와의 관계를 파악하고, 그 관계를 일반화하여 오각형과 육각형을 구별하여 이름 지을 수 있게 한다.

<table>
<tr><th>입체도형 (1학년 1학기, p. 36)</th><th>평면도형 (1학년 2학기, p. 61)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

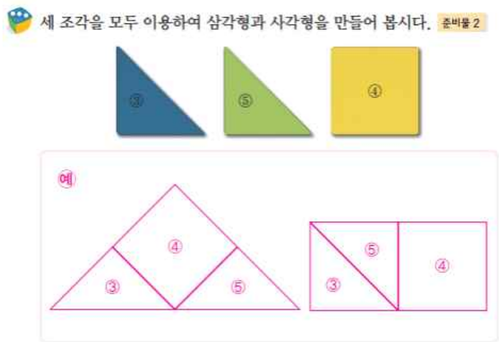
[그림 Ⅴ-1] 입체도형과 평면도형의 학습(1학년)

1학년 학생들은 도형에 대한 학습으로 먼저 생활 주변에서 상자, 원통, 공 모양에 해당하는 구체물을 찾아보는 활동을 하게 된다. 그 이후에는 평면도형인 네모, 세모, 동그라미 모양에 해당하는 생활 속의 구체물을 찾아보고 그 이름을 지어보는 활동을 한다.

<table>
<tr><th colspan="2">삼각형 (2학년 1학기, pp. 34-35)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

[그림 Ⅴ-2] 삼각형의 학습(2학년)[54]

1학년에서 구체물을 통해 학습한 삼각형은 2학년에서 [그림 Ⅴ-2]과 같이 예시적 정의가 이루어진다. 이어서 변과 꼭짓점은 명시적으로 정의되지는 않지만, 두 인물의 대화를 통해 삼각형의 변은 ‘삼각형의 곧은 선’을, 꼭짓점은 ‘두 곧은 선이 만나는 점’이라는 것이 암시된다. 학교수학에서 점과 선은 삼각형의 변과 꼭짓점으로써 처음 등장한다. 이후에 2학년 교과서에서 제시하는 평면 도형에 대한 활동들은 아래 [그림 Ⅴ-3]와 같이 칠교판 조각, 긴 줄 등의 구체물을 이용한다. 이러한 활동들은 학생들로 하여금 선을 그 자체로 연속적이고 ‘점’과는 독립적인 대상으로 인식하게 할 것으로 예상된다.

칠교판 조각(2학년 1학기, p. 43)	긴 줄(2학년 1학기, p. 48)
	

[그림 Ⅴ-3] 구체물을 이용한 학습(2학년)

초등학교 3학년 1학기 <평면도형> 단원에서는 본격적으로 직선, 선분, 반직선을 정의하고 학습한다. 성취기준에서는 ‘[4수02-01] 직선, 선분, 반직선을 알고 구별할 수 있다’가 등장하며 평가상의 유의점으로는 ‘직선, 선분, 반직선에 대한 평가에서는 정확한 정의나 표현보다 직선, 선분, 반직선을 서로 구별할 수 있는지에 중점을 둔다’를 제시하고 있다. 도형 학습이 본격적으로 시작되는 3학년에서는 직선, 선분, 반직선에 대한 명명

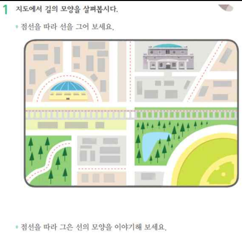
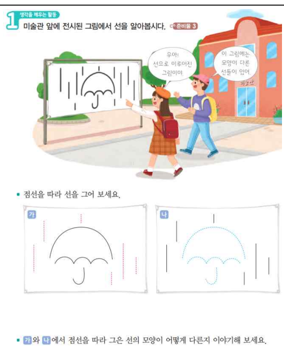
54) 사각형도 유사하게 학습하여 생략하였다.

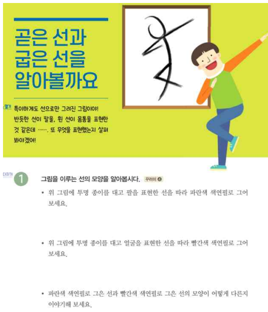
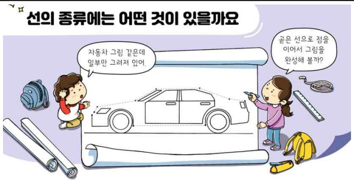
적 정의가 사용된다. 명명적 정의는 상위 개념에 종차를 추가하여 새로운 개념을 형성하는 방법으로 여기서 직선, 선분, 반직선에 대한 상위 개념은 ‘선’이다. 실제로 정의되는 내용을 살펴보면, 직선은 ‘선분을 양끝으로 끝없이 늘인 곧은 선’, 선분은 ‘두 점을 곧게 이은 선’, 반직선은 ‘한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선’으로 정의된다[55]. 즉, 직선, 선분, 반직선을 이해하는 데에 상위 개념이자 무정의 용어인 선을 어떻게 인식하느냐가 중요하다. 따라서 각 검정 교과서에서 직선, 선분, 반직선을 본격적으로 학습하기 이전에 어떤 방식으로 내용을 도입하는지 살펴보도록 한다.

<표 V-2> 초등 검정 교과서에서 직선, 선분, 반직선 학습 전 도입 활동

구분	도입 내용	주요 활동 혹은 발문
A		- 굽은 선을 그으면서 보물 상자가 있는 곳까지 가 보세요. - ㉮에서 출발하여 불국사까지 가는 길을 지도에 선으로 그어 보세요. 등
B		- 빨간색 색연필로 지붕의 점선을 따라 선을 그어 보세요. - 파란색 색연필로 기둥의 점선을 따라 선을 그어 보세요.

55) 선분은 10개의 검정 교과서에서 모두 동일하게 정의된다. 하지만 직선과 반직선은 1개의 교과서에서 각각 ‘양쪽으로 끝이 없는 곧은 선’과 ‘한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝이 없는 곧은 선’으로 정의된다.

C1		- 지도에서 길의 모양을 살펴봅시다. - 점선을 따라 선을 그어 보세요.
C2		- 여러 가지 선을 살펴봅시다. - 점선(----)을 따라 선을 그어 보세요.
D		- 옹달샘으로 가는 두 가지 길에 점선을 따라 선을 그어 보세요.
E		- 두 별을 연결한 선에는 어떤 것이 있을까? - 선에는 쭉 뻗은 곧은 선도 있고 구불구불한 굽은 선도 있어.
F		- 미술관 앞에 전시된 그림에서 선을 알아봅시다. - 점선을 따라 선을 그어 보세요.
G		- 장난감 기차가 지나는 길의 모양을 알아볼까요? - 장난감 기차가 지나는 두 길 위의 점선을 따라 선을 그어 보세요

H1		- 위 그림에 투명 종이를 대고 팔을 표현한 선을 따라 파란색 색연필로 그어 보세요.
H2		- 자동차 그림 같은데 일부만 그려져 있어. - 곧은 선으로 점을 이어서 그림을 완성해 볼까?

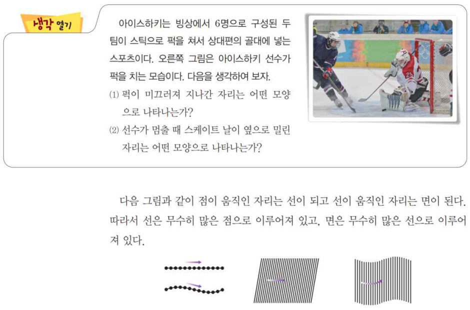
10종의 교과서에서 제시되는 도입 활동은 모두 특정한 구체물의 일부로써 선에 대해 생각해보는 활동을 한다. 여기서 특징적인 것은 2개 교과서를 제외한 대부분의 교과서 활동에서 점이 등장하지 않는다는 점이다. E 교과서에서는 두 별을 다양한 방식으로 잇는 선에 대해 다루고 있는데 점의 역할을 별이 대신하고 있다고 할 수 있다. H2 교과서에서는 두 점을 곧은 선으로 이어서 그림을 완성한다. 하지만 이것만으로 점과 선의 관계를 명확히 파악하기는 힘들다. 검정 교과서의 이러한 도입 활동들은 선을 점과 독립적인 개체로 인식하게 한다. 선은 점들이 모인 것이라기보다는 그 자체로 연속적인 대상이 된다.

