교육학박사학위논문

활동이론에 기반한 수학 개념 형성에 관한 연구

- '수학 개념 형성 활동 체계'의 성질 및 사례를 중심으로 -

2023년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 수 민

활동이론에 기반한 수학 개념 형성에 관한 연구

-'수학 개념 형성 활동 체계'의 성질 및 사례를 중심으로 -

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학박사 학위논문으로 제출함

2023년 5월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 수 민

박수민의 박사 학위논문을 인준함

2023년 7월

위 원 장 ________________________ (인)

부위원장 ________________________ (인)

위 원 ________________________ (인)

위 원 ________________________ (인)

위 원 ________________________ (인)

국문초록

활동이론(Activity Theory)은 학습과 의식의 발달을 활동 중심의 사회적 상호작용에 따른 결과로 보는 이론으로, 학습을 기존에 개인의 인지적 발달에 중점을 둔 관점을 넘어서 사회, 문화, 공동체 등 다양한 맥락에서 바라보고 분석하는 이론적 틀을 제공하고 있다. 이 연구는 인간 활동을 다양한 맥락에서 설명 가능한 활동이론을 기반하여 수학 개념 형성 과정을 활동 체계로 설명할 수 있는 가능성을 확인하고자 하는 연구 동기를 가진다.

이에 이 연구는 수학 개념 형성의 관점에서 활동 체계를 개발하고 분석 방법을 제안한 후, 이를 바탕으로 한 수업 사례의 분석을 통해 수학 개념 형성 활동 체계의 성질을 도출하는 것을 연구의 목적으로 한다. 연구 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 세 가지 연구 질문을 설정하고 이에 답하였다. 첫째, 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 구성 요소는 어떠한 맥락과 특성을 가지며, 이를 기반으로 한 수학 개념 형성 활동 체계는 어떻게 정의될 수 있는가? 둘째, 수학 개념 형성 활동은 수학 개념 형성 활동 체계를 통해 어떻게 분석될 수 있는가? 셋째, 분석 결과를 통해 도출된 수학 개념 형성 활동 체계의 성질은 무엇인가?

활동이론의 개발 연구는 그 자체로 연구의 대상일 뿐만 아니라 일반적인 연구 방법론이기도 하다. 이 연구는 활동이론 개발 연구의 특성에 따라 두 가지 연구 방법을 통해 수행된다. 첫째, 문헌 연구를 통해 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 활동 체계 및 구성 요소의 특성을 정의함으로써 활동 체계의 개념적 틀을 구성하고 분석 방법을 제안한다. 둘째, 제안된 분석 방법을 통해 실제 수업 사례를 구체적이고 종합적으로 분석하는 질적 사례연구를 수

행한다.

첫 번째 연구 질문에 대한 답을 위해 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 구성 요소에 부합하는 이론들을 고찰하고 이를 통해 구성 요소가 가지는 맥락과 특성을 도출한 후 이를 기반으로 수학 개념 형성 활동 체계를 정의하였다. 주요 연구 결과는 다음과 같다. 수학 개념 형성의 특성에 따라 활동 체계의 구성 요소의 개념을 구체화하고, 이 구성 요소를 바탕으로 수학 개념 형성의 분석을 위, 아래 그리고 안과 밖으로 확장하는 도구로서 수학 개념 형성 활동 체계(Mathematical Concept Formation Activity System : MCFAS)의 개념적 틀을 구성하였다. 개념적 틀은 분석의 관점을 미시적 관점 즉, 수업 안의 학습 공간 및 시간, 과제의 상황적 맥락 및 거시적 관점 즉, 수업 밖의 학습 공간 및 시간, 개인의 사회문화적 맥락에 두는 관점들로 구분하고, 관점을 다양하게 네트워킹할 수 있는 가능성을 보여주었다.

두 번째 연구 질문에 대한 답을 위해 MCFAS를 바탕으로 한 분석 방법을 제안하고 이를 통해 실제 중학교 3학년 학생들을 대상으로 한 수업의 사례에서 수학 개념 형성 활동을 분석하였다. 주요 연구 결과는 다음과 같다. 수업 과제의 학습 목표를 기반하여 열여섯 개의 중심 MCFAS를 구성하고 각 중심 MCFAS를 도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동과 같은 주변 MCFAS를 분석 단위로 구체적으로 분석하였다. MCFAS를 통한 수학 개념 형성 과정을 보다 종합적으로 분석하기 위해 MCFAS의 개념적 틀의 행위 및 맥락의 영역에 초점을 맞추어 수학적 도구 사용이 능숙해지는 과정과, 주체 간 상호작용을 통해 수학 개념을 합의하는 과정을 통해 수학 개념이 어떻게 형성되는지 확인하였다.

세 번째 연구 질문에 대한 답을 위해 분석 결과를 바탕으로 확장된 수학 개념 형성 활동 체계의 도식 사례를 제시하고, 수학 개

념 형성 활동 체계가 가지는 네 가지 성질을 도출하였다. 주요 연구 결과는 다음과 같다. 활동이론의 활동 체계는 고도의 예측 이론이 아닌, 일반적인 개념 체계를 구성하는 일련의 기본 원칙이다. 이 연구의 결과를 통해 활동이론 모델의 기본 원리를 수정·보완하여 수학 개념 형성 활동 체계를 구성하는 일련의 원칙, 즉, 수학 교수·학습 환경에 적용되는 MCFAS의 기본 성질을 다음과 같이 도출할 수 있었다. 첫째, MCFAS는 단위적 특성을 가진다. MCFAS는 연구자가 설정한 학습 활동의 목표가 되는 수학 개념 형성을 위한 가장 단순한 단위를 최소단위 활동 목표로 보고 이를 축소 또는 왜곡하지 않는 기준을 결과물을 통해 잡아갈 수 있다. 최소단위 MCFAS는 교수·학습 활동의 목표나 분석의 목적에 따라 더 작은 단위로 분해될 수도 있으며 통합될 수 있는, 통합성 및 확장 가능성을 가진다. 둘째, MCFAS는 객체 지향성을 가진다. 학생들이 생성하는 객체는 교사의 입장에서 무의미한 개념이 될 수도 있지만, 학생들이 과제를 해결하는 동안 자연스럽고 직관적으로 생성하는 객체는 수학 개념의 일부가 된다. 학생들은 다양한 환경과의 상호작용을 통해 객체와 객체 사이들을 이동하고 재개념화하는 과정을 통해 단순한 수학적 부호, 기호 상징만이 아닌, 그것을 조작하는 방법에 대한 정보, 학생의 생각 및 표현 방식 그리고 정의적인 요인까지도 포함하는 객체를 재생산해 내었다. 셋째, MCFAS는 맥락성을 가진다. 활동이론은 인간 활동에 대한 분석의 방향을 이동하면서 여러 방향을 연결하기 위해 노력한다. MCFAS에서 수학 개념을 형성한다는 것은 미시적, 행위적 관점에서 뿐만 아니라, 거시적, 맥락적 관점에서 개념을 형성한다는 것이다. MCFAS의 객체 지향성은 맥락성 안에서 생태학적 현상으로서의 활동을 통해 설명될 수 있다. 마지막으로 MCFAS는 변형 가능성을 가진다. MCFAS는 구성 요소간의 동적인 관계와 개인적, 사회

문화적인 변화를 추적 관찰할 수 있게 한다. 한 가지 구성 요소의 변화는 전체의 변화와 연결이 되어 있으며 이러한 성질은 MCFAS의 구성을 변형해보고 그 결과를 입증하는 연구가 지속되어야 하는 동기이자 필요성이 될 것이다.

이 연구를 통해 제안한 개념적 틀과 분석 방법을 통해 학습자의 수학 개념 형성 과정을 이해하려는 시도는 학교 수학교육에 급변하는 사회적 환경 및 테크놀로지를 적용 하는 등 다양한 학습 환경의 변화를 수용하고 그 기준을 마련해 나갈 수 있는 방법을 제공해줄 수 있게 할 것이다. 또한 이를 통해 학습자의 수학 개념 형성 과정을 다양한 측면에서 이해하고 이에 따른 교수·학습을 지원할 수 있는 방법을 제공해 줄 수 있을 것이다.

주요어 : 활동이론, 수학 개념 형성 활동 체계, 객체, 도구, 구성주의

학 번 : 2017-31482

목 차

표 목 차

그 림 목 차

제 1 장 서 론

교육학에서 인식론적 변화는 전통적인 교수·학습 방식에 대한 개혁의 움직임을 이끌며 혁신적이고 도전적인 다양한 학습 환경을 낳게 되었다. 특히 구성주의적 인식론을 바탕으로 한 학습자를 중심에 두는 교수·학습 방법에 대한 관심은 새로운 교수·학습 설계에 대한 많은 방법들을 산출하였다(Jonassen, 1991; Hannafin & Land, 1997). 문제 기반 학습(Hmelo-Silver, 2004), 탐구 지향 학습(Rasmussen & Kwon, 2007), 프로젝트 기반 학습(Krajcik & Blumenfeld, 2006), 앵커드 교수법(Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1990), 인지적 도제 학습(Collins et al., 1991) 등을 포함한 수많은 학습자 중심의 인식론들은 그 범위, 도구, 방법 등의 차이를 가질 뿐 본질적으로는 이해의 본질과 학습을 촉진하는 데 가장 적합한 방법들에 관한 공통된 인식론적 토대와 유사한 가정들을 담고 발전되어 왔다(Land & Jonassen, 2012).

학습자를 수업의 중심에 서게 하는 교수·학습에 관한 연구에 대한 검토를 통해 위와 같은 연구들이 다음과 같은 가정과 특성을 가지는 것을 발견할 수 있었다. 첫째, 암묵적으로든 명시적으로든 학습자가 수업의 진정한 활동에 참여하면서 의미를 협상하려는 개인의 노력을 지원하도록 설계된다. 따라서 학습자 중심 학습 환경은 그 의미가 보편적으로 정의되기보다는 개인적으로 정의되는 학습에 대한 구성주의적 관점에 기반을 둔다(Land & Jonassen, 2012). 둘째, 외부에서 지시된 교수보다는 학습자가 자신의 생각을 드러내고 조작할 수 있도록 하는 기술이나 학습자 중심의 목표 지향적인 탐구를 지원한다. 이러한 특성으로 인해 학습자 중심 교육은 테크놀로지의 발전에 따라 더욱 다양한 매체를 통해 설계되고 구현될 수 있는 발전 가능성을 가진다. 셋째, 학습자의 고립되고 탈맥락화된 지식보다 풍부하고 진정한 학습의 맥락을 선호한다. 이를 위해 지식이 머릿속에만 있다는 많은 심리학자들의 믿음으로부터 탈피해 개인

의 지식이나 신념은 해당 지식 공동체의 지식이나 가치에 영향을 받으며(Lave, 1991; Wenger, 2011), 그 공동체를 품고 있는 사회문화적 영향으로부터 분리될 수 없다는 가정을 갖는다. 학습자 중심의 교수·학습 방식이 이와 같은 가정을 담고, 이론이 가진 교육의 목적을 이루기 위해서는 수업을 위한 최적의 설계 방법, 설계된 환경이 지원할 수 있는 학습의 종류, 다양한 영역과 맥락에서 일반화될 수 있는지의 여부 그리고 학습의 평가와 관련하여 근본적인 질문에 대한 고려가 필요할 것이다(Dick, 1991; Merrill, 1991; Kirschner et al., 2006; Hannafin & Land, 1997).