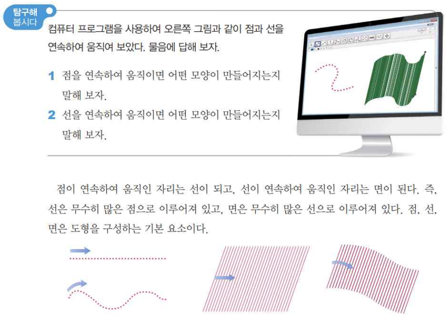
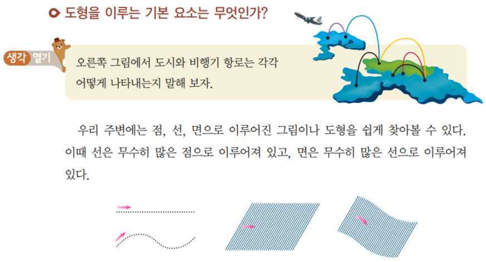
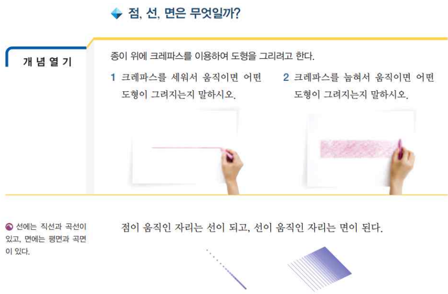
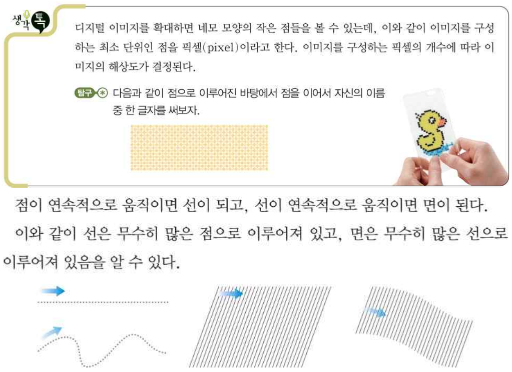
지금까지 교과서 분석 결과, 초등 교과서에서 직선, 선분, 반직선에 대한 관점은 '점의 집합' 관점보다는 '자연 연속체' 관점에 가깝다. 그 판단 근거로는 첫째, 직선, 선분, 반직선에 대해 학습하기 전인 1, 2학년에서 '선'은 삼각형과 사각형의 '변'으로써 학습한다. 이 과정에서 학생들은 칠교판 조각, 긴 줄 등의 구체물을 통해 삼각형과 사각형을 탐색하게 되고 선은 구체물의 일부분으로써 그 자체로 연속적이며 '점'과는 독립적인 대상으로 인식하게 될 것이다. 둘째, 직선, 선분, 반직선을 학습하는 3학년 도입 활동에서 점과 선의 관계는 학습하지 않는다. 구체적으로는 10종의 교과서 중 8개의 교과서의 도입 활동에서 점이 아예 등장하지 않고 선만을 그리거나 관찰한다.

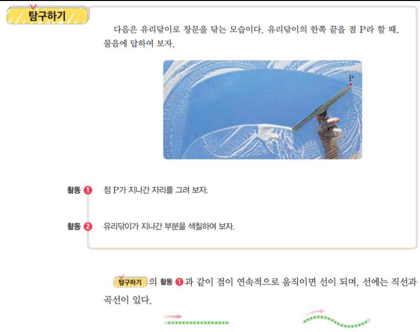
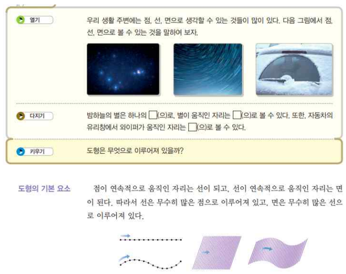
3. 중등 교과서 분석

직선, 선분, 반직선은 중학교 1학년에서 다시 한번 다루어진다. 학습 요소로는 직선, 선분, 반직선의 표기법인 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$에 대해 학습한다. 성취기준 상으로는 '[9수04-01] 점, 선, 면, 각을 이해하고, 점, 직선, 평면의 위치 관계를 설명할 수 있다.'가 있다. 지도상의 유의점으로는 '점, 선, 면, 각과 관련된 용어는 다양한 상황에서 직관적으로 이해하게 한다.'가 제시된다. 먼저 중등 교과서에서 직선, 선분, 반직선을 학습하기 전에 다루는 도입 활동을 살펴보면 다음과 같다.

<표 Ⅴ-3> 중등 교과서에서 직선, 선분, 반직선 학습 전 도입 활동

구분	도입 내용	주요 활동 혹은 발문
ㄱ	 생각 열기 아이스하키는 빙상에서 6명으로 구성된 두 팀이 스틱으로 퍽을 쳐서 상대편의 골대에 넣는 스포츠이다. 오른쪽 그림은 아이스하키 선수가 퍽을 치는 모습이다. 다음을 생각하여 보자. (1) 퍽이 미끄러져 지나간 자리는 어떤 모양으로 나타나는가? (2) 선수가 멈출 때 스케이트 날이 옆으로 밀린 자리는 어떤 모양으로 나타나는가? 다음 그림과 같이 점이 움직인 자리는 선이 되고 선이 움직인 자리는 면이 된다. 따라서 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다.	- 퍽이 미끄러져 지나간 자리는 어떤 모양으로 나타나는가? - 다음 그림과 같이 점이 움직인 자리는 선이 되고 ..(중략).. 따라서 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고 ..(후략)..
ㄴ	 생각 깨우기 인천광역시에는 세계 최대 규모의 LED 전광판이 설치된 야구장이 있다. 전광판은 평면에 여러 개의 전구를 배열한 것으로 경기 상황 및 선수들에 대한 정보 등을 나타낸다. 전광판의 각 전구를 점이라고 생각하였을 때, 전광판의 전구에 불을 켜서 그림이나 글자를 나타내는 방법에 대하여 생각해 보자. 생각 깨우기 에서 전광판의 전구 중 한 줄의 전구에 불을 켜면 선이 나타나고, 여러 줄의 전구가 옆으로 모이면 면이 나타나는 것과 같이 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다.	- 전광판의 각 전구를 점이라고 생각하였을 때, 전광판의 전구에 불을 켜서 그림이나 글자를 나타내는 방법에 대하여 생각해 보자. - 전광판의 전구 중 한 줄의 전구에 불을 켜면 선이 나타나는 것과 같이 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고 ..(후략)..

ㄷ1		- (농구의) 작전 판에는 어떤 도형이 있는지 찾아 보자. - 생각 열기의 작전 판에서는 점, 직선과 곡선을 비롯하여 사각형, 원 등을 찾아볼 수 있다. 이와 같이 한 평면 위에 있는 평면도형은 점, 선으로 이루어져 있고, ..(후략)..
ㄷ2		- 점을 연속하여 움직이면 어떤 모양이 만들어지는지 말해 보자. - 점이 연속하여 움직인 자리는 선이 되고.. (중략).. 즉, 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고..
ㄹ		- 오른쪽 그림에서 도시와 비행기 항로는 각각 어떻게 나타내는지 말해 보자. - 이때 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고.. (후략)..
ㅁ		- 크레파스를 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는지 말하시오. - 점이 움직인 자리는 선이 되고..(후략)..
ㅂ		- 점으로 이루어진 바탕에서 점을 이어서 자신의 이름 중 한 글자를 써보자. - 점이 연속적으로 움직이면 선이 되고..(중략).. 이와 같이 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고..(후략)..

ㅅ	 탐구하기 다음은 유리닦이로 창문을 닦는 모습이다. 유리닦이의 한쪽 끝을 점 P라 할 때, 물음에 답하여 보자. P 활동 ❶ 점 P가 지나간 자리를 그려 보자. 활동 ❷ 유리닦이가 지나간 부분을 색칠하여 보자. 탐구하기 의 활동 ❶과 같이 점이 연속적으로 움직이면 선이 되며, 선에는 직선과 곡선이 있다.	- 유리닦이의 한 쪽 끝을 점 P라 할 때, 점 P가 지나간 자리를 그려 보자. - .. 점이 연속적으로 움직이면 선이 되며..(후략)..
ㅇ1	 열기 우리 생활 주변에는 점, 선, 면으로 생각할 수 있는 것들이 많이 있다. 다음 그림에서 점, 선, 면으로 볼 수 있는 것을 말하여 보자. 다지기 밤하늘의 별은 하나의 □(으)로, 별이 움직인 자리는 □(으)로 볼 수 있다. 또한, 자동차의 유리창에서 와이퍼가 움직인 자리는 □(으)로 볼 수 있다. 키우기 도형은 무엇으로 이루어져 있을까? 도형의 기본 요소 점이 연속적으로 움직인 자리는 선이 되고, 선이 연속적으로 움직인 자리는 면이 된다. 따라서 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다.	- 도형은 무엇으로 이루어져 있을까? - 점이 연속적으로 움직인 자리는 선이 되고, ..(중략).. 따라서 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고 ..(후략)..
ㅇ2	 생각 열기 샌드 애니메이션이란 모래를 유리판에 펼쳐 놓은 뒤 손으로 그림을 그리고 유리판 밑에서 빛을 투사하면서 변화하는 그림을 담아내는 영상 예술이다. 다음은 샌드 애니메이션의 두 가지 기본 기법을 나타낸 것이다. (자료: 김해뉴스, 2014년 5월 21일) 미술 〈그림 1〉 〈그림 2〉 ❶ 〈그림 1〉과 같이 손가락을 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는가? ❷ 〈그림 2〉와 같이 손바닥을 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는가? 다음 그림과 같이 점이 연속하여 움직인 자리는 선이 되고, 선이 연속하여 움직인 자리는 면이 된다. 선 위에는 무수히 많은 점이 있고, 면 위에는 무수히 많은 선과 점이 있다. 따라서 모든 평면도형과 입체도형은 점, 선, 면으로 이루어져 있다.	- 손가락을 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는가? - 점이 연속하여 움직인 자리는 선이 되고.. (중략).. 선 위에는 무수히 많은 점이 있고 ..(후략)..

<표 Ⅴ-3>과 같이 중등 교과서에서는 직선, 선분, 반직선을 학습하기 전 도입 활동에서 점과 선의 관계를 드러낸다. 이와 관련된 이상은(2016)의 연구에서는 점과 선의 관계를 크게 “선 위에 무수히 많은 점이 있다.”, “선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다.”, “점이 움직여 선을 만든다”, “명시적 제시 없음”의 네 가지 범주로 분류한 바 있다. 이상은(2016)은 “선 위에 무수히 많은 점이 있다”는 표현은 선을 독립적인 연속체로 보고 그 위에 위치로서 점이 존재한다는 관점이 전제되어 있다고 보았는데 이것은 본 연구에서의 ‘자연 연속체’ 관점에 해당한다고 할 수

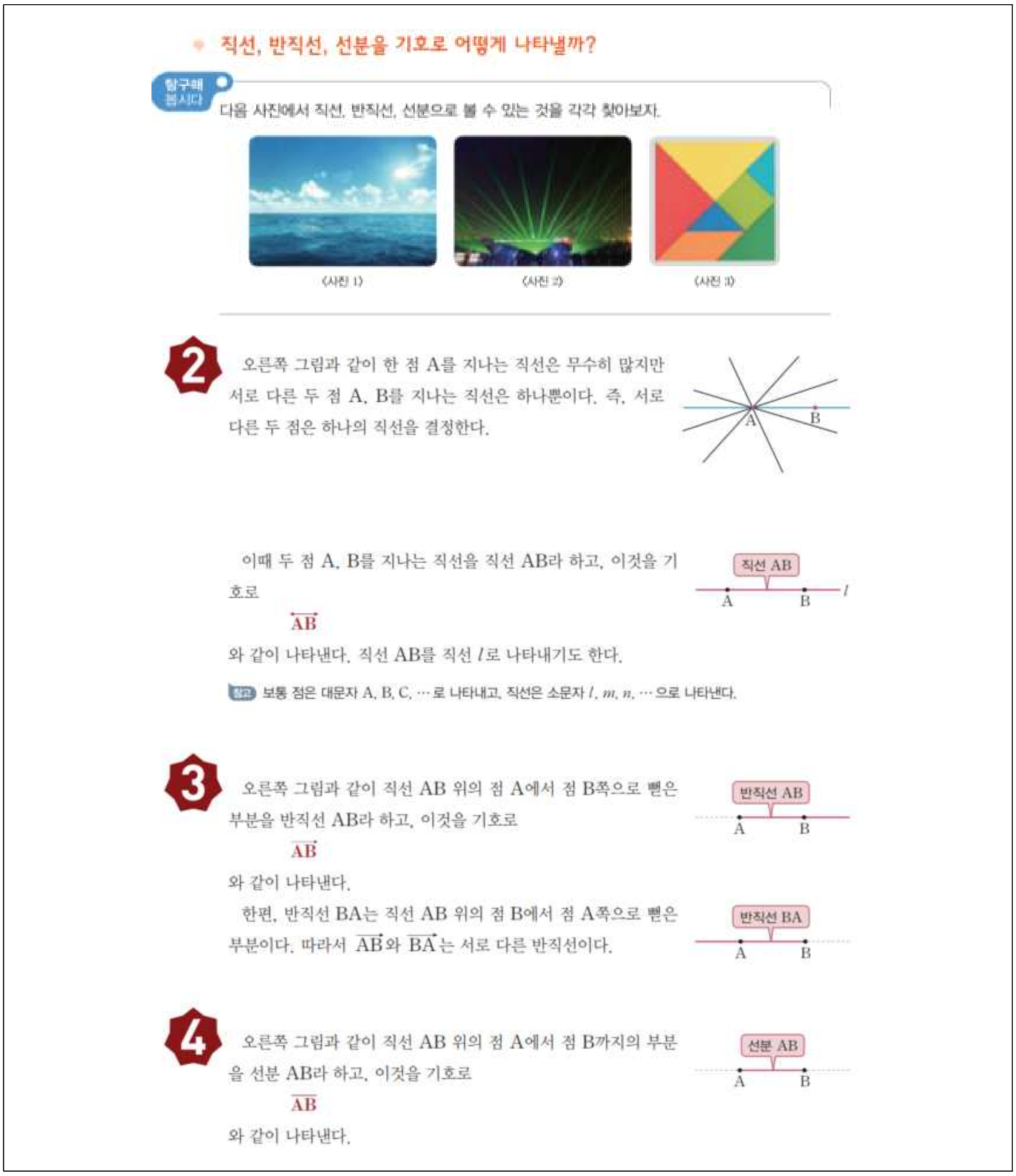
있다. 또한, “선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다”는 표현은 ‘점을 무수히 많이 모은 것이 선’으로 해석될 수 있다고 하였는데, 이것은 본 연구에서의 ‘점의 집합’ 관점에 해당한다. 한편, “점이 움직여 선을 만든다”는 것은 점의 운동을 가정한 것으로 기하학 공리계에서 선에 대한 관점을 도출한 본 연구에는 해당하지 않는 관점이다. 특징적인 것은 “점이 움직여 선을 만든다”라는 표현은 ‘자연 연속체’와 ‘점의 집합’ 관점에 대한 표현과 혼용되는 경우가 많았으며, “점이 움직여 선을 만든다”라는 표현만을 사용하는 교과서는 2종뿐이었다[56]. 따라서 이 교과서 2종과 “명시적 제시 없음”에 해당하는 교과서 1종을 제외한 7개의 교과서에 대한 분류는 다음과 같다.

<표 Ⅴ-4> 중등 교과서 7종에서 선에 대한 관점

교과서 표현	교과서명	비 고
선 위에 무수히 많은 점이 있다.	ㅇ2	자연 연속체 관점
선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다.	ㄱ, ㄴ, ㄷ2, ㄹ, ㅂ, ㅇ1	점의 집합 관점

분류 결과, 자연 연속체 관점에 해당하는 것은 1종의 교과서였으며 점의 집합 관점에는 6종의 교과서가 해당된다. 하지만 이것만으로 중등 교과서에서 선을 ‘점의 집합’으로 바라보는 관점이 우세하다고 단정할 수 없다. 그 이유로는 첫째, “선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다”라는 표현은 ‘선에는 많은 점이 있다’라는 해석의 소지도 있다(이상은, 2016). 즉, 선이 점의 집합이 아닌 자연 연속체로 해석될 수 있다. 둘째, 직선, 선분, 반직선의 학습 내용에서 선을 점의 집합으로 바라본다는 명시적인 내용이 제시되지 않는다. 이에 대해 ㄷ2교과서에서 직선, 선분, 반직선 개념의 학습을 살펴보면 다음과 같다.

56) 노선숙 외(2003, p. 127)는 ‘점이 움직인 자리가 선이다’라는 표현이 학생들에게 잘못된 이미지를 심어줄 수 있으며 교육과정의 내용체계상 꼭 필요한 개념이 아님을 지적한 바 있다.



직선, 반직선, 선분을 기호로 어떻게 나타낼까?

탐구해 봅시다

다음 사진에서 직선, 반직선, 선분으로 볼 수 있는 것을 각각 찾아보자.

〈사진 1〉 〈사진 2〉 〈사진 3〉

2 오른쪽 그림과 같이 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 하나뿐이다. 즉, 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정한다.

이때 두 점 A, B를 지나는 직선을 직선 AB라 하고, 이것을 기호로

$\overleftrightarrow{AB}$

와 같이 나타낸다. 직선 AB를 직선 l로 나타내기도 한다.

참고 보통 점은 대문자 A, B, C, ⋯로 나타내고, 직선은 소문자 l, m, n, ⋯으로 나타낸다.

직선 AB

3 오른쪽 그림과 같이 직선 AB 위의 점 A에서 점 B쪽으로 뻗은 부분을 반직선 AB라 하고, 이것을 기호로

$\overrightarrow{AB}$

와 같이 나타낸다.

한편, 반직선 BA는 직선 AB 위의 점 B에서 점 A쪽으로 뻗은 부분이다. 따라서 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BA}$는 서로 다른 반직선이다.

반직선 AB

반직선 BA

4 오른쪽 그림과 같이 직선 AB 위의 점 A에서 점 B까지의 부분을 선분 AB라 하고, 이것을 기호로

$\overline{AB}$

와 같이 나타낸다.

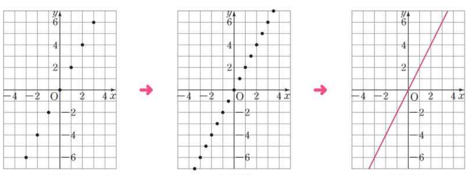
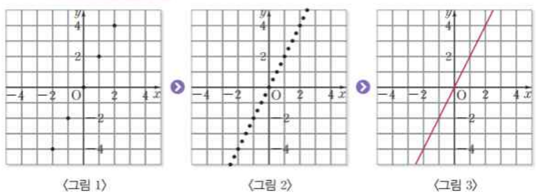
선분 AB

[그림 V-4] 중등 ㄷ2 교과서에서 직선, 선분, 반직선의 학습

ㄷ2 교과서에서는 점과 선의 관계에 대해 '선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다'는 표현을 제시하였지만(<표 V-3> 참고), 직선, 선분, 반직선 개념을 학습하는 부분에 있어 점이 선의 구성 요소임을 드러내는

내용은 없다. [그림 Ⅴ-4]에서 알 수 있듯이 ‘탐구해 봅시다’에서는 자연물이나 구체물을 통해 직선, 선분, 반직선을 찾는 발문을 하고 있는데 이것은 초등 교과서에서의 도입 활동과 유사하다. ㄷ2교과서에서 직선 AB는 명시적으로 정의되지 않으며, 반직선 AB는 ‘직선 AB 위의 점 A에서 점 B쪽으로 뻗은 부분’으로 정의되고 선분 AB는 ‘직선 AB 위의 점 A에서 점 B쪽으로 뻗은 부분’으로 정의된다. 즉, 반직선과 선분은 직선 위에서의 특정한 부분으로 인식된다. 이것은 초등 교과서에서 직선과 반직선을 각각 선분에서 양쪽 혹은 한쪽으로 끝없이 늘인 선으로 인식하는 것과는 차이점을 보이지만 선을 바라보는 관점이 다르다고 단언할 수 없다.