활동이론은 학습이 일어나는 최소단위가 활동이라는 관점을 바탕으로 인간 개인의 학습과 의식의 발달이 사회적 상호작용으로 인한 결과로 보며(Leont'ev, 1978) 문화역사적 활동이론(Cultural-historical activity theory)으로의 확장적 발전을 거듭해왔다(Engeström, 2014). 일방향적인 교수 환경에서 학습자 중심의 교수·학습으로의 전환에 대한 필요에 따라 활동이론은 많은 교육 연구자들에게 학습 활동을 분석하고 개선 방안을 도출하는 이론적 틀로서 환영받고 있다.

활동이론의 활동 체계를 통해 인간의 활동을 분석하는 연구는 사회 안에서 인간 활동의 종류만큼이나 다양하지만, 교육 분야에서 학습 활동을 분석하는 연구는 그 범주를 실험 환경과 그 대상을 기준으로 크게 학교 교육환경 밖 인간의 학습 활동에 초점을 둔 연구, 그리고 학교 교육환경 안에서 교사에 초점을 둔 연구와 학습자에 초점을 둔 연구로 구분해 볼 수 있다. 먼저 학교 교육 밖의 맥락에서는 지역사회, 지식 공동체 등과 같은 단위 활동 체계에서 일어나는 학습의 특성을 분석하는 연구 및 평생학습에 관한 현장에 대한 접근 방법을 확대시키기 위하여 수행된 연구(Waycott, Jones & Scanlon, 2005; 윤창국 & 박상옥, 2012; 김명숙 & 최운실, 2021), 온라인 학습을 위한 공동체를 구현하고 지원하는 과정을 분석하기 위한 관한 연구 및 모바일 학습 환경을 설계하기 위한 활동 체계의 구성 요소를 설명하기 위한 틀로서 사용하기 위한 연구 등(Barab, Schatz & Scheckler, 2004; Liaw & Huang, 2016; Uden, 2007)이 있으며, 학교 교육 환경 안의 맥락에서 교사의 활동에 초점을 둔 연

구는 교사의 수업 실행과 전문성 개발을 위한 프로그램을 통한 교사의 변화를 연구하는 연구, 교사 및 교사 공동체가 전문 지식을 찾고 공유하는 방식을 분석하는 연구 및 이들에 대한 교육이 작동하는 방식을 분석하는 연구 등(Beatty & Feldman, 2012; McNicholl, 2013; Potari, 2013; Trust, 2017; Feldman & Weiss, 2010; 김남수 & 황세영, 2013; 김동렬, 2022)이 있다. 학교 교실 환경 안의 맥락에서 학습자에 초점을 둔 연구는 초등학생을 대상으로 하는 공동 창작물 제작 활동의 특징을 정의하기 위해 수행된 연구, 초등 영재의 소집단 활동 체계를 분석한 연구 등(Burnard & Younker, 2008; 강영란 & 김진환, 2014)으로부터 중·고등 학습 활동 및 대학 수준의 학습 공동체에 대한 사례 연구 등(Williams, Wake & Boreham, 2001; 이현명 외, 2019)이 있다.

수학교육을 비롯한 교육학 연구에서 활동이론과 관련하여 수행된 연구들에서는 다음과 같은 몇 가지 공통된 특징을 발견할 수 있으며 한계점 발견할 수 있었다. 첫째, 연구의 결과를 다양한 환경과 맥락에서 일반화하기 위한 목적을 가지고 수행되었으며, 이를 위해 활동 체계로 분석하기에 적합한 최적의 학습 환경을 설계한다. 활동이론의 학습 활동과 같이 학습의 주체인 학습자를 중심에 두는 교육은 기존의 교수·학습 환경에서는 구현되기 어려운 상황들이 존재하므로, 학습자 중심 학습 환경 즉 실험실의 설계는 매우 신중해야 하는 영역에 있다. 둘째, 기존의 교육적 체제나 교수학적 방법론을 검증하거나 개선 방안을 논의하기 위하여 교수·학습 활동을 활동 체계의 구성 요소를 바탕으로 이해하고, 이를 비교한다. 활동 체계는 구성 요소를 통해 학습 활동의 맥락을 가시화해주는 유용한 틀이다. 그러나 활동이론 연구는 처음에는 간단해 보이지만, 활동이론을 적용하는 틀의 복잡성으로 인해 연구자와 교사가 이 이론을 깊이 이해하기 어렵다는 문제점이 존재한다. 이러한 이유로 활동이론을 활용하여 원칙과 구조를 바르게 적용하지 않고 연구의 활동을 검증하는 연구들이 많이 수행되어 왔다(Nussbaumer, 2012). 예를 들어, 활동 체계의 모든 구성 요소에 대한 풍부한 이해 없이 구성 요소 중 일부분만을 적용하거나, 연구의 분석 대상이 되는 활동과 구성 요소를 유기적으로

연계하지 못하고 이론적 틀만을 차용하기도 하며, 특히 활동이론의 문화역사적 맥락이 제외되어 버리는 연구들이 많이 수행되었다. 셋째, 활동이론의 이론적 틀을 통해 교수자와 학습자의 활동을 통해 교실의 교수·학습 환경을 분석하고 개선 방향을 제안하는 연구가 주를 이루는데, 학습자의 학습에 초점이 맞추어진 연구보다 교사의 교수 방법 및 전문성 향상에 초점을 두는 연구가 많다.

국외에서 체계적 문헌 고찰의 방법을 통해 활동이론 연구의 동향을 분석한 연구들을 살펴보면, 2000년에서 2009년까지 활동이론의 관점에서 수행된 129개의 연구를 분석한 결과 교육학 및 교수 실천, 교사 교육과 관련된 연구는 약 26%를 차지한 반면 학습자의 학습과 관련된 연구는 별도의 범주로 분류되지 못했으며(Nussbaumer, 2012), 보다 최근에 수학교육과 관련하여 수행된 활동이론의 동향을 분석한 연구에서는 활동이론이 교육 연구에서 활용 범위를 넓혀가고 있지만, 수학 교실의 맥락에서 이론적 또는 분석적 틀로서 활동이론을 채택한 연구는 여전히 매우 부족하며, 이를 활용한 소수의 연구마저 활동이론의 잠재력을 활용하지 못하였다고 분석하고 있다(Batiibwe, 2019). 국내에서도 특수교육 및 사회, 과학, 언어교육 등에서 학습자에 초점을 맞춘 연구들이 이루어지고는 있지만(이형상, 2018; 정진수 & 이웅주, 2013; 편지윤, 2019) 그 수가 매우 적으며, 더욱이 수학교육 관련 연구는 더욱 그러하다.

활동이론은 활동을 포괄적이고 맥락적인 관점에서 바라볼 수 있게 하는 이론적 접근을 제공한다. 이러한 이론적 특성은 교수·학습 상황을 다양한 접근 방식과 도구의 사용을 통해 분석하고자 하는 과거 연구자들의 관심을 끌기에 충분하였으며, 분석하고자 하는 문제를 명확히 하기 위해 그 적용 방식과 도구를 조정하는 연구자들의 다양한 시도가 지속되었다(Engeström 1999; Nussbaumer, 2012). 특히 수학교육 연구자들에게 더 큰 도전은 수학 학습이 개인의 인지적 수준에서 더 나아가 사회적 맥락으로 해석될 수 있는 이론적 기반을 마련하고 이를 다양한 수학 교실에서 어떻게 적용할 수 있을지에 대하여 구체적으로 제시할 수 있는 틀을 마련하는 것이었다.

이 연구는 인간 활동을 다양한 맥락에서 설명 가능한 활동이론을 기반하여 수학 개념 형성 과정을 활동 체계로 설명할 수 있는 가능성을 확인하고자 하는 연구 동기를 가진다. 이에 이 연구는 수학 개념 형성의 관점에서 활동 체계를 개발하고 분석 방법을 제안한 후, 이를 바탕으로 한 수업 사례의 분석을 통해 수학 개념 형성 활동 체계의 성질을 도출하는 것을 연구의 목적으로 한다. 연구 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 세 가지 연구 질문을 설정하고 이에 답하였다.

1. 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 구성 요소는 어떠한 맥락과 특성을 가지며, 이를 기반으로 한 수학 개념 형성 활동 체계는 어떻게 정의될 수 있는가?

2. 수학 개념 형성 활동은 수학 개념 형성 활동 체계를 통해 어떻게 분석될 수 있는가?

3. 분석 결과를 통해 도출된 수학 개념 형성 활동 체계의 성질은 무엇인가?

위 연구 질문에 답하고자 이 연구의 각 장에서는 다음과 같은 내용을 다룬다. 먼저 연구 질문 1에 답하기 위해 제 2 장에서는 활동이론의 철학적 계보 및 그 전개 방향을 검토하고, 확장학습, 학습 활동 및 활동이론의 주요 용어 및 개념에 대해 검토함으로써 활동이론이 수학 학습 활동을 설명할 수 있는 가능성을 밝힌다. 이후 활동이론의 근간이 되는 구성주의와 수학 지식의 구성에 관한 논의 및 구성주의를 바탕으로 한 수학 개념 형성 과정 이론의 고찰을 통해 수학 개념 형성 과정의 특성 및 수학적 객체와 도구 및 주체의 성격에 대해 논의한다.

제 3 장에서는 연구의 절차 및 방법, 연구 대상, 과제의 설계 원리를 밝힌다. 제 4 장에서는 먼저 연구 질문 1에 최종적으로 답하기 위해 제

2 장의 이론적 논의를 바탕으로 수학 개념 형성 활동 체계와 구성 요소를 포함하는 개념적 틀을 정의한다. 이후 연구 질문 2에 답하기 위해 개념적 틀을 기반으로 한 분석 방법을 제안하고 이를 통해 실제 수업 사례를 분석함으로써 학습자의 수학 개념 형성이 어떻게 이루어지는지 확인한다. 마지막으로 연구 질문 3에 답하기 위해 앞선 연구 결과를 바탕으로 수학 개념 형성 활동 체계의 확장 도식의 사례를 보이고 이를 통해 수학 개념 형성 활동 체계의 네 가지 성질을 도출한다. 제 5 장에서는 이상의 연구를 요약하고 후속 연구를 제언한다.

제 2 장 이론적 논의

제 1 절 활동이론

지난 40년 동안 지식과 학습을 이론화하기 위해 수학 교육에서 주로 사용된 이론은 급진적 및 사회적 구성주의 등과 같은 다양한 형태의 구성주의였다(Cobb, 1992; Von Glasersfeld, 1987). 밀레니엄을 지나오며 수학교육자들은 수학 학습을 이론화하기 위하여 수학교육에 심리학 및 사회학적 방법론을 결합할 필요성을 가지게 되었으며 본격적으로 Vygotsky나 Piaget의 인지발달이론을 수학교육에 수용하기 시작하였고, 이는 수학 학습 이론을 만들고 이를 적용하는 데에 있어 큰 호응을 얻었다(Berger, 2004; Stallworth-Stevens, 1995; Schmittau, 1993; Steffe & Kieren, 1994; Dubinsky, 1991).

수학교육자들은 수학적 지식에서 신체적 경험과 역할을 명시적으로 이론화하기 위한 노력으로 체화와 실행에 초점을 맞추어 다양한 연구를 시작하였다. 이러한 인지 과학 관련 연구는 지금까지도 수학 인지, STEM 등을 비롯한 다양한 분야에서 활발히 연구되고 있다(Lakoff & Núñez, 2000; Drodge & Reid, 2000; Nemirovsky & Ferrara, 2009; Hutto & Kirchhoff & Abrahamson, 2015; Gallagher & Lindgren, 2015). 수학교육에서 구성주의 이론을 수용하는 또 다른 움직임의 시작은 인식의 위치를 마음에서 지식 공동체에서 정의하는 문화, 역사적 맥락에서의 실천으로 이동시키는 실천(practice) 이론이다(Lave, 1988; Engeström, 2014).

인류학, 사회학 및 역사의 관련 하위 분야는 지난 수십 년 동안 점점 더 실천을 주요 연구 대상으로 삼았다. '실천'이라는 용어는 일생의 가장 가까운 곳에서부터 제도적 환경의 고도로 발전되고 구조화된 활동으로까지 확장된다. 실천이라고 불리는 수행의 과정은 매우 지엽적인 패턴으로 해석되기도 하는 반면에 훨씬 더 일반적인 범위까지도 확장된 개념으로

쓰인다. 사회 과학, 사회 이론, 철학 분야에서 실천이라는 용어를 사용하는 연구는 그 사용된 예의 종류만큼이나 다양하며 이론적 일관성을 찾기 힘들다(Rouse, 2007). 비록 실천 이론이 복수적이고 다양한 관점들을 가지지만, 실천이라는 용어를 사용하는 연구들은 모두 실천을 발달시키고 그 이론을 발전시키기 위해서 다양한 도구를 제공하기에 힘쓴다는 점에서 공통점을 가진다(Grootenboer et. al, 2017).

20세기 초부터 교육을 실천으로 이론화하려는 데 중점을 둔 매우 응집력 있는 연구들이 등장하기 시작하였다. 이러한 실천 이론은 이론적, 철학적 전통의 범주에서 시작되었지만 실천의 사회적, 존재론적 특성에 더욱 주목한다. 이는 실천이 개인이 사회 세계에 존재하고 참여함으로써 형성된다는 것인데 이러한 실천을 이해하려면 실제 존재, 행동 그리고 상호작용의 사회성과 그 사회성을 조명하는 일련의 이론들이 필요하다. 실천 이론은 추상적인 변증법적 유물론과 사회심리학에 역사적 뿌리를 두고 있는 문화역사적 활동이론(이하 활동이론)을 통해, 아는 것과 학습하는 것에 관심이 있는 학자들에 의해서 기하급수적으로 성장하였으며, 수학 교육자들 역시 이 활동이론이 다른 이론에 비해 엄청난 이점들이 있다는 것을 깨닫기 시작했다(Roth, 2012). 그러나 수학 교육자들의 이러한 관심과 노력에도 불구하고 수학적 학습 활동에 문화적, 역사적 맥락을 담아내야 하는 이론들은 학교 교육의 문화역사적 우발성을 특정 형태의 학습자 활동으로 설명하지 않으려는 경향으로 인해 수학 수업을 분석하는 틀로서 환영받지 못하고 있다. 수학교육자들은 개별 학습자를 활동의 중심에 두려하고 그 학습자의 개념 형성 과정에 더욱 관심을 둔다. 수학교육자의 바람은 사실 Derrida(1993)의 지적과 같이 학생들의 수학적 결과 즉, 구성된 대상이 다양한 맥락에서 잘 해석되기만을 바라는 것일지도 모른다.

이 절에서는 활동이론의 배경 및 전개 방향을 고찰하고, Vygotsky와 Leont'ev로부터 Engeström에 이르는 마르크스주의, 변증법적인 철학적 흐름과 Peirce에서 Popper로 이어지는 기호학, Mead에서 Trevarthen으로 이어지는 상징적 상호작용론의 철학적 흐름의 논의를 통해 수학 개념

형성의 관점에서 활동이론을 기반으로 한 활동 체계의 주체, 객체, 도구가 가질 수 있는 특성을 식별한다. 이후 활동이론의 확장학습, 학습 활동 및 활동이론의 주요 용어 및 개념에 대해 검토하고, 활동이론의 객체, 주체, 경계 이동, 최소단위와 같은 주요 용어에 대한 개념을 명확히 한다.

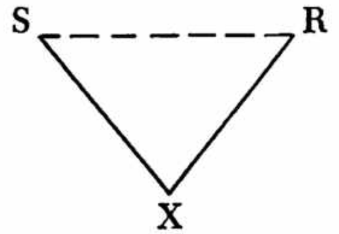
1. 활동이론의 전개

1.1 철학적 토대

활동이론은 학습이 일어나는 최소단위가 활동이라는 관점을 바탕으로 인간의 학습과 의식의 발달이 사회적 상호작용으로 인한 결과로 보고(Leont'ev, 1978), 인간의 마음을 마치 컴퓨터와 같이 묘사하던 데카르트식 관점에 맞서는 강력한 대안으로 세계를 이해하고 변화시키는 강력한 틀로서 작용할 수 있는 문화역사적 활동이론으로의 확장적 발전을 거듭하고 있다(Engeström, 2014).

Vygotsky는 인간 활동을 단순한 자극-반응(S-R) 만으로 보는 것이 아니라, 자극-반응 사이에 매개된 연결을 필요로 하며, 이 중간 연결 지점에 2차 자극(X)은 기호로 끌어들여진다고 말한다. 자극-반응 사이의 새로운 관계를 만드는 데 있어 기호가 '끌어들여진다'는 용어는 한 개인이 그러한 기호의 연결을 만드는데 반드시 적극적으로 참여해야 한다는 것을 나타낸다. Vygotsky는 또한 이러한 기호의 역작용에 주목했는데, 이는 심리적 작용을 더욱 높은 질적으로 새로운 형태로 전환하고 인간이 외적 자극의 도움을 받아 외부에서 자신의 행동을 통제할 수 있게 하는 특수한 기능을 가진다는 말이다. 즉, 기호가 환경이 아닌 개인에 대해서도 작동한다는 것을 뜻한다(Vygotsky, 1978, pp.39-40).

이와 같이 Vygotsky는 행위 주체(subject)가 원하는 결과를 얻기 위해 도구나 기호와 같은 매개체(mediation)를 사용하여 객체(object)를 다룬다고 보고 이러한 인간의 행위 체계를 활동으로 정의한다. Vygotsky의 제자 Leont'ev에 의해서 이 개념이 발전되면서, Vygotsky의 활동 체



[그림 2-1] 매개된 행위의 복합체(Vigotsky, 1978, p.40)

계는 활동이론의 이론적 토대가 되는 1 세대 활동이론으로 불리게 되었다.

1 세대 활동이론에서는 주체와 객체의 관계를 매개하는 매개체를 단위로 활동 체계가 만들어졌다면 Leont'ev에 의해 발전된 2 세대 활동이론은 개인적 차원의 활동 체계를 집단적 차원의 활동 체계로 확장하는 시도를 한다. 이러한 활동 체계의 개념은 Leont'ev가 제시한 집단 사냥의 예를 통해 쉽게 이해할 수 있는데, 고대의 사냥에서 몰이꾼은 사냥감을 잡기 위해 사냥감을 쫓아가서 잡는 것이 아니라 오히려 사냥감을 쫓아내는 행위를 하는데, 이러한 행위는 사냥을 하려는 개인의 행위로는 이해하기 어려운 행위이지만, 반대편에서 매복해 있는 사냥감을 잡는 사람이 있다는 것을 알면 이러한 몰이꾼의 행위를 집단 사냥을 하는 공동체 및 분업의 측면에서 이해할 수 있다는 것이다(Leont'ev, 1981, p.213).

Leont'ev는 이러한 집단의 활동과 개인의 행위가 구분되는 지점을 설명하기 위해 인간의 활동 체계를 활동, 행위(action), 동작(operation)으로 구분하여 설명하였다(Leont'ev, 1981; 홍진곤, 1999). 이 예는 몰이꾼의 직접적인 활동의 목적은 매복해 있는 사냥꾼들에게 사냥감을 보내는 것이며 몰이꾼에게는 그것이 활동의 결과가 되지만, 그 활동의 결과는 활동의 동기와 일치하지 않을 수 있다는 점을 시사한다. Leont'ev는 활동 결과가 활동의 동기와 일치하지 않을 때, 이 몰이꾼의 활동은 사냥이고 사냥감을 쫓아버리는 것이 그의 행위라고 정의한다(Leont'ev, 1981, pp.210-213). 2 세대 활동이론의 가장 중요한 발견은, 활동을 행위와 구분함으로써 행위가 활동에 속해있으며 이 행위의 결과는 활동의 동기와

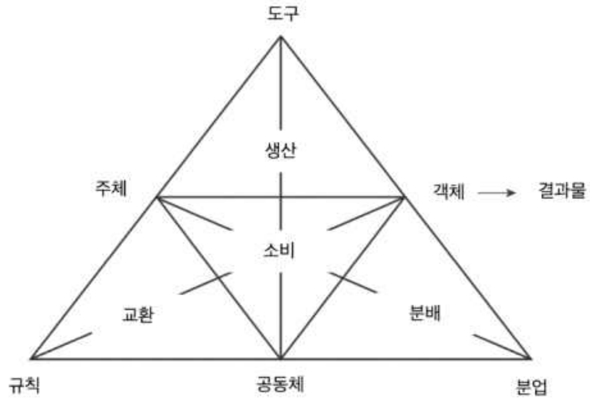
일치하지 않을 수도 있으며, 이것이 개인의 행위가 아닌, 집단의 사회적 맥락을 통해서 해석될 때 이해될 수 있다는 것이다.

동작은 행위를 위한 도구적 방법이며, 도구는 행위 및 동작이 수행되는 객체이다. 따라서 도구의 제작과 사용은 행위의 목적에 대해 자각하는 것과 관련하여서만 가능하지만, 도구의 사용 그 자체는 그 행위의 객체의 객관적인 속성에 대한 자각으로 이어진다. 다시 말해, 도구의 사용은 실제 행위의 목표에 부합할 뿐만 아니라 동시에 그 행위가 지향하는 객체의 속성을 객관적으로 반영한다는 것이다. 도구는 도구 자체의 객관화된 속성에 따라 객체의 객관적 속성을 실용적으로 분석하고 일반화하므로 의식적이고 합리적인 추상화와 일반화의 전달자이자 매개체가 된다(Leont'ev, 1981, pp.215-216).

Leont'ev는 이와 같은 개인의 활동의 의미를 집단 활동의 맥락에서 이해하기 위한 목적으로 '규칙(rules)', '공동체(community)', '분업(division of labor)'이라는 개념을 제시하였고(Leont'ev, 1978), 이에 따라 활동이론은 인간의 의식의 발달을 사회적 차원의 분석 단위로서 이해할 수 있게 되었다. 하지만 Leont'ev는 Vygotsky의 활동 체계 모델을 집단적 활동 체계 모델로 확장하는 모델을 제시하지 못하였고, 3세대 활동이론을 주도한 Engeström은 Leont'ev의 활동 체계를 본격적으로 구체화하며 [그림 2-2]와 같은 활동 체계(activity system) 모형을 제시하게 된다.