점들의 집합을 선으로 인식하기 위해서는 점들 사이의 관계나 연결상태가 정의되어야 하는데(김용운, 1988, p. 25; 홍진곤, 2008, p. 474) 완전한 공리적 체계가 아닌 학교 기하에서는 점들의 연결상태를 좌표평면 위에서 다루고 있다. 중학교 1학년 <좌표평면과 그래프> 단원에서는 x좌표와 y좌표가 정비례 관계에 있는 점들의 집합이 직선이 됨을 다음과 같이 설명하고 있다.

<table>
<tr><th>ㄷ2 교과서</th><th>ㅇ2 교과서</th></tr>
<tr>
<td>이 표에서 x의 값과 y의 값으로 이루어진 순서쌍 $(-3,\ -6)$, $(-2,\ -4)$, $(-1,\ -2)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 6)$을 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 1〉과 같다. x의 값 사이의 간격을 점점 더 좁게 할수록 〈그림 2〉와 같이 점 사이의 간격도 점점 더 좁아지게 된다. x의 값의 범위를 수 전체로 하면, $y=2x$의 그래프는 〈그림 3〉과 같이 원점을 지나는 직선이 된다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉
참고 $y=ax(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 때에는 원점 O와 그래프 위의 다른 한 점을 찾아 직선으로 이으면 쉽게 그릴 수 있다.</td>
<td>정비례 관계 $y=2x$에서 x의 값 사이의 간격을 점점 좁게 하여 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 1〉, 〈그림 2〉와 같이 점점 직선에 가깝게 촘촘해진다. 따라서 x의 값이 모든 수일 때, 정비례 관계 $y=2x$의 그래프는 〈그림 3〉과 같이 원점을 지나는 직선이 된다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉</td>
</tr>
</table>

[그림 Ⅴ-5] 정비례 관계와 점들의 집합으로서의 선

그런데 <좌표평면과 그래프> 단원은 중등 교육과정의 내용 영역상 ‘함수’에 해당한다. 함수는 변화하는 양 사이의 관계를 의미하며 초등 교

육과정에서는 내용 영역상 '규칙성'에서 이어진 것이다. 초등에서의 관련 성취기준으로는 '[6수04-01] 한 양이 변할 때 다른 양이 그에 종속하여 변하는 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾아 설명하고, □, △ 등을 사용하여 식으로 나타낼 수 있다.'를 제시하고 있다.

종합하자면 중등 교과서에서는 초등 교과서와는 달리 '선 위에 무수히 많은 점이 있다' 혹은 '선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다'와 같은 점과 선의 관계가 명시적으로 제시된다. 특히 이 중에 '선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다'는 점의 집합 관점에 해당하는 표현이다. 하지만, 이러한 관계가 직선, 선분, 반직선의 개념 이해에 직접적으로 이용된다고 볼 수 없다. 따라서 중등 교과서에서 선에 대한 점의 집합 관점이 우세하다고 말하기보다는 기존의 '자연 연속체' 관점에 '점의 집합' 관점이 추가된다고 표현하는 것이 적절해 보인다. 왜냐하면 [그림 Ⅴ-4]의 '탐구해 봅시다'와 같이 구체물을 통한 도입을 하는 것은 초등에서의 방식과 유사하며 자연 연속체 관점을 부각시키기 때문이다. 마지막으로, 점이 모여 직선이 되는 것에 대한 직접적인 시각화와 설명은 [그림 Ⅴ-5]와 같이 좌표평면 위에서 이루어진다. 정비례 관계에 있는 순서쌍 $(x,\ y)$에 해당하는 점들을 좌표평면 위에 촘촘히 나타내면 원점을 지나는 직선이 됨을 설명하고 있다.

제 2 절 점의 특성

이 절에서는 제 4 장에서 정리한 점의 경계적 특성과 사이적 특성을 바탕으로 초등 교과서에서 학습하는 점들이 갖는 특성을 고찰하고자 한다[57].

---

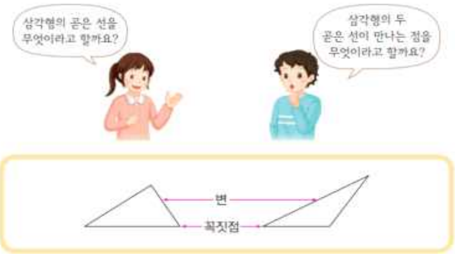
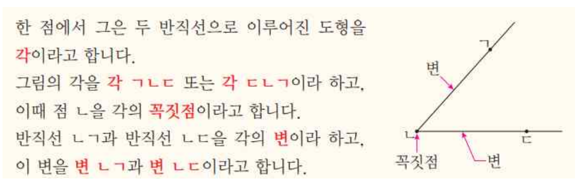
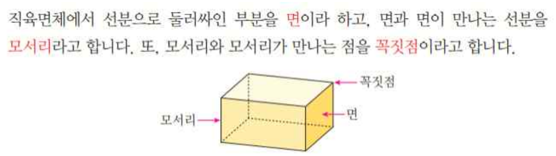
57) 중등 교과서에서 학습하는 점들이 갖는 특성을 고찰하지 않은 것은 본 연구의 명백한 한계점이다. 본 연구는 직선, 선분, 반직선에 대한 관점을 바탕으로 각 관점에서 점의 경계적 특성과 사이적 특성을 도출하고 최초로 정의하였지만 학교 수학에 등장하는 모든 점들이 무조건적으로 이 두 특성 중 하나에 속한다고 볼 수는 없다. 추가적인 논의 및 연구가 필요한 부분이라고 할 수 있다.

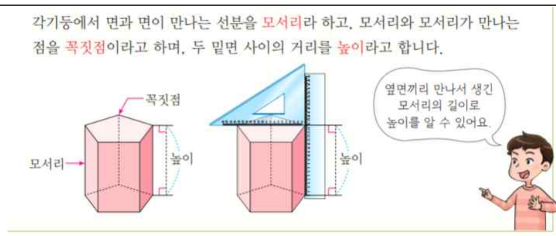
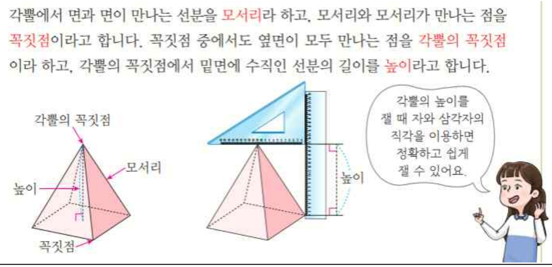
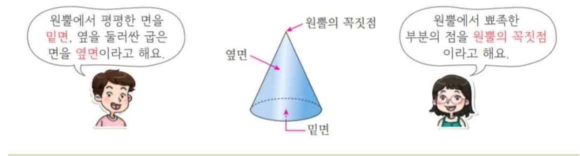
<표 Ⅴ-5> 초등 교과서에서 학습하는 점

학년	단원명	점의 종류
2학년	여러 가지 도형	삼각형의 **꼭짓점**
		사각형의 **꼭짓점**
3학년	평면도형	각의 **꼭짓점**
	원	원의 중심
5학년	합동과 대칭	(합동인 두 도형의) 대응점
		(선대칭도형에서) 대응점
		(점대칭도형에서) 대칭의 중심
	직육면체	직육면체의 **꼭짓점**
6학년	각기둥과 각뿔	각기둥의 **꼭짓점**
		각뿔의 **꼭짓점**
	원기둥, 원뿔, 구	원뿔의 **꼭짓점**
		구의 중심

초등에서 학습하는 점은 총 12개인데, 그 중에 '~의 꼭짓점'이 7개이다. 각 꼭짓점들은 다음과 같이 정의된다.

<표 Ⅴ-6> 초등에서 꼭짓점의 종류와 정의

<table>
<tr><th></th><th>정의</th></tr>
<tr><td>삼각형의 꼭짓점</td><td>
</td></tr>
<tr><td>사각형의 꼭짓점</td><td>정의되지 않음</td></tr>
<tr><td>각의 꼭짓점</td><td>
</td></tr>
<tr><td>직육면체의 꼭짓점</td><td>
</td></tr>
</table>

각기둥의 꼭짓점	
각뿔의 꼭짓점	
원뿔의 꼭짓점	

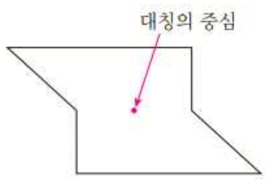
먼저, 삼각형의 꼭짓점은 '삼각형의 두 곧은 선이 만나는 점'으로 정의된다. 그런데 앞서 살펴본 바와 같이 초등학교에서 선은 '자연 연속체' 관점에 가깝다. 삼각형의 두 곧은 선은 자연 연속체 관점에서의 선분이며 선분의 양 끝에 있는 점들은 경계적 특성을 갖는다. 따라서 삼각형의 꼭짓점은 경계적 특성을 갖는다고 볼 수 있다. 또한, 각의 꼭짓점은 <표 Ⅴ-6>과 같이 두 반직선이 만나는 점이다. 반직선의 시작점은 경계적 특성을 가지므로 각의 꼭짓점도 경계적 특성을 가진다. 이후 학습하는 직육면체, 각기둥, 각뿔의 꼭짓점은 모두 '모서리와 모서리가 만나는 점'으로 정의되는데 모서리는 면과 면이 만나는 '선분'으로 정의된다. 결국 이 꼭짓점들은 결국 선분과 선분이 만나서 생기는 끝점을 가리킨다. 이러한 꼭짓점들은 모두 입체도형의 구성요소로써 중요한 학습 개념 중 하나이다. 하지만 원뿔의 꼭짓점은 '원뿔에서 뾰족한 부분의 점'으로 정의되어 같은 논리로 경계적 특성이라 할 수는 없다. 원뿔의 꼭짓점을 뾰족한 부분의 점으로 정의한 것은 옆면에 존재하는 모선을 개념화하기에 어렵기 때문인 것으로 추측된다.