Engeström은 Vygotsky의 활동 체계 모델을 기반으로 하여 Leont'ev의 집단적 활동의 요소를 추가하는 모델로 3 세대 인간 활동 체계 모형을 완성 시켰다. 주체의 학습활동과 그 결과로서의 의식의 발달을 관찰하고, 이를 이해하기 위해 활동 체계 각 노드에 Vygotsky의 활동 체계 구성 요소인 주체, 객체, 매개체 및 Leont'ev의 활동 체계에 존재하는 사회적 차원의 구성 요소인 규칙, 공동체, 분업을 함께 배치하고 이 구성 요소들 간의 상호작용을 인간의 활동을 분석하는 틀로서 제안하는 모델을 완성하였다.

더불어 인간 활동 체계 모델은 활동의 삼각 구조 안에서 여러 구성 요소의 관계를 분석할 수 있는 가능성을 Marx의 생산, 분배, 교환, 소비



[그림 2-2] 인간 활동 체계(Engeström, 2014, p.63)

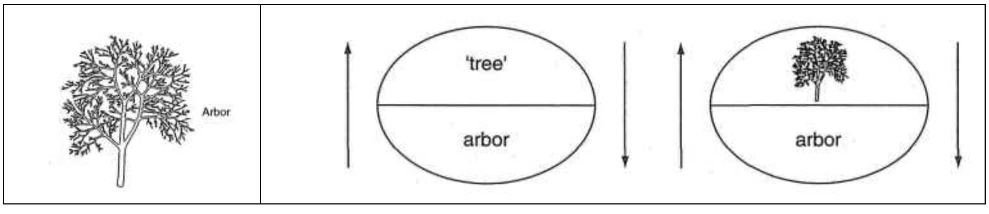
의 논리를 통하여 제시해 준다. 생산은 동기나 요구에 일치하는 객체를 생성하며 분배는 개인이 사회적인 규칙에 따라 생산에 참여하는 비율을 결정하고 그것들을 나눈다(Marx, 2007, p. 57). 교환은 개인의 필요에 따라 이미 나누어진 몫들을 더 나누는 과정이며 따라서 교환은 개인이 분배에 의해 나누어진 자신의 몫을 변환시키고자 하는 특수한 생산을 개인에게 다시 공급해 줄 수 있는 것이다(Marx, 2007, p. 57). 생산은 개인의 요구 및 동기에 맞는 객체를 생산하는 것으로 소비는 생산이 향유되거나 혹은 개인의 소유의 객체가 되는 것을 의미한다(Marx, 2007, p. 57). 이처럼 사회적으로 규정된 개인의 생산은 일반적이며 자연적인 출발점이 되며, 소비는 개별적인 종착점이 되고, 분배와 교환은 특수한 매개로서 현상하는데 이 논리를 통해 전체가 결합되는 것이다(Marx, 2007, p. 57-70).

이상의 Leont'ev와 Engeström의 논의를 종합해 보면, 공동체는 동일한 객체를 매개로 그 객체를 향한 목표와 동기를 가지고 있는 활동 주체가 되는 개인 또는 집단이며, 규칙은 그러한 공동체의 구성원들의 행위와 상호작용을 조절하는 원칙으로 정의할 수 있으며, 마지막으로 분업은 함께 활동에 참여하는 주체 사이의 수직적이거나 수평적인 사회적 관계를 의미한다고 볼 수 있다. 주체, 객체 및 도구에 대한 더욱 복잡하고 구체적인 개념적 논의는 이 절의 마지막에 정리하고자 한다.

1.2 기호학과 상징적 상호작용론

3세대 활동이론 및 그 구성 요소의 성질을 이해하고 이를 다양한 분석에 적용하기 위해서는 Vygotsky로부터 Engeström에 이르는 마르크스주의적 문화역사적 심리학 이외에도 활동이론의 철학적 기반이 되는 사상들에 대한 검토가 필요하다. Engeström(2014)은 그의 활동이론의 사상적 기반을 형성하고 있는 Peirce로부터 Popper에 이르는 기호학을 바탕으로 한 매개 이론과 관련한 철학적 계보와 Mead(1934)로부터 Trevarthen & Hubley(1978)에 이르는 상징적 상호작용론의 철학적 계보를 소개하고 있다. 이 연구에서는 활동이론의 구성 요소를 깊이 이해하기 위한 관점을 가지고 다음과 같은 이론들을 검토하고자 한다.

기호학은 문학 이론이 아닌 기존의 관습적인 의사소통 체계에 대한 연구이다. 기호학의 창시자 중 한 명인 Saussure는 언어학자로, 특정한 언어가 역사적으로 어떻게 발전해 왔는지보다는 언어의 구조와 체계의 우위성을 전제로 하여 자의성을 지닌 기호 체계에 더 관심을 두고 단어들이 선천적인 의미를 갖는 게 아니라 그 단어에 대한 생각을 가리킨다는 사실에 주목했다. 그는 일반적으로 소리 이미지만을 기호라고 부르던 기존의 기호를 개념과 소리 이미지의 결합으로 정의한다(Saussure, 2011, p.61). 예를 들어, ‘Arbor’는 ‘Tree’라는 개념을 지니고 있기 때문에 ‘Arbor’를 기호로만 부르는 경향이 있으며, 이 결과 감각적인 부분의 관념이 전체의 관념을 내포해버리게 된다.



[그림 2-3] ‘Tree’의 개념과 ‘Arbor’의 소리 이미지를 내포하는 기호로서의 ‘Arbor’(Saussure, 2011, p.60-61)

Saussure는 이러한 모호함을 해결하기 위한 방안으로 개념과 소리 이미지 전체를 기호, 개념을 기의, 소리 이미지를 기표로 대체할 것을 제안하였다. 즉, 어떠한 사물에 대한 단어는 인간이 의도하여 생성한 기호이며, 이 기호는 이미지나 표시, 단어 등을 가리키는 기표와 기호가 가리키는 사물이나 개념, 감정 등을 가리키는 기의로 구성된다는 것이다.

기호학의 또 다른 창시자 중 한 명인 Peirce는 기호의 체계만을 기호로 간주한 Saussure와는 달리 기호를 객체와 정신적 해석체(Interpretant) 사이에 위치시키며, 객체와 해석체 사이의 관계에서 기호의 작용과 생성 문제에 더욱 관심을 두었다. 즉, 객체, 해석체를 상정하고 이들 사이의 관계를 통한 의미의 구성과 행위에 더욱 관심을 둔 것이다(Engeström, 2014). Peirce는 어떠한 기호라도 기호의 세 가지 형식적 조건, 즉 삼원성에 상응하는 세 가지 측면으로 분석할 수 있는데, 여기서 삼원성은 기호로서의 기호 즉, 표상적 성격(제 1 성), 기호와 객체의 관계 즉, 재현적 성격(제 2 성), 마지막으로 기호와 해석체의 관계 즉, 해석적 성격(제 3 성)을 의미한다. Peirce는 기호의 삼원성 위에 매개에 관한 이론은 세움으로써 활동이론에 중요한 이론적 배경을 제공해주는데, 이 논리에 따르면 기호에 관한 완전한 분석이 되기 위해서는 기호-객체-해석체를 모든 가능한 관계에서 다루는 것이 된다(Liszka, 2019).

Engeström은 이러한 Peirce의 관점을 통해 학습의 관점에서 도구를 언어, 기호의 범위까지 확장 시킬 수 있는 이론적 토대를 마련하였지만, Peirce의 관점은 기호가 인간 행위의 맥락에서 어떤 정신적이고 의도적인 것으로 다루어진다는 점에서 개인주의와 합리주의로 돌아간다는 문제점을 가진다고 주장하였다(Engeström, 2014). 하지만 이러한 Engeström의 관점은 비판의 여지가 있는데, 인간에게 기호가 없는 사고는 불가능하다는 Peirce의 관점은 오히려 모든 기호는 동일한 기호를 사용하고 있는 공동체를 전제하는 것이다. Peirce는 삼원적 설명에 따라 세계의 본질로서의 제 1 성, 실제적 효과로서 제 2 성, 그리고 법칙을 해석해내는 제 3 성의 관계로 개념이 생성됨을 논리적으로 설명하고 그 과정에서 객체가 갖는 실제적인 효과를 중시하며, 참다운 진리에 이르기 위한 방법으

로 개인적인 방법이 아닌 끊임없는 공동체의 탐구를 강조하였다(정용재, 2014; 송진웅 & 정용재, 2006). 기호는 공동체 안에서 상호주관성을 가지고 해석될 수 있어야만 진정한 기호로 작용할 수 있다는 Peirce의 관점은 앎의 개인적 근원을 부정하고 공동체 안에서의 앎에 대하여 강조한 것이라 볼 수 있는 것이다(송진웅 & 정용재, 2006).

현대 인식론에 관한 이론 중 Popper(1972)의 세 가지 세계에 관한 개념은 활동이론에 많은 이론적 토대를 제공한다. 세 가지 세계의 삼원성에 대한 기본 입장은 다음과 같다.

세계 1 : 물리적 세계, 물리적 실체의 우주

세계 2 : 의식 상태와 심리적 성향을 포함하는 정신 상태, 무의식 상태

세계 3 : 생각의 내용과 인간 마음의 산물의 세계

(Popper & Eccles, 1977, p.38)

Popper는 세계 3에 이야기, 미신, 도구, 과학적 이론, 과학적 문제, 사회 기관, 예술 작업등을 포함시키고, 이는 물질적인 형태로 존재할 수 있지만 물질적이지 않고 체화되지 않은 상태로도 존재할 수 있음을 주장한다. 예를 들어 과학 및 기타의 문제 상황은 인간들이 그것을 의식하는지 못하는지에 관계없이 방대한 지식 안에 객관적으로 존재하며 우리의 과제는 그것들을 발견하는 것이다. Popper는 세계 3의 객체들을 파악하는 것은 이러한 객체의 물질적 체화와는 완전히 독립적이라고 주장한다(Engeström, 2014). Popper는 세 가지 세계의 불연속성을 가정하고 세계 1과 세계 2가 그리고 세계 2와 세계 3이 상호작용한다고(Popper, 1972, p.155)보고, 세 가지 세계의 삼원성을 두 개의 쌍으로 환원한다. Popper는 활동에 대하여, 문제 상황은 세계 3에 위치하고 있으며, 활동은 본질적으로 세계 3의 객체를 이해하고 작동하는 것으로 구성된다고 보았다(Popper, 1972, p.164; Popper & Eccles, 1977, p.44).

Saussure와 Peirce의 기호에 대한 관점은 활동이론의 구성 요소 중 하나인 도구에 대한 다양한 이론적 토대를 제공해 주었으며, Peirce와 Popper의 삼원성에 따른 관점은 주체-도구-객체의 구성 요소의 관계를

바탕으로 매개된 구성으로서 지식과 의미에 대한 근본적 관념을 제공해 준다. 하지만 이러한 이론들은 인간 활동을 개인의 지적인 이해의 범주로 좁히며, 문화가 인간 활동의 결합을 통해 어떻게 만들어지는지에 대한 단서를 제공하지 못하고 있다는 문제점을 지닌다(Engeström, 2014, p.40).