결론적으로 꼭짓점은 도형의 경계에 해당하는 도형의 중요한 학습 요

소이자 개념이다. 특히 위의 <표 Ⅴ-5>와 같이 초등학교에서는 평면도형과 입체도형의 이름과 모양, 구성요소를 처음으로 배우기 때문에 '~의 꼭짓점'을 많이 학습한다. 이 꼭짓점은 선분, 반직선에서 경계적 특성을 갖는 점이기 때문에 초등에서 직선, 선분, 반직선을 학습할 때 경계적 특성을 갖는 점을 강조하면 효과적일 것이다. 구체적인 강조 방안은 다음 절에서 다루기로 한다.

한편, 점대칭도형에서 대칭의 중심은 사이적 특성을 갖는 것으로 볼 수 있다. 제 4 장의 제 2 절에서 사이성을 갖는 점의 특성을 '사이적 특성'이라고 지칭한 바 있다. 구체적으로는 다른 두 점과의 규칙이나 관계에 의해 한 점의 존재성과 위치가 결정되는 경우에 이 세 점들은 '사이적 특성'을 갖는다고 하였다.

한 도형을 어떤 점을 중심으로 180° 돌렸을 때 처음 도형과 완전히 겹치면 이 도형을 점대칭도형이라고 합니다. 이때 그 점을 대칭의 중심이라고 합니다.
대칭의 중심을 중심으로 180° 돌렸을 때 겹치는 점을 대응점, 겹치는 변을 대응변, 겹치는 각을 대응각이라고 합니다.

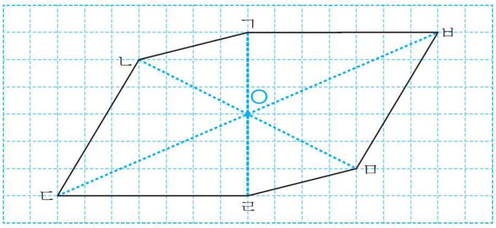


[그림 Ⅴ-6] 점대칭도형과 대칭의 중심

점대칭도형에서 대칭의 중심이란 '그 점을 중심으로 도형을 180도 회전하였을 때 처음 도형과 완전히 겹쳐지도록 하는 점'을 말한다. 점대칭도형과 대칭의 중심에 대한 정의가 이루어진 후에는 다음과 같은 활동이 제시된다.

5 점대칭도형의 대응점끼리 이은 선분과 대칭의 중심 사이의 관계를 알아봅시다.

준비물 4



- 점대칭도형의 대응점끼리 각각 이어 보세요.
- 점대칭도형의 대칭의 중심을 찾아 점 ㅇ으로 표시해 보세요.
- 선분 ㄱㅇ과 선분 ㄹㅇ의 길이, 선분 ㄴㅇ과 선분 ㅁㅇ의 길이, 선분 ㄷㅇ과 선분 ㅂㅇ의 길이를 각각 비교해 보세요. 길이가 서로 같습니다.
- 점대칭도형의 대응점끼리 이은 선분과 대칭의 중심 사이에 어떤 관계가 있는지 이야기해 보세요.
  예 대칭의 중심은 대응점끼리 이은 선분을 둘로 똑같이 나눕니다.

[그림 Ⅴ-7] 대칭의 중심에 대해 파악하는 활동 (p. 67)

[그림 Ⅴ-7]에서 제시하는 활동은 대칭의 중심이 대응점끼리 이은 선분과 어떠한 관계가 있는지 파악하는 활동이다. 대칭의 중심 ㅇ은 선분의 위에 존재하는데 그 위치는 각 대응점인 ㄱ과 ㄹ, ㄴ과 ㅁ, ㄷ과 ㅂ의 중점이다. 교육과정에서 중점에 대한 정의는 중학교 2학년에서 등장하므로 지도서에서는 중점이라는 용어를 사용하지 않고 '대응점끼리 이은 선분을 둘로 똑같이 나눕니다'라는 표현을 사용하였다. 다시 말해 점 ㅇ은 점 ㄱ과 점 ㄹ에서부터 같은 거리만큼 떨어져 있으며, 이것은 점 ㅇ은 $\overline{ㄱㅇ}=\overline{ㅇㄹ}$ 과 같은 관계를 만족하는 선분 ㄱㄹ위의 점이라는 뜻이다. 두 점 ㄱ, ㄹ과의 관계에 의해 점 ㅇ의 위치가 결정되므로 점대칭도형에서 대칭의 중심은 사이적 특성을 갖는다고 할 수 있다.

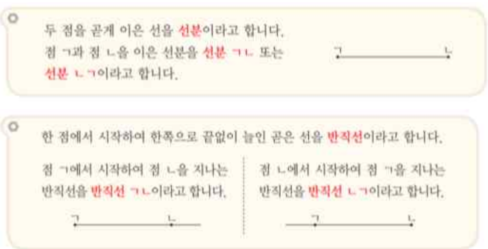
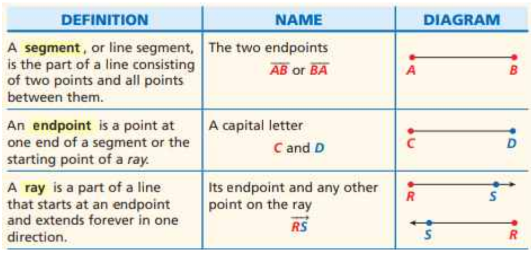
제 3 절 학교수학에의 시사점

교과서 분석을 통해 초등 교과서에서 선에 대한 관점은 '자연 연속체'에 가까우며 초등에서 학습하는 점들 중 다수를 차지하는 '꼭짓점'은 경계적 특성을 갖는 것을 확인하였다. 이를 바탕으로 다음과 같은 시사점을 제시하고자 한다.

첫째, 초등 교과서에서 직선, 선분, 반직선을 학습할 때 경계적 특성을 갖는 점을 가리키는 용어를 도입하여야 한다. 초등 검정 교과서 10종에서는 직선, 선분, 반직선을 학습할 때 선 위에 놓여져 있는 점을 점 ㄱ, 점 ㄴ과 같이 오로지 한글 자음으로만 구분한다. 반면, [그림 Ⅴ-7]과 같이 외국 교과서에서는 선분의 양끝에 있는 점을 'endpoint'라는 용어로 따로 정의하며 이 점들을 빨간색으로 구별하기도 한다. 이 'endpoint'에 대한 번역어인 '끝점'이 경계적 특성을 갖는 점을 가리키는 용어에 대한 후보 중 하나가 될 것이다. 하지만 교과서에서 새로운 용어의 도입은 신중하게 결정해야 하는 문제이므로 많은 숙고가 필요하다. 예를 들어, 반직선ㄱㄴ의 경우 경계적 특성을 갖는 점 ㄱ은 작도의 시작점이기에 '끝점'이라기 보다는 '시작점'이라는 용어가 적절할 수 있다. 이에 대해 추가적인 논의가 필요할 것이다.

만약 깊은 논의 끝에 경계적 특성을 갖는 점을 지칭하는 용어가 도입된다면 다음과 같은 이점이 있을 것으로 예상한다. 첫째, 경계적 특성을 갖는 점과 그렇지 않은 점을 명확히 구분할 수 있게 된다. 특히 반직선의 경우, 기존에 반직선ㄱㄴ과 반직선ㄴㄱ의 구분은 자음의 순서가 다르다는 것과 작도 방향이 다르다는 것에 의해 이루어졌다. 하지만 만약 경계적 특성을 갖는 점을 지칭하는 용어로써 끝점(혹은 시작점)이 도입된다면 '반직선ㄱㄴ의 끝점(혹은 시작점)은 점 ㄱ이고 반직선ㄴㄱ의 끝점(혹은 시작점)은 점 ㄴ이다.'와 같이 점에 초점을 맞춘 표현이 가능하다. 둘째, 직선, 선분, 반직선의 학습 이후에 학습하는 '각의 꼭짓점'을 보다 명확하게 정의할 수 있다. 기존에는 <표 Ⅴ-6>와 같이 각을 '한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형'으로 정의하고, 각의 꼭짓점을 설명하

기 위해 각 ㄱㄴㄷ의 그림을 그려놓고 점 ㄴ을 각의 꼭짓점으로 정의한다. 하지만 경계적 특성을 갖는 점을 지칭하는 용어가 도입된다면 그림을 이용하지 않고도 ‘두 반직선이 함께 갖는 끝점(혹은 시작점)’을 ‘각의 꼭짓점’이라고 정의할 수 있게 된다. 또한, 2학년에 학습한 삼각형의 꼭짓점은 ‘삼각형의 두 곧은 선이 만나는 점’으로 정의된 바 있다. 하지만, 직선, 선분, 반직선을 학습한 후에는 삼각형의 꼭짓점을 ‘두 선분이 만나는 끝점(혹은 두 선분이 함께 갖는 끝점)’으로 의미가 명확하게 드러나도록 지칭할 수 있게 된다.