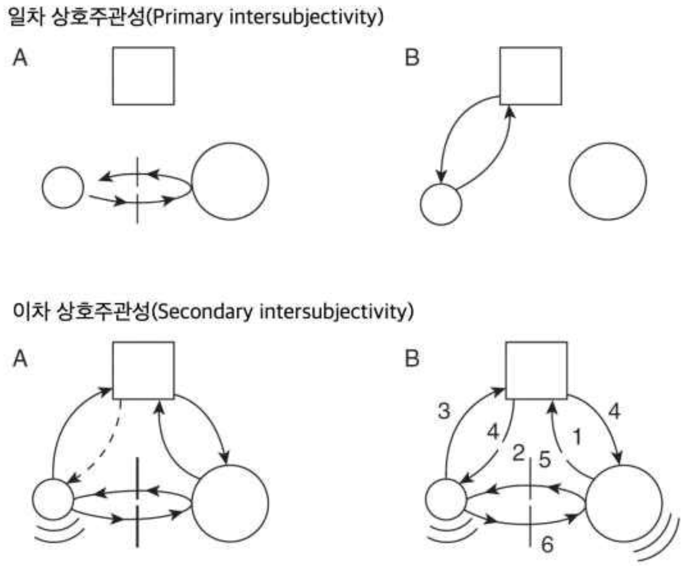
[표 2-1] Saussure, Peirce, Popper에 따른 구성 요소의 특성

학자	이론의 특징	구성 요소
Saussure	단어는 대상의 본질적인 속성을 가리키는 것이 아니라 대상에 대한 생각을 가리킨다. 인간이 의도하여 생성한 기호는 이미지나 표시, 단어 등을 가리키는 기표와 기호가 가리키는 사물이나 개념, 감정 등을 가리키는 기의로 구성된다.	도구
Peirce	기호는 객체와 해석체 사이에 위치하며 이들의 관계는 독립된 쌍으로 줄여질 수 없는 삼원성을 가진다. 기호는 공동체 안에서만 해석될 수 있다는 전제를 통해 공동체의 탐구를 강조하였으며, 개념이 생성되는 과정에서 객체가 갖는 실제적인 효과를 중시하였다.	도구, 주체-도구-객체-공동체의 관계
Popper	실천적 움직임으로써의 매개 대신 활동으로써 자율적인 삶을 살고 동시에 다른 세계 중 하나와 친숙한 이원적 주체-객체 관계로 들어가는 세 가지의 세계를 가진다. 이론 및 논리적 관계는 모두 세계 3의 객체들이며, 세계 3에 객관적 지식으로 존재한다.	객체, 주체-객체의 관계

활동이론의 두 번째 철학적 계보는 개인주의와 주지주의의 극복에 초점을 맞추어 연구된 Mead의 사회적 행동주의에 의해 시작된다(Engeström, 2014, p.40). Mead(1934)는 각각의 개인이 구성하는 행동의 관점에서 사회적 집단의 행동을 이해하지 않고, 오히려 복잡한 그룹 활동을 구성하는 개인의 행동을 원소로써 분석하는 사회 전체를 통해 이해한다. Mead의 접근 방식은 물리적 객체보다 사회적 객체와 사회적 의식

을 우선시 하는 접근 방식으로 주로 '상징적 상호작용주의, 상징-매개적 상호작용으로 불리며, 여기서 물리적 객체의 사회적, 상호작용적 구성은 상징을 통해 일어나며, 상징은 상호작용의 중요한 도구가 된다.

Mead는 사회적 실제가 집단의 사회적 활동에 의해 구성되며, 인간의 집단적 사회 활동을 가능하게 하는 데에 중요한 역할을 담당하는 상호작용의 기반이 바로 상징이며, 이 상징은 사회적 합의와 공유를 통해 형성된 집단의 결과물로 봄으로써 인간 활동의 집단적 속성을 강조한다. 이러한 관점은 상징이 활동이론의 구성 요소인 도구로서 주체와 객체를 매개하며, 어떻게 작동하는지에 대한 이론적 토대와 시사점을 준다 (Engeström, 2014; 윤창국 & 박상옥, 2012). 그러나 Mead의 관점은 객체의 구성을 지나친 의사소통과 상징화로 해석하는 경향을 보이며, 상징에 대한 지나친 편중으로 인해 객체를 구성하는 데 있어서, 도구적 방법에 의한 감각적이고 물질적인 구성 즉, 생산의 측면을 간과하였다.



[그림 2-4] 일차 상호주관성과 이차 상호주관성(Trevarthen & Hubley, 1978, p.215; Engeström, 2014, p.45)

Trevarthen & Hubley(1978)은 Mead의 관점에서 결여되었던 것, 즉, 활동의 의사소통적인 측면과 도구적인 측면 사이의 관계를 입증하기 위

하여 이차 상호주관성(Intersubjectivity)의 개념을 제안한다. Trevarthen에 따르면 인간은 타인과 행동을 조율하기 위해 생물학적으로 연결되어 있으며, 타인과 조율하는 능력은 사회적 상호작용에서 인간의 인지적, 감정적 학습을 촉진시킨다. 또한 아동과 성인은 공유된 문화를 형성하며, 이때 아동과 성인 사이에 사회적으로 가장 생산적인 양방향의 관계가 형성되는데 이 관계는 자신에게 가장 적합한 방식으로 구성되며(Stone & Hotchkiss, 2012), 이러한 관계의 구성을 이차 상호주관성의 형성이라 정의한다. Trevarthen & Hubley(1978, p. 215)은 [그림 2-4]와 같은 예를 통해 상호주관성을 설명하는데, 일차 상호주관성은 (A)아기와 엄마가 객체에 대한 관심은 없는 의사소통을 하는 것, (B)객체에 대해 아기가 행동하고 엄마는 그것을 지켜보는 것과 같은 예를 들 수 있다면, 이차 상호주관성은 (A)아기는 객체를 주고 그것이 받아들여질 때의 기쁨을 보이는 것, (B)완전한 인간-인간-객체 유창성: 엄마는 아기에게 과제를 해결하는 방법을 보여주고(1+2), 아기는 그것을 받아들이며(3+4), 엄마를 쳐다보곤 둘 다 기뻐하는 것(5+6)과 같은 예를 통해 이해해볼 수 있다. 이러한 이차 상호주관성의 형성은 동일한 선상의 중요성을 가지고 엄마와 유아 그리고 객체를 연결한다.

그러나 Trevarthen은 이 모델을 통해서도 여전히 도구의 역할은 그것들이 적용되는 객체와 본질적으로 다르면서도 본능적으로 관련이 있는 것으로서 심각하게 고려하지 않고 있다. 또한 Mead가 필수적이라고 생각했던 상징이 Trevarthen의 모델에는 구성 요소로 통합되지 못했다. Mead의 관점에서 상징은 사회적이고 역사적이다. 이러한 사회역사적 측면은 Trevarthen의 모델에 존재하지 않는 한계점을 가진다(Engeström, 2014).

Peirce로부터 Popper로 이어지는 철학적 계보가 활동이론에 지식의 개인적 구성에 대한 관점을 제공했다면, Mead에서 Trevarthen으로 이어지는 활동이론의 이론적 토대가 된 두 번째 철학적 계보인 상징적 상호작용론은 지식에 대한 현실의 사회적, 상호작용적, 상징-매개적 구성을 제공하였다. 그러나 이러한 구성은 여전히 마음에 대한 구성으로 인식되

며, 실천적인 물질적 구성으로 인식되지 않는다. 3세대 활동이론의 주축이 되는 연구자인 Engeström은 이상의 이론적 토대 위에 Vygotsky, Leont'ev로부터 이어지는 철학적 계보를 중심으로 하여 3세대 활동이론을 구축하였다.

2. 확장학습

3세대 활동이론은 활동 체계 구성 요소들 사이에 존재하는 모순을 다른 활동 체계와의 관계로까지 확장하는 시도를 통해 확장학습의 가능성을 제시한다. 확장학습은 1980년대 일상 인지(Rogoff & Lave, 1984), 상황 행동(Schuman, 1987) 그리고 실천에서의 인지(cognition in practice)(Lave, 1988) 등의 개념과 함께 인지와 학습에 대한 지배적인 관점에 대한 대안으로 3세대 활동이론의 발전적 형태로 등장했다(Engeström, 2014[1]).

Engeström은 확장학습이 최소한 두 개의 상호작용하는 활동 체계를 포함하며 인간 활동에 대한 분석을 위, 아래 그리고 안과 밖으로 확장시킨다고 보았다. 분석의 방향성을 위와 바깥쪽으로 이동하면 부분적으로 공유되고 파편화된 객체들이 다중적으로 상호 연결된 활동 체계와 충돌하게되며, 아래와 안쪽으로 이동하면 주관성, 경험, 개인적인 감각, 감정, 체화, 정체성 및 도덕적인 책무와 같은 사실과 충돌하게 되는 것이다(Engeström, 2014,). 이러한 두 관점에 대한 연구 즉, 활동 체계, 조직, 역사에 관한 연구와 주체, 행동, 상황에 대한 연구가 서로 양립할 수 없게 보일지도 모르며 실제로 나누어질 위험성을 가지고 있어 이 두 방향을 연결하고 통합하기 위해서는 이론적이면서도 실증적인 진지한 노력이 요구된다(Engeström, 2014).

3세대 활동이론은 이러한 두 가지 방향을 통합하기 위한 이론적 노력

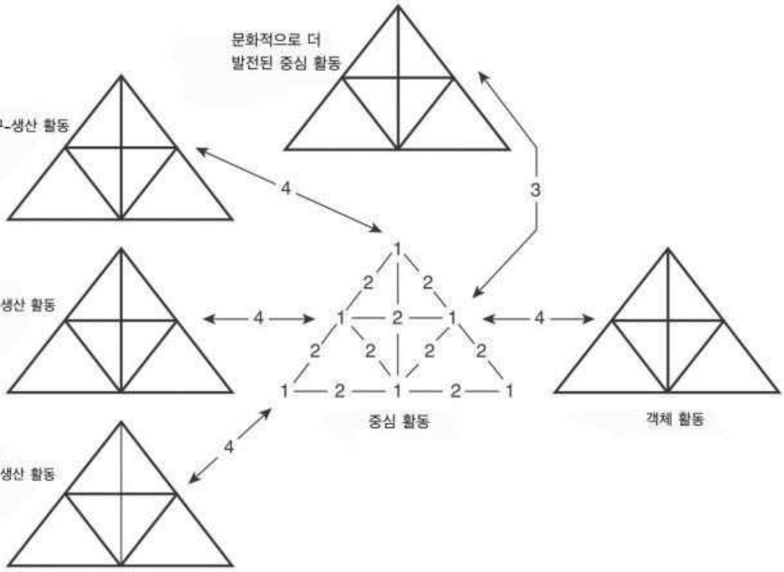
1) Engeström(2014)는 Learning by expanding의 두 번째 판으로 초판은 1987년에 출간되었다.

으로 동시대의 학습 과정에 관한 다른 이론들과 비교, 대조를 통해 (Ilyenkov, 1982; Fichtner, 1985; Davydov & Radzikhovskii, 1985; Bruner, 1985) 기본 모델에서 다양한 관점들을 네트워킹하는 더욱 발전적인 도구 및 이론적 틀(Engeström, 2014, p.71, p.100) 개발하기 시작하였다.