2015 개정 교육과정 국정 교과서	외국 교과서(California Geometry)
	

DEFINITION	NAME	DIAGRAM
A **segment**, or line segment, is the part of a line consisting of two points and all points between them.	The two endpoints $\overline{AB}$ or $\overline{BA}$	A B
An **endpoint** is a point at one end of a segment or the starting point of a *ray*.	A capital letter *C* and *D*	C D
A **ray** is a part of a line that starts at an endpoint and extends forever in one direction.	Its endpoint and any other point on the ray $\overrightarrow{RS}$	R S S R

[그림 Ⅴ-8] 국내 교과서와 외국 교과서 비교

둘째, 직선, 선분, 반직선 중 양 끝에 있는 두 점이 모두 경계적 특성을 갖는 선분을 먼저 학습하여야 한다. 초등 검정 교과서 10종을 살펴본 결과, 9종의 교과서에서는 선분에 대해 먼저 학습하지만 1종의 교과서에서는 직선을 먼저 학습하는 것을 확인하였다. 이 1종의 교과서에서는 직선의 정의 자체가 나머지 교과서와 달랐는데(<표 Ⅴ-7> 참조), 정의의 내용을 보면 그 이유가 학습 순서에서 비롯된 것임을 짐작할 수 있다. 직선을 먼저 학습하는 교과서에서는 선분을 학습하지 않았으므로 직선의 정의에 선분이 포함되지 않고 ‘양쪽으로 끝이 없는 곧은 선’으로 정의된다. 하지만 두 정의에서 보면 공통적으로 ‘끝없이’ 혹은 ‘끝이 없는’이라는 표현이 포함되어 선이 무한히 뻗어나간다는 것을 의미한다. 본 연구의 표현을 사용하면 이것은 자연 연속체인 선에서 경계적 특성을 갖는 점이 존재하지 않는 것으로 해석할 수 있다. 하지만 경계에 대한 논의에

서 살펴보았듯이, 경계란 일상적 경험을 통해 생기는 자생적 개념이므로 처음부터 경계가 없는 직선을 학습하는 것보다는 경계가 있는 선분을 먼저 학습하는 것이 인지적 부담이 적을 것이다[58]. 물론 이것은 이론적 고찰에 불과하므로 실증적 연구가 뒷받침되어야 할 것이다.

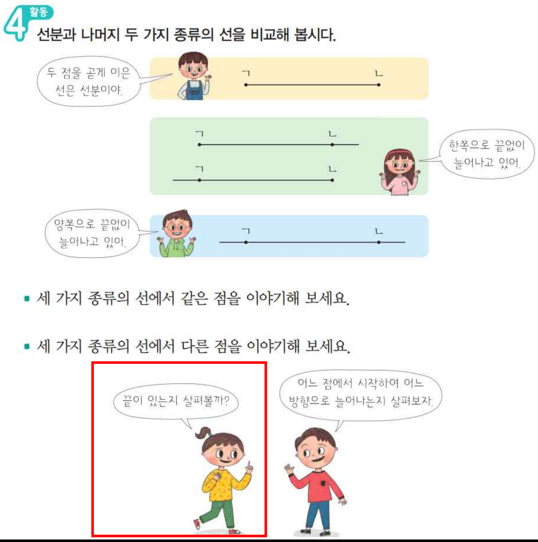
<표 Ⅴ-7> 학습 순서가 다른 교과서에서 직선의 정의

	선분을 먼저 학습하는 교과서	직선을 먼저 학습하는 교과서
직선의 정의	선분을 양끝으로 끝없이 늘인 곧은 선	양쪽으로 끝이 없는 곧은 선

셋째, 경계적 특성을 갖는 점을 기준으로 직선, 선분, 반직선을 구분하고 관계를 파악하여 보는 학습 기회를 제공해야 한다. 그 한 예로 F 교과서에서 제시하는 대화를 들 수 있다. [그림 Ⅴ-9]와 같이 F 교과서에서는 세 선의 차이점에 대해 논할 때 '끝이 있는지 살펴볼까?'라는 유도 발문을 하고 있다. 만약 첫 번째 시사점에서 '경계적 특성을 갖는 점'을 '끝점'으로 지칭하기로 결정하였다면, 이 발문을 '끝점이 있는지 살펴볼까?' 혹은 '세 선에는 각각 끝점이 몇 개나 있을까?'와 같이 재구성할 수 있을 것이다. 이것은 끝이라고 하는 모호한 표현을 끝점이라고 하는 보다 구체적인 표현으로 바꾸었다는 점에서 첫 번째 시사점의 이점이라고도 할 수 있다. 학생들은 '끝'이라는 표현의 모호함 때문에 끝점을 포함한 끝부분의 선에 주목할 가능성이 있다. 하지만 '끝점'이라는 표현을 사용한다면 학생들은 오로지 점에만 집중할 수 있게 될 것이다.

58) 사실 이것은 무한과 유한에 대한 인식과도 관련이 있을 것이다. 하지만 이에 대해 논하는 것은 방대하므로 본 연구에서는 더 깊게 다루지 않았다.

F 교과서



[그림 Ⅴ-9] 세 선의 비교에서 ‘끝’에 주목하는 발문

또한, 직선, 선분, 반직선의 관계를 파악하는 활동으로써 ‘두 반직선을 끝점이 만나도록 이으면 무슨 도형이 될까?’와 같은 발문을 할 수 있다. 이 발문의 의도된 답변은 두 반직선의 끝점이 서로 만나도록 잘 이으면 직선이 된다는 것이다[59]. 이러한 발문이 유의미한 이유는 직선, 선분, 반직선의 정의[60]만으로는 ‘선분의 양 끝을 늘이면 직선을 만들 수 있다’는 선분에서 직선으로의 관계밖에 파악할 수 없기 때문이다. 예를 들어 반직선의 정의만으로는 반직선 두 개를 적절히 이어서 직선이 된다는 것을 명확히 파악할 수 없으며, 그러한 관계를 파악할 수 있는 별도의 활동을 제공하는 교과서도 존재하지 않았다. 이렇게 어떤 두 선을 이어서 다른 선을 만드는 발문을 할 때 ‘끝점이 만나도록 이으면’이라는 표현이 사용될 수 있고, 반대로 한 선의 분할 결과에 대한 발문을 할 때에는 ‘이 점을 기준으로 선을 나누면(분할하면)’이라는 표현을 사용할 수 있다. 예를

59) 하지만 각의 정의에 대해 학습한 후에는 이 발문에 대해 ‘각이 된다’라는 또 다른 답변이 가능해질 것이다.
60) 초등에서의 정의를 다시 살펴보자면, 직선은 ‘선분을 양끝으로 끝없이 늘인 곧은 선’, 선분은 ‘두 점을 곧게 이은 선’, 반직선은 ‘한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선’으로 정의된다.

들어 ‘반직선 위의 (끝점이 아닌) 한 점을 기준으로 반직선을 나누면 어떻게 될까?’라는 발문을 할 수 있을 것이다. 이 발문에 예상되는 답변 중에는 ‘(끝점이 아닌) 한 점이 한 선분의 끝점이 된다’라는 답변도 포함될 것이다.

제 6 장 결론

제 1 절 요약 및 시사점

본 연구는 초등학교 3학년 검정 교과서에서 직선, 선분, 반직선의 학습 양상이 다르다는 것에서 출발하여 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성을 도출하고 이를 통해 학교수학에의 시사점을 이끌어내고자 하였다. 대표적인 기하학 저서인 『원론』, 『Foundations of Geometry』를 분석하고 '경계'와 '사이성'에 대한 문헌을 고찰하여 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성을 다음과 같이 도출하였다.

'자연 연속체' 관점에서 선은 비이산적이며 연속적이고 점은 선을 분할하는 도구로써의 역할을 한다. 하나의 선이 그 위에 놓여진 점에 의해 두 개의 선으로 분할되면 분할된 위치에는 각각 점이 존재하며 이때 이 점들은 '경계적 특성'을 갖는다고 한다. 다시 말해, 점이 선을 분할하는 도구이거나 분할의 결과로서 선의 끝에 존재하는 것으로 생각할 때 점은 '경계적 특성(boundary property)'을 갖는다. 구체적으로 한 직선은 두 개의 반직선으로 분할될 수 있으며 한 반직선은 하나의 선분과 또 다른 반직선으로 분할되고 한 선분은 두 개의 선분으로 분할된다. 물론 분할은 가역적인 조작이므로 두 개의 반직선을 이어서 하나의 직선이 되거나 한 개의 선분과 한 개의 반직선을 이어서 또 다른 반직선이 될 수 있다.

반면, '점의 집합' 관점에서 직선, 선분, 반직선은 점이 모여 구성된 것으로 점들이 모이는 규칙이나 점들간의 관계가 필요하다. 예를 들어, '두 점 사이에 한 점이 있다'와 같이 선 위에서 세 점 사이의 순서 관계를 통해 점의 존재성이 보장되고 배열 방식이 구체화된다. 이처럼 사이성을 갖는 점의 특성을 '사이적 특성'으로 지칭하고자 한다. 다시 말해, 다른 두 점과의 규칙이나 관계에 의해 한 점의 존재성과 위치가 결정되는 경우에 이 세 점들은 '사이적 특성(betweenness property)'을 갖는다고 약

속하고자 한다. 직선, 선분, 반직선은 사이적 특성을 갖는 점들의 집합이다.