활동이론은 주체가 삶 속의 다양한 활동에 참여함으로써 학습을 경험한다고 보며, 특히 활동 체계에 내재되어 있는 네 가지 수준의 모순을 해결하면서 보다 높은 수준의 학습 활동과 의식의 발달이 이루어진다고 본다. 구체적으로 네 가지 차원의 모순을 살펴보면, 1차 모순은 중심 활동 체계 각 구성 요소에 잠재된 형태의 내부 갈등으로 존재한다. 2차 모순은 중심 활동 체계의 구성 요소들 사이에 존재하는 모순이며 예를 들어, 새로운 객체와 오래된 도구 사이에 존재하는 모순이다. 3차 모순은 교사와 같이 문화적으로 보다 더 발전된 형태의 중심 활동 체계의 객체를 중심 활동에 도입할 때 나타나는 모순인데 다시 말해 새로 구성된 활동 체계와 이전의 활동 체계의 잔존물 사이의 모순으로 나타난다. 마지막 4차 모순은 원래의 중심 활동과 연결된 주변 활동 사이에 나타나는 모순이다. 활동이론은 변증법적 이론이며, 모순의 변증법적 개념은 그 속에서 중요한 역할을 수행한다(Engeström, 2014, pp. 70-73).

이러한 활동 체계의 확장의 개념을 이해하기 위해서는 그전으로 거슬러 올라가 Leont'ev와 Ilyenkov의 이론적 결론으로부터 그 힌트를 얻을 수 있다. Leont'ev는 개별 행위를 활동으로 발전시키는 것에 대한 변증법적 개념을 '특정한 구체적인 활동의 동기와 더 넓은 활동의 동기의 관계를 반영하는 것'이라고 언급했으며, Ilyenkov는 한사람 또는 여러 사람의 행위에서의 규칙의 형태에서 개별적 예외로 나타난 이후, 새로운 형태는 다른 사람들에 의해 대체되어 새로운 보편적 규범이 되었다'고 말한다. 이러한 종류의 반영은 Ilyenkov의 '개발된 개념'과 동일하다 (Engeström, 2014, p.73; Ilyenkov, 1982, p.84).

모순이 새롭게 생성되는 객체에 의해 식별되고 다음 활동 체계의 동기로 다루어질 때, 모순은 확장학습의 실제 추진력으로 작용하게 되며

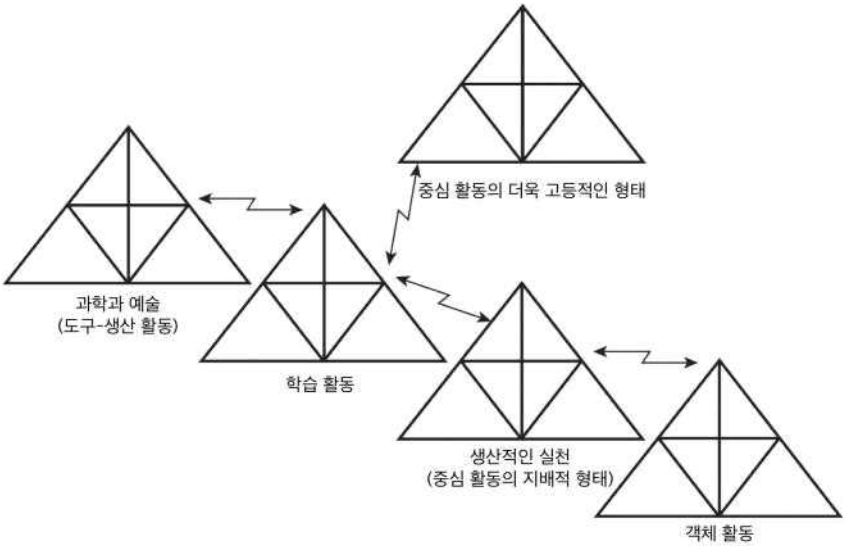


[그림 2-5] 인간 활동 체계 안에서 모순의 네 가지 수준(Engeström, 2014, p.71)

(Leont'ev, 1978), 확장학습은 객체를 중심으로 한 새롭게 확장된 객체의 형성과 활동의 형성으로 이어진다. 하나의 활동 체계 내의 구성 요소들 사이의 상호작용 또는 여러 활동 체계 사이의 상호작용의 과정이 곧 확장학습으로 이어지는 것이다(Engeström, 2014). Engeström은 이러한 활동 체계의 모순이 학습 원리라고 말한다. 학습자는 문제 해결을 위해 그와 관련된 공동체 내에서 도구를 활용하고 발달하는 과정을 통과하는 동시에 공동의 목적을 가진 활동 체계 내에서 자신의 활동을 발달시키고 더 발전된 활동 체계로 변화하여 나아간다. 이때 모순은 학습자를 성장시키고 새로운 활동 체계로 나아갈 수 있도록 동기를 부여한다는 점에서 중요한 학습 원리가 된다.

학습 활동은 그 자체로 객체와 체계적인 구조를 가진다. Engeström은 학습 활동의 형성으로 이어지는 실질적인 세 가지 활동 유형을, 학교 가는 것 안에서의 학습, 노동 활동 내에서의 학습, 과학적 연구 및 예술적 창조 활동에서의 학습 등과 같은 초기의 활동 유형으로 정의하고, 학습 활동은 이러한 초기의 활동 유형 안의 학습 활동 공간 안에서 발달한다는 전제조건을 가진다고 보았다. 그는 또한 학습 활동의 본질은 문제가

되는 활동의 형태에 앞서는 내부의 모순을 나타내는 행위에 대하여 새로운 객체 또는 도구 등을 포함하는 새로운 활동 구조를 생산하는 것이라고 정의한다(Engeström, 2014, p.75, pp. 98-100).



[그림 2-6] 인간 활동 네트워크에서 학습 활동의 공간(Engeström, 2014, p.100)

[그림 2-6]의 모델을 [그림 2-5]의 확장학습을 이루는 네 가지 모순을 통해 해석해보면, 학습 활동이라는 중심 활동은 과학 및 예술이라는 주변 활동의 객체를 도구로 갖는다. 과학 및 예술이 도구-생산 활동이라면, 학습 활동은 '활동-생산 활동'이라는 것이다. 학습 활동은 과학 및 예술 활동과 생산적인 실천 활동의 둘 사이 공간에 위치하며, 가장 이상적인 경우에, 학습 또한 본질적으로 과학 및 예술적 생산의 과정을 재생산한다고 본다. 이는 최상의 인간 학습은 과학적 연구와 예술적 창조의 단순화된 재생산이라는 것을 의미한다(Engeström, 2014, p.75, pp. 98-100). 또한 학습 활동의 결과물로서 객체는 더욱 생산적인 실천으로의 객체 활동을 반복하면서 학습 활동은 더욱 고등적인 형태의 활동을 생산한다.

3. 활동이론의 기본 원리 및 주요 개념

Engeström은 이 새로운 모델을 인간 활동의 근원이 되는 다른 모델과의 비교를 통해 명확히 한다.

> 첫째, 나는 이 모델이 모든 인간 활동의 뒤에서 본질적인 통일과 통합된 질을 여전히 유지하는 실제로 가장 작고 가장 단순한 단위라고 주장한다. 더 단순한 모델은 지나치게 단순화되거나 활동의 발생적인 초기 단계의 표현으로 보인다. 이러한 단순화는 인간 활동의 특정 측면에 초점을 맞추거나 추상화를 요구하는 맥락에서 적용될 때 유용하다. 하지만 축소는 왜곡되지 않도록 의식적으로 정당화해야 한다.
>
> 둘째, 나는 이 모델 활동의 도움으로 내적인 동적 관계와 역사적인 변화를 분석하는 것을 계속해서 주장해 나갈 수 있다. 그러나 이러한 주장은 구체적인 활동의 발전을 분석할 때 모델을 사용하고 변형하여 입증해야만 한다.
>
> 셋째, 맥락적 및 생태학적 현상으로써의 활동, 넷째, 매개적 현상으로써의 활동에 대해서는 이 모델이 명확하다(Engeström, 2014, pp. 65-66).

이와 같이 활동이론의 구별되는 특성은 다양한 성격의 인간 활동을 설명하는 매력적인 틀을 제공하였는데, 특히 학습 및 교육, 인간과 컴퓨터 상호작용(Human Computer Interaction : HCI) 등의 특정 분야에서 매우 활발하게 연구되고 있다. 또한 실천 이론, 분산 인지 및 사회문화적 심리학 등의 이론을 공식화하려는 연구에서 논의되기도 한다(Engeström et al., 1999).

Kaptelinin & Nardi(1997)은 컴퓨터 과학적 관점을 가지고, 활동이론이 컴퓨터-지원 활동의 구조, 개발 및 맥락을 설명하기 위한 광범위한 틀을 제공한다는 사실을 설명하고 이를 적용하기 위해 활동의 계층적 구조, 객체 지향성[2], 내재화 및 외재화, 매개 도구 그리고 개발이라는 활동이론의 기본 원칙을 식별하였고, 수많은 컴퓨터 과학 분야에 적용되는

2) 객체 지향성(object orientedness)은 객체-지향 프로그래밍과 다르다.

이론적 틀로서 자기매김 하였다. 이러한 기본 원칙은 전체 활동의 다양한 측면과 연관되기 때문에 하나의 통합 체계로 간주되어야 하며 이러한 원칙 중 하나를 체계적으로 적용하면 결국 다른 모든 원칙을 함께 적용해야 하는 특징을 전제한다.

객체(Object)

활동 체계는 특히 인간 활동의 객체(목표/목적) 지향적인 본질을 주제로 한다. 활동이론[3]에서 객체는 관심사이며, 주의, 동기, 노력 그리고 의미의 생산자이자 초점이다. 객체는 이미 활동의 개념에 함축되어 있으며, 객체가 없는 활동은 의미가 없다(Leont'ev, 1978). 활동을 통해 학습자는 끊임없이 변화하는 새로운 객체를 만들며, 새로운 객체는 종종 하나의 활동의 의도적인 산물이 아니라 여러 활동의 의도하지 않은 결과로 나타난다(Engeström, 2009). 다시 말해 객체는 의도에 따라 형성되지 않는 매우 암묵적인 '경험의 부호들'로 이루어진다는 것이다(Engeström, 2008). 경험의 부호들은 시간, 공간, 분업, 지식 등 눈에 보이지 않는 경계들을 통해서 안정화된다. 이러한 성격의 객체의 재개념화를 가능하게 하기 위해서는 감춰진 경계들이 가시화되고 의문들이 제기되어야 한다(Engeström, 2008). Engeström은 그의 제자 및 동료들과 다양한 연구와 사례를 통해 이러한 객체의 변환으로써의 확장학습에 관하여 분석하고 그 이론을 정교화하였다(Kärkkäinen, 1996; Hasu & Engeström, 2000; Puonti, 2004; Engeström, Engeström & Kärkkäinen, 1995).

주체(Subject)

활동이론에서 주체는 활동의 참여자 즉 행위 주체를 말한다. 활동을 이해하는 핵심은 생산 수단인 도구를 사용하여 일부 객체를 결과로 변환

3) 이 연구의 '활동이론'은 제 3 세대 활동이론을 칭하며 이는 '문화역사적 활동이론(Cultural-Historical Activity Theory : CHAT)' 또는 '활동이론'으로 불린다. 삼각형으로 표현된 활동 체계 모형은 제 3 세대 활동이론의 특징적인 형태이다.