이어서 직선, 선분, 반직선에 대한 관점과 점의 특성을 바탕으로 초등과 중등 교과서에 대한 분석을 실시하였다. 그 결과, 초등 교과서에서는 '자연 연속체' 관점이 우세하며 중등 교과서에서는 '자연 연속체' 관점과 더불어 '점의 집합' 관점이 시작되는 것을 확인하였다. 또한, 초등 교과서에서 학습하는 점 중 다수를 차지하는 '~의 꼭짓점'은 경계적 특성을 갖는 점으로 보았다. 분석 결과를 통해 초등 교과서에서는 '자연 연속체' 관점과 '경계적 특성'을 갖는 점에 대한 강조가 이루어져야 한다고 판단하였으며, 초등 검정 교과서의 구성에 있어 다음과 같은 시사점을 제시하였다.

첫째, 경계적 특성을 갖는 점을 가리키는 용어를 도입하여야 한다.
둘째, 직선, 선분, 반직선 중 양 끝에 경계적 특성을 갖는 점들이 있는 선분을 먼저 학습하여야 한다.
셋째, 경계적 특성을 갖는 점을 기준으로 직선, 선분, 반직선을 구분하고 관계를 파악하여 보는 학습 기회를 제공해야 한다.

제 2 절 한계 및 제언

마지막으로 본 연구의 한계 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 도출한 관점은 이론적 연구를 통해 도출된 것이므로 학생들의 인지적 수준을 고려하지 않았다는 한계를 갖는다. 따라서 실증적 연구를 통해 본 연구에서 도출한 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점이 학생들의 인지적 수준에서 이해 가능한 것인지 혹은 다른 제 3의 관점은 존재하지는 않는지 확인할 필요가 있다[61]. 또한 본 연구의 분석 결과, 초등 교과서는

61) 제 3의 관점으로 가능한 것 중 하나는 선을 '점이 움직여 만들어진 것'으로 보는 것이다. 이것은 Lakoff & Núñez(2000)가 말한 '점으로부터 선을 개념화하는 세 가지 은유 방식' 중 하나이다. 다만 유클리드와 힐베르트의 기하학 공리계에서는 '점의 이동'에 대한 정의나 공리를 찾을 수 없어 본 연구에서는 이 관점을 배제하였다.

선에 대한 자연 연속체 관점을 갖고 있으며 중등 교과서에서는 점의 집합 관점이 드러나기 시작하는 것으로 보았는데, 초·중등 학생들이 실제로 어떠한 관점을 갖는지 실증적 연구를 진행할 필요가 있다. 그러한 연구의 결과를 통해 초·중등 학생들의 인지적 수준과 선에 대한 관점과의 관계를 파악하고 초등과 중등 교과서를 구성함에 있어 지향해야 하는 바를 밝혀낼 수도 있을 것이다.

둘째, 본 연구에서는 중등 교과서에서 학습하는 점들의 특성을 분석하지 않았으며 점의 사이적 특성에 대한 교육적 시사점을 도출하지 않았다는 한계를 갖는다. 본 연구에서는 초등 교과서에서 점의 경계적 특성을 강조해야 한다는 주장을 하며 경계적 특성을 강조하는 교과서 구성 방안을 제시하였다. 반면, 사이적 특성에 대해서는 교육적 시사점이나 교과서 구성 방안을 제안하지 않았다. 사실 이것은 점들의 특성을 분석할 때 초등 교과서에서 학습하는 점만을 대상으로 한 것에 기인한다. 따라서 중등 교과서에서 학습하는 점들의 특성을 분석할 필요가 있으며 점의 사이적 특성을 강조하는 방법은 무엇인지 고민할 필요가 있다.

셋째, 본 연구에서는 초등 교과서에서의 직선, 선분, 반직선의 학습에 대한 시사점을 도출하였지만 중등 교과서에서의 직선, 선분, 반직선의 학습에 대한 시사점도 연구할 필요가 있다. 교과서 분석을 통해 초등과 중등에서 직선, 선분, 반직선이 학습되는 양상을 살펴본 결과, 직선, 선분, 반직선의 정의와 학습 방법 등에서 차이가 존재하였다. 초등과 달리 중등에서는 점과 선의 관계에 대해 언급되지만 그 내용이 직선, 선분, 반직선의 학습에 직접적인 영향을 미치지 않는 것으로 보인다. 선에 대한 관점과 점의 특성, 중학생들의 인지 수준, 초등에서 학습 경험이 존재한다는 것을 고려할 때, 중등 교과서에서는 직선, 선분, 반직선을 어떻게 학습해야 하는지에 대한 연구가 필요하다.

참고 문헌

강미광, & 황슬기. (2010). 교과서에서 나타난 작도방법의 정당화. **한국수학교육학회 학술발표논문집**, 2010(1), 151-163.

강흥규, & 조영미. (2002). 학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의. **수학교육학연구, 12**(1), 95-108.

교육부. (2019). <교과용도서 다양화 및 자유발행제 추진계획(안)>

김상미. (2018). 초등학교 수학 교과서에 제시된 각의 개념과 도입 방법 분석. **초등수학교육, 21**(2), 209-221.

김성환. (2018). 장소에서 공간으로: 근대 과학의 한 가지 성립 배경. **철학탐구, 51**, 65-90.

김수미, & 허혜자. (2022). 중학교 수학교과서에 제시된 각 개념 제시 양상. **수학교육, 61**(2), 305-322.

김용운. (1988). 집합론 성립의 배경으로서의 무한론에 관해서. **한국수학사학회지, 5**(1), 5-37.

김창수, & 강정기. (2017). <Euclid 원론>에서 작도의 의미에 대한 고찰. **한국학교수학회논문집, 20**(2), 119-139.

노선숙, 김영수, & 김민경. (2003). **지식기반사회의 수학·정보과학 교육과정개발 기초연구**. 서울: 이화여자대학교 출판부.

도종훈. (2008). 직선의 대수적 표현과 직선성(直線性)으로서의 기울기. **수학교육 논문집, 22**(3), 337-347.

박교식, & 임재훈. (2004). 다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 14**(1), 19-37.

박교식, & 임재훈. (2005). 초등학교 수학 교과서에서 사용되는 무정의 용어 연구. **수학교육학연구, 15**(2), 197-213.

박교식. (2015). 우리나라와 일본의 초등학교 수학 교과서에서의 각 및 각도 지도 내용 비교 연구. **학교수학, 17**(1), 35-46.

백대현. (2010). 초등학교 수학 교과서에 제시된 용어 사용과 표현의 적절성 고찰. **학교수학, 12**(1), 61-77.

백승주, & 최영기. (2020). 제논의 역설에 대한 철학적 검토를 통한 교육적 시사점 고찰. **한국수학사학회지, 33**(6), 327-343.

백승주. (2022). **학교수학의 공약불가능성 현상 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

양성덕, & 조경희. (2011). 힐베르트의 저서 '기하학의 기초'에 관하여. **한국수학사학회지, 24**(4), 61-86.

우정호, & 권석일. (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. **수학교육학연구, 16**(1), 1-23.

우정호, & 민세영. (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. **수학교육학연구, 12**(3), 409-424.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, & 임재훈. (2016). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

유미영, & 최영기. (2015). [유클리드 원론] I 권 정리 22 의 Diorism을 통해서 본 존재성. **수학교육학연구, 25**(3), 367-379.

유재민. (2009). 아리스토텔레스에서 기하학적 대상의 존재론적 위상과 경계적 성격. **철학논집, 18**, 269-301.

유재민. (2015). 아리스토텔레스 자연철학에서 경계(peras) 개념과 제논의 장소의 역설. **철학논총, 79**, 167-195.

이규희. (2021). '점'과 '선'에 관한 수학적 분석과 교과서 분석. **한국학교수학회논문집, 24**(1), 39-57.

이무현. (2018). **기하학원론: 평면기하.** 서울: 교우사.

이상봉. (2009). 서양 고대 철학에 있어서 공간. **철학논총, 58**, 279-304.

이상봉. (2010). 서양 중세의 공간 개념-장소에서 공간으로. **철학논총, 62**, 285-311.

이상은. (2016). **무한소적 관점에서의 점, 선, 면의 의미 고찰.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이종희. (2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석. **학교수학, 3**(1), 25-44.

이지현. (2011). 수학에서의 정의 개념 변화에 대한 철학적 분석. **한국수학사학회지, 24**(1), 63-73.

임재훈. (1998). **플라톤의 수학교육 철학연구.** 서울대학교 대학원 박사 학위논문.

정영옥. (1997). 수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점. **수학교육학연구, 7**(1), 295-316.

한채린, & 임웅. (2022). 초등학교 수학 교과용 도서 선정과 관련한 교사들의 의사결정 탐색. **수학교육, 61**(2), 221-237.

홍갑주, & 강정민. (2017). 초등학교 수학 교과서의 이해에 유클리드 원론이 주는 시사점. **초등수학교육, 20**(1), 117-130.

홍진곤. (2008). 무한 개념의 이해에 관하여. **수학교육학연구, 18**(4), 469-482.

Alcock, L., & Simpson, A. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the learning of mathematics, 22*(2), 28-34.

Bell, J. L. (2019). *The continuous, the discrete and the infinitesimal in philosophy and mathematics (Vol. 82).* Berlin/Heidelberg, Germany: Springer.

Birkhoff, G. D., & Beatley, R. (1999). *Basic Geometry.* New York: Chelsea Publishing Company.

Blanché, R. (1962). *Axiomatics*(G. B. Keene Trans.). London : Routledge.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics.* New York: John Wiley & Sons.

Burton, H. E. (1945). The optics of Euclid. *JOSA, 35*(5), 357-372.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry.* New York: Wiley & Sons.

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2012). *The mathematical experience, study edition.* Boston: Birkhäuser Boston.

Drozdek, A. (2016). *Greek philosophers as theologians: the divine arché.* New York: Routledge.

Eves, H. W. (1969). *An Introduction to the History of Mathematics: 3rd Ed.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Eves, H. W. (1997). *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. New York: Dover Publications.

Fischbein, E., Tirosh, D & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics 10*(1). 3-40.

Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry: From the Greek text of JL Heiberg* (1993-1885).

Francis, G. (2002). *Axiomatic systems for geometry*. Lecture Note.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel, Dordrecht, Holland.

Furley, D. J. (1967). *Two studies in the Greek atomists*. New Jersey: Princeton University Press.

Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond.* New York: Springer-Verlag.

Hashimoto, J. (1958). Betweenness geometry. *Osaka Mathematical Journal, 10*(2), 147-158.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*. New York: Dover Publications.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry, (trans. L. Unger).* Illinois: Open Court Publishing Company.

Hunter, D. J. (2009). *Essentials of discrete mathematics*. London: Jones & Bartlett Learning.

Huntington, E. V., & Kline, J. R. (1917). Sets of independent postulates for betweenness. *Transactions of the American Mathematical Society, 18*(3), 301-325.

Janich, P. (1992). *Euclid's Heritage. Is Space Three-Dimensional?*

(Vol. 52). Berlin: Springer Science & Business Media.
Jirotková, D., & Littler, G. (2003). Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 125-132.
Kidd, I. G. (Ed.). (1999). *Posidonius*(Vol. 2). Cambridge: Cambridge University Press.
Kline, M. (1980). *Mathematics : The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press
Kontorovich, I., & Zazkis, R. (2016). Turn vs. shape: Teachers cope with incompatible perspectives on angle. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 223-243.
Kutateladze, S. S. (2006). Leibniz's Definition of Monad. *arXiv preprint math/0608298.*
Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from(Vol. 6).* New York: Basic Books.
Lucas, J. R. (2002). *The Conceptual roots of mathematics*. New York : Routledge.
Mandelbrot, B. B., Evertsz, C. J., & Gutzwiller, M. C. (2004). *Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond (Vol. 3).* New York: Springer.
Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational studies in Mathematics, 48*, 239-257.
Moravcová, V., & Hromadová, J. (2020). Straight line or line segment? Students' concepts and their thought processes. *Teaching Mathematics and Computer Science, 18*(4), 327-336.
Morrow, G. R. (Ed.). (1970). *A Commentary on the first book of Euclid's Elements*. New Jersey: Princeton University Press.
Mueller, I. (1969). Euclid's Elements and the axiomatic method.

British Journal for the Philosophy of Science, 20(4), 289-309.

Nagel, E. (1939). The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris, 7*, 142-223.

Penrose, R. (1991). *The emperor's new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*. New York: Penguin Books.

Reid, C. (1996). *Hilbert*. New York: Springer-Verlag.

Russell, B. (2014). *Principles of mathematics: 2nd Ed*. New York: W. W. Norton & Company.

Russo, L. (2004). *The forgotten revolution: how science was born in 300 BC and why it had to be reborn.* Berlin: Springer Science & Business Media.

Shreves, J. W. (1969). Angle. In NCTM, *Historical topics for the mathematical classroom*. Thirty-first Yearbook. 362-363.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking (Vol. 11)*. New York: Kluwer Academic Publishers

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86,* 97-124.

Ten Brinke, W., Squire, D. M., & Bigelow, J. (2004). *Similarity: measurement, ordering and betweenness.* In Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 8th International Conference, KES 2004, Wellington, New Zealand, September 20-25, 2004, Proceedings, Part II 8 (pp. 996-1002). Springer Berlin Heidelberg.

Trendelenburg, F. A. (1898). *Outlines of Logic: An English Translation of Trendelenburg's Elementa Logices Aristoteleae.* London: AT Shrimpton & Son.

Troyanov-EPFL, M. (2014). *On the origin of Hilbert Geometry*. arXiv preprint arXiv:1407.3777.

Tubbs, R. (2009). *What is a number? mathematical concepts and their origins.* Maryland: Johns Hopkins University Press.

Veblen, O. (1904). A system of axioms for geometry. *Transactions of the American mathematical society, 5*(3), 343-384.

Venema, G. (2011). *Foundations of geometry: 2nd ed.* Boston: Pearson Higher Ed.

Wilder, R. L. (1967). The Role of the Axiomatic Method. *The American Mathematical Monthly, 74*(2), 115-127.

Wylie Jr, C. R. (1944). Hilbert's axioms of plane order. *The American Mathematical Monthly, 51*(7), 371-376.

Zormbala, K., & Tzanakis, C. (2004). The concept of the plane in geometry: Elements of the historical evolution inherent in modern views. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 37-62.

<부록1>『원론』에서 ‘둘러싸이다(be contained by)’가 사용되는 정의 (Fitzpatrick, 2008)

	내 용
1권 정의 15	A circle is a plane figure contained by a single line which is called a circumference, (후략)
1권 정의 18	A semi-circle is the figure contained by the diameter and the circumference cuts off by it. (후략)
1권 정의 19	Rectilinear figures are those (figures) contained by straight -lines (후략)
2권 정의 1	Any rectangular parallelogram is said to be contained by the two straight-lines containing the right angle.
3권 정의 6	A segment of a circle is the figure contained by a straight-line and a circumference of a circle.
3권 정의 7	The angle of a segment is that contained by a straight-line and a circumference of a circle.
3권 정의 8	The angle in a segment is the angle contained by the joined straight-lines, (후략)
3권 정의 10	A sector of a circle is the figure contained by the straight-lines surrounding an angle, (후략)
11권 정의 5	The inclination of a straight-line to a plane is the angle contained by the drawn and standing straight-lines, (후략)
11권 정의 6	The inclination of a plane to another plane is the acute angle contained by the straight-lines, (후략)
11권 정의 9	Similar solid figures are those contained by equal numbers of similar planes (which are similarly arranged).
11권 정의 11	(중략) .. a solid angle is that contained by more than two plane angles, (후략)
11권 정의 12	A pyramid is a solid figure, contained by planes, (which is) constructed from one plane to one point.
11권 정의 13	A prism is a solid figure, contained by planes, of which the two opposite (planes) are equal, similar, and paralle, (후략)
11권 정의 25	A cube is a solid figure contained by six equal squares.
11권 정의 26	An octahedron is a solid figure contained by eight equal and equilateral triangles.
11권 정의 27	An icosahedron is a solid figure contained by twenty equal and equilateral triangles.
11권 정의 28	A dodecahedron is a solid figure contained by twelve equal, equilateral, and equiangular pentagons.

Abstract

A Study of Two Perspectives on straight lines, line segments, and rays and the Properties of Points

Jung, Soon-Won
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

The purpose of this study is to derive different perspectives on straight lines, line segments, and rays, and the properties of points from each perspective, and to find implications for school geometry education. The research method is literature analysis and review, and the research objects are Euclid's Elements, Hilbert's Foundations of Geometry, and literature and data on 'boundary' and 'betweenness'. The two perspectives on straight lines, line segments, and rays and the properties of points derived from the literature analysis and review are as follows.

In the "natural continuum" perspective, straight lines, line segments, and rays are not constructed from a collection of points, and points are themselves tools for dividing continuous lines. A line divided by a point is said to have "boundary property" if there is a point at the location of the division. Thus, a straight line, a line segment, and a ray have 0, 2, and 1 points with boundary property, respectively. On the other hand, from a "set of points" perspective, a line, line segment, or ray is a collection of points and requires a rule or relationship between the points. For example, the ordering relationship between three points on a line, such as "there is a point between two points," ensures the existence of the points and specifies how they are arranged. When the existence and position of a point is determined by a rule or relationship with the other two points, the three points are said to have a "betweenness property". Straight lines, line segments, and rays are sets of points with the betweenness property.

We then analyzed elementary and middle school geometry textbooks based on the perspective of straight lines, line segments, and rays and the properties of points. As a result, we found that the "natural continuum" perspective predominates in primary textbooks, and the "set of points" perspective begins to emerge alongside the "natural continuum" perspective in secondary textbooks. In addition, the 'vertex of ~', which accounts for the majority of points studied in elementary textbooks, is considered to be a point with boundary property. Based on the results of the analysis, we concluded that elementary textbooks should emphasize the "natural continuum" perspective and points with "boundary property," and suggested the following implications for the organization of elementary textbooks. First, a term for points with boundary property should be introduced.

Second, among straight lines, line segments, and rays, line segments where both points have boundary property should be taught first. Third, provide opportunities to learn to distinguish between straight lines, line segments, and rays based on points with boundary property and to identify and view their relationships.

The results of this study are significant in that the different perspectives on straight lines, line segments and rays, and the properties of points can provide new perspectives on elementary and middle school geometry education. However, the limitations of this study include the fact that it is a theoretical study and does not consider the cognitive level of the students, that it does not analyze the properties of all the points studied in school geometry education, and that it does not suggest any implications for the properties between them. In order to overcome these limitations and provide broad and meaningful implications for school geometry education, further theoretical and empirical studies are needed. We hope that this study can serve as a reference for further research.

keywords : straight lines, line segments, rays, natural continuum perspective, set of points perspective, boundary property, betweenness property
Student Number : 2021-25636