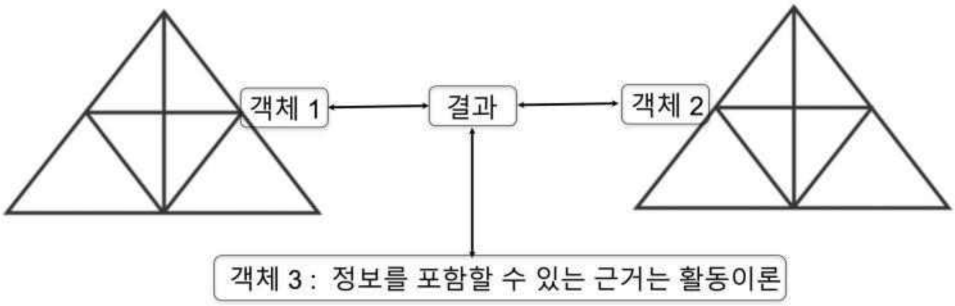
하는 행위의 주체를 이해하는 것이다(Roth, 2009). 주체의 욕구는 추상적이거나 고립적으로 존재하지 않으며, 객체에 연결됨으로써 구체적 동기로 드러난다. 주체는 에너지를 소비하므로 물질적으로 변형되며, 행동을 실현하는 동일한 형태의 움직임을 반복적으로 생산한 결과 신체가 변형되어 점점 더 능숙해진다. 또한 점점 이상적인 수준에서 실천하게 되면서 주체에 대한 이해가 변화되며, 실천적, 이상적 능력이 변화됨에 따라 주체의 변화는 주체가 속한 모든 집단에서 인식된다(Roth, 2009, p.6). 활동이론이 그 자체로 역동성을 가질 수 있는 이유가 여기에 있다. 이러한 변화는 이전에는 식별할 수 없었던 새로운 형태의 대화와 함께 몸의 행동에 대한 새로운 능력의 출현으로 알아차릴 수 있다. 예를 들어, 직장인이 회사에서 보고서를 작성하면서 스프레드시트를 사용하고, 수학적 모델을 세우고, 계산하고, 그래프를 그리면서 이 모든 일에 더 능숙해지며 이러한 변화로 직장인의 전체 경험 영역이 재구성된다. 활동이론은 주체가 활동에 참여할 때, 활동 체계를 만드는 다른 모든 것과 함께 변화를 겪는 것에 관심을 두는데, 이를 의미하는 과정을 주관화(Subjectification)라 명명한다. 주체의 변화는 다른 모든 것과 독립적으로 이해되는 것이 아니며 전체 활동에서의 변화를 의미한다. 즉 일상생활에서 현재의 활동 이외에 다른 객체 및 동기를 실현하는 데 기여하게 된다는 것이다. 즉, 주관화 개념은 한 가지 목표를 가진 활동 체계의 최소단위가 주체화 과정을 통해 변화를 겪으면 해당 활동 체계 내에서 뿐만 아니라 다른 활동 체계도 변화시킬 수 있다는 뜻이다(Roth, 2012).

경계 이동(Boundary Crossing)

객체는 결과물을 목표로 하는데, 객체가 만들어내는 결과물은 표면적으로는 단순한 말 또는 수학적 부호, 상징 등으로 드러날지라도 활동 체계 안에서는 다양한 정보를 내포하고 있다. 또한 객체 이동으로 한 객체와 또 다른 객체가 화학작용을 하여 만들어내는 결과물도 존재할 수 있는데, 하나 또는 그 이상의 객체에 의해 만들어진 결과물은 학습자가 수학적 사고 및 수학화하는 방법을 드러내므로, 다양한 교수학적 방법에

대한 고려 또한 제공해 줄 수 있다.

객체는 저항성이 있는 재료이며, 활동의 미래 지향적인 목적이기도 하다. 이러한 이유로 활동이론은 교육자들에게 교실의 생태계를 복원하여 학습자를 학습의 주체로 다시 세우고 창의적 매개를 사용하여, 학교를 변화시킬 수 있는 전략을 제공해 줄 수 있다. 또한 활동이론은 개인의 학습을 보다 총체적으로 이해할 수 있게 도와주며, 특히 한 개인이 타인은 물론 체계와의 상호작용을 통해 어떻게 발달해 나가는지 설명할 수 있는 분석틀을 제공해왔다.

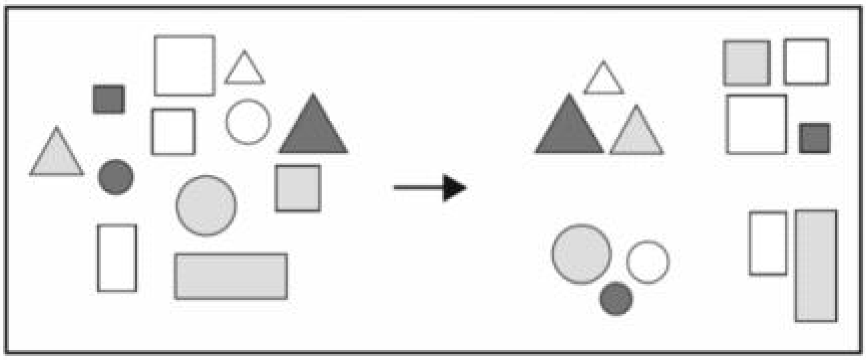


[그림 2-7] 객체의 경계 이동

최소단위(Minimum Unit)

모든 심리학에서는 개인과 객체가 분석의 최소의 단위가 되지만, 활동이론에서는 어떠한 결과의 전체 생산이 최소단위가 된다. 이러한 최소단위는 내적 모순을 안고 있는 변증법적 단위이며 구성 요소는 단위 안에서 그 어느 것도 독립적으로 존재하지 않는다. 도형을 분류하는 최소단위의 내적 모순은 그것을 보는 방법과 시기 및 장소에 따라 다른 방식으로 보게 될 것이기 때문이다(Roth, 2020).

예를 들어 [그림 2-7]과 같이 도형을 분류하는 수학적 활동에서 활동을 하는 기관, 도구, 사람과 함께 객체의 집합체를 유사한 객체의 집합체로 만드는 전 과정이 최소단위를 이루며, 도형을 분류하는 것을 목적으로 하는 최소단위 활동에서 분류된 도형은 그 결과물이다. 이 연구에서 주목할 것은 객체를 그룹으로 분류하여 객체 내, 객체 간의 기하학적 관



[그림 2-8] 수학 활동에서 활동이론의 최소단위

계를 구성하는 일련의 모든 과정의 결과물이 다른 최소단위의 활동 체계로 포함되기도 하고, 또 다른 최소단위 활동 체계를 포괄하기도 한다는 점이다. 최소단위 활동은 과제의 맥락 밖에서도 일어날 수 있으며, 다른 활동과 독립적으로도 일어날 수 없다는 점이다. 활동이론은 이러한 변증법적 성질을 통해 인간의 모든 활동을 맥락안에서 유기적으로 설명해야 하는 필요성을 수용하는 이론인 것이다.

제 2 절 구성주의와 수학 개념 형성

이 절은 앞선 활동이론과 활동 체계의 틀을 기반으로 하여 활동 체계로써 수학 학습 활동을 설명할 수 있다는 가능성을 확인하기 위해 활동이론의 근간이 되는 구성주의 및 구성주의의 관점을 바탕으로 한 수학 개념 형성 이론을 검토한다. 급진적 구성주의자들과 사회적 구성주의자들의 다양한 관점을 검토하고, 구성주의자들이 서로의 관점을 첨예하게 비판하고 방어하는 과정이 결국 수학 지식의 구성에 있어 개인의 인지 발달을 위한 노력과 사회적 상호작용이 모두 조화를 이룰 필요가 있다는 방향성을 통해 수학 개념 형성 과정을 활동이론의 분석틀을 통해 분석해야 하는 필요성을 엿본다. 다음으로 Vygotsky와 Berger의 개념 형성 발달 이론을 비교하여 일반적 개념과 수학적 개념의 차이점을 식별하며, 구상화 이론에 대한 Sfard와 Confrey의 관점의 차이를 통해 수학적 객체의 특성을 검토한다.

1. 구성주의와 수학 지식의 구성

지난 40년 동안 지식과 학습을 이론화하기 위해 수학교육에서 주로 사용된 이론은 다양한 형태의 구성주의였다. 20세기 말을 지나오며 수학교육자들은 수학 학습을 이론화하기 위하여 수학교육에 사회학적 방법론 및 심리학을 결합할 필요성을 가지게 되었다. 그리하여 많은 수학교육자들은 본격적으로 Piaget나 Vygotsky의 이론을 수학교육에 수용하기 시작하였고 이는 수학 학습 이론을 만들고 이를 적용하는 데에 있어 연구자들의 큰 호응을 얻었다(Ernest, 1991; Cobb, 1992; Stallworth-Stevens, 1995; Schmittau, 1993; Steffe & Kieren, 1994; Dubinsky, 1991).

급진적 구성주의는 Piaget의 진화론적 관점 및 Popper로부터 시작하여 Kuhn, Toulmin에 이르는 과학 철학 연구에 뿌리를 두고 발전해왔다. Kuhn과 Toulmin은 경험적 결과의 조작만으로는 더 이상 과학적 진보를

설명하기 힘들게 되었으며 개별 지식의 목소리, 방법론 그리고 일종의 기준 등과 같은 더 큰 구조에 대한 분석이 필요하다고 주장하였다(Kuhn, 1970; Toulmin, 1972). 이러한 주장들로부터 과학적 진실이 현실과 단순히 연결되는 것이 아니라 과학 공동체 내에서 이론적 패러다임적 분석틀의 견고함을 기반으로 연결됨으로써, 과학적 진실의 확실성보다는 과학의 안정성이 달성될 수 있었다. 이러한 이론적 관점을 바탕으로 한 급진적 구성주의는 수학교육의 개혁에 크게 기여하였는데, 학습자의 대답을 단순히 옳고 그름으로 평가하고 그 차이점을 무시하는 것이 아니라, 각 개인의 다양성을 학습의 근본적인 부분으로 보기 시작하였다(Confrey, 1994).

Piaget, Glasersfeld로 이어지는 인식론의 흐름에서 학습은 개인의 인지적 구성에 의해 받아들여진 것이며 학습자는 능동적인 자기 조직화 과정을 통해 지식을 형성한다고 본다. 개인의 인지에 초점을 둔 급진적 구성주의는 기존의 구성주의 이론에 사회적인 영역만을 추가함으로써 정작 개인과 사회를 어떻게 연결시킬 수 있을 것인가에 대한 많은 고민을 남긴 채 점차 개인의 인지적 구성에 있어 언어나 사회적 영역에 대한 한계를 드러냈고, Ernest, Lerman 등을 비롯하여 사회적 의사소통과 사회생활을 학습자의 의미 형성의 중심에 두려 하는 연구자들에 의해 비판을 받게 되었다(Lerman, 1996; Ernest, 1994; Gergen, 1995; Bartolini Bussi, 1991; Voigt, 1994, 조성민 & 노선숙, 1999; 이경화, 1999).

Ernest는 수학 지식을 개인의 주관성을 통해서 형성되는 것이 아니라 사회적 구성물로 보고, 수학 지식의 오류 가능성에 주목한 Lakatos의 준경험주의 및 언어를 수학적 지식의 기원으로 확인한 Wittgenstein의 관습주의를 바탕으로 사회적 구성주의를 제안한다(Ernest, 1991; 이경화, 1999). 수학적 지식이 완전하고 객관적이라는 생각을 버리고, '오류 가능한 수학'이라는 대전제에서 시작하는 Ernest의 사회적 구성주의는(유연주, 1999) 수학 지식의 구성이 개인의 주관성을 통해서가 아니라 사회의 작용에 더욱 무게를 두고 사회적 합의에 따라 어떤 새로운 지식이 타당한 것으로 결정되는 사회·역사적 맥락의 중요성을 강조한다(이경화,

1999). Ernest와 함께 사회적 구성주의 이론을 이끈 Gergen은 사회적 구성주의를 언어에 더욱 초점을 맞추어 본다. Gergen에 의하면 언어는 상호 의존성을 통하여 이루어지고 상황 의존적이며 공동체의 우선적인 기능이다(Gergen, 1995).

Piaget가 '생각이 말을 이끈다'라고 했다면, Vygotsky는 '말이 생각을 이끈다'라고 하며 인간의 생각 발달은 말, 기호의 매개적 활동을 통해 이루어진다고 보았다. 구성주의의 관점에서 볼 때, 수학 개념 형성에 있어 언어, 담론 및 상호작용의 역할은 매우 중요하다. 그도 그럴 것이 급진적 구성주의나 사회적 구성주의에서 많은 연구자들의 지지를 얻고 있는 관점이 Vygotsky의 이론에서 그 기원을 찾을 수 있기 때문이다.

> 의식은 한 방울의 물에 있는 태양처럼 단어에 반영된다. 살아있는 세포가 유기체와 관련되고 원자가 우주와 관련되듯이 단어는 의식과 관련된다. 단어는 인간 의식의 축소판이다(Vygotsky, 1986, p. 256).

Lerman과 같은 사회적 구성주의자들은 사회적 인간관계의 심리적 과정에 더욱 관심을 둔 Vygotsky의 이론으로부터 사회적 구성주의 이론을 정교화하기도 한다. Lerman은 급진적 구성주의와 학습에 대한 사회문화적 관점 사이의 차이점을 설명하고 전자와 후자의 입장이 근본적으로 다르다는 주장을 상호주관성(Intersubjectivity)의 문제에 그려내는 방식을 통해(Lerman, 1996) 급진적 구성주의 이론에서 드러나는 언어나 사회적 영역에 대한 한계를 지적하고[4], 개념 형성에 관한 관점을 Vygotsky의

4) Lerman은 급진적 구성주의가 지식의 사회적 구성 개념을 학습에 대한 급진적 구성주의적 관점으로 통합하기 위해 상호주관성의 개념의 개념을 도입하는 것은 그 자체로 일관성 없는 이론이 될 수 있음을 지적한다(Lerman, 1996). 하지만 이후 Steffe, Thompson 등의 급진적 구성주의자들은 Lerman의 입장이 Vygotsky의 이론에 대한 Glasersfeld의 입장을 충분히 반영한 것이 아니며, Vygotsky와 Glasersfeld의 이론의 호환성을 설정하고 Lerman의 분석과 대조하는 과정을 통해 상호주관성과 상호작용의 개념을 밝히고 Lerman의 해석에 의문을 제기하기도 한다(Steffe & Thompson, 2000).

심리학적 이론을 통해 대체할 것을 제안한다(조성민 & 노선숙, 1999). 상호주관성은, 사고 발달의 진정한 방향이 개인에서 사회화된 것으로 가는 것이 아니라 사회적인 것에서 개인으로 가는 것(Vygotsky, 1986)과 같이 자신의 주관성과 지식을 구성하는 자율적 인식 주체의 관점으로부터, 의사소통을 통해 인간의 의식을 구성하는 관점으로 전환해야 하는 것을 의미한다(Lerman, 1996).

Cobb과 그의 동료들은 사회적 구성주의의 한 형태로서 구성주의적 관점과 사회학적 관점을 조정한 이론을 통해 수학 교수·학습을 분석한다(방정숙, 2001). 그들은 다양한 이론적 기저와 교수실험을 통해 교실에서 교사와 학생들이 개념을 구성하는 데 있어 상호작용적인 학습을 통해 일반적인 사회적 규범을 설정하기도 하고 사회적 규범을 재협상하는 과정을 설명하였다(방정숙, 2001). 특히 Yackel & Cobb(1996)에서는 학생들의 수학 활동에 특정한 수학 토론의 규범적 측면에 초점을 맞추어 일반적인 교실 규범에 대한 이전의 연구를 확장하여 사회수학적 규범을 밝히고 이후 다양한 실험연구를 통해 그 속성을 설명하였다(McClain & Cobb, 2001; Cobb & Bowers, 1999). 이러한 사회수학적 규범은 집단적인 성취임과 동시에 개별 학습자의 수학적 개념 형성 방식 및 의사소통 방식과 상호의존적인 관계를 포함한다는 점에서(방정숙, 2004), 구성주의 관점에서 수학 교실에서의 학습자의 사회적 관계 및 규범을 설명하는 중요한 이론적 기저가 된다.

구성주의는 연구자마다 개인과 사회의 작용에 얼만큼의 무게를 두느냐에 따라 극단적 구성주의 및 사회적 구성주의의 분류가 가능하며, 같은 사회적 구성주의 관점을 가지는 연구안에서도 개인의 인지와 사회적 상호작용을 어떠한 방식으로 보느냐에 따라 다양한 방법으로 분류가 가능하다. 구성주의자들은 서로의 관점을 첨예하게 비판하고 방어하는 과정을 통해 성장해왔지만 어느 한 쪽의 입장이 다른 입장을 완전히 비판하거나 배제하는 것이 아니며, 수학 지식의 구성에 있어 개인의 인지 발달을 위한 노력과 사회적 상호작용이 모두 조화를 이룰 필요가 있다는 동일한 방향성을 가지고 있다.

2. 수학 개념 형성 이론

이 항에서는 구성주의를 기반하는 다양한 수학 개념 형성 이론을 통해, 수학 개념 형성 과정의 특성 및 수학 개념 형성 과정에서 수학적 객체의 특징을 도출한다.

2.1 수학 개념 형성 과정의 특성

Vygotsky(1986)[5]는 모든 개념이 일반화이며, 각각의 개념의 존재는 개념들의 체계를 함의한다고 말한다. 즉 각각의 개념들이 서로 관계없이 고립되어 있다면 인간의 복잡한 생각이 불가능하다고 보는 것이다. Vygotsky는 인간 생각의 발달은 말과 같은 기호의 매개적 활동을 통해 이루어진다고 보았으며, 생각과 말의 발달 과정은 발생적 단계를 거치며 이 과정에서 사고 구조와 낱말 의미는 변화, 발달해 나간다는 점을 강조하였다. 특히 개념 발달에 관한 연구와 관련하여 질문 또는 과제부여의 방식으로 이루어지는 전통적인 개념 연구 방법을 비판하고, 이는 발달의 결과만을 측정할 수 있을 뿐 그 과정을 알 수 없다는 점을 지적하며, '형성 중인 개념'의 존재를 관찰하는 것에 의미를 두고 이를 관찰할 수 있는 새로운 실험 방법인 개념 발달 이론을 소개한다.

Vygotsky는 일반화된 개념을 반영하는 학문적 개념과 말의 맥락에 의존하는 일상적 개념을 구분하였다. 개념 형성 과정을 실증적 연구를 통해 크게 혼합체-복합체-개념의 세 단계로 나누었고, 각 단계는 여러 세부 단계로 나뉜다. 1 단계는 개념 발달의 첫 단계인 혼합적 사고를 하는 비조직적인 덩어리들 또는 더미(unorganized congeries 또는 heap) 단계이다. 이는 유아의 행동에서 가장 흔하게 나타나는데 이 단계에서 말의 의미는 불완전하며 어떠한 형태가 완성되지 않은 객체들의 혼합적 연결(syncretic relations)이다. 이러한 혼합적 연결에는 아동 자신의 인상

---

5) 2.1은 Vygotsky(1986)의 5장 An Experimental Study of the Development of Concepts를 바탕으로 연구 목적에 맞는 이론적 논의를 위해 재구성되었음.

과 지각에 상응하는 만큼 반영되는 객관적 연결이 많이 반영되어 있는데, 예를 들어 어떠한 구체적인 객체에 대하여 성인과 아동이 같은 말을 사용하여 상호 이해가 가능할지라도 교차점에 이르는 생각의 양식은 전혀 다르다는 것이다.

2 단계는 복합체적 사고(thinking in complexes) 단계로 이 단계에서 개별 객체는 주관적인 인상뿐만 아니라 이러한 객체 사이에 실제로 존재하는 유대에 의해 아동의 마음에서 통합된다. 이 단계에서 아동은 유사 객체들을 통합하기 시작하고 객체들 속에서 발견할 수 있는 객관적 연결 법칙에 따라 그것들을 결합시키는 훨씬 더 높은 수준으로의 상승 단계를 거친다. 그러나 이는 청소년기에 획득되는 개념적 사고의 연합성과 객관성과는 여전히 다른 단계이다. 개념에서의 일반화와 복합체에서의 일반화는 다르다. 개념은 단일한 특성에 의거해 일반화되지만 복합체는 다양한 사실적 특징들에 기반을 둔다. 개념은 단일하고 필수적이고 한결같은 연관을 반영하는 반면 복합체 내에서의 연관은 경험적, 우연적, 구체적이다. 즉, 복합체에서의 연관들은 이질적인 반면 개념에서는 동일한 기준을 토대로 형성된다.

복합체적 사고의 첫 번째 유형은 연합적 유형(associative type)이다. 아동은 어떠한 핵을 중심으로 객체들의 연상적 관계에 기반하여 다양한 객체들을 구성 요소로 하여 복합체를 지을 수 있다. 예를 들어, 가족의 성(性)을 부여하는 것처럼 아동에게 있어서 특정 사물을 어떤 명칭을 이용해 지칭하는 것은 단순히 지칭하는 수단으로만 기능하는 것이 아니며 그것과 연관된 특정 복합체와 연결하는 것을 의미한다. 복합체적 사고의 두 번째 유형은 수집(collection)이다. 아동은 서로 상호 보완하는 성격의 집합체를 다룬다. 이는 단일한 전체를 형성하는 데 있어서 서로 다르지만 상호 보완적인 부분으로 이루어진다. 이 사고 유형은 장기간에 걸쳐 안정적으로 나타나며 아동의 구체적, 시각적, 실제적 경험에 깊은 뿌리를 둔다. 수집이 연합적 복합체와 다른 점은 같은 특징을 지닌 두 객체가 발견되지 않는다는 점이다. 연합적 복합체가 반복적, 지속적 유사성에 기반을 둔다면 수집은 단일한 실제적 조작에서 사물들의 기능적 협력을 토

대로 대상들을 일반화한 것이라고 볼 수 있다. 복합체적 사고의 세 번째 유형은 사슬복합체(chain complex)이다. 개념과는 반대로 복합체에서는 속성들 사이에 위계적 연결, 관계가 없으며, 복합체의 모든 속성들은 기능적 의미에서 원칙적으로 동등하다. 따라서 사슬복합체 안에서는 구조적 중심이 전혀 없을 수도 있다. 구체적인 요소들 사이에는 연합적 연관이 있을지라도 선행하는 고리와의 연결 양식이 후속하는 고리의 관계와 완전히 다를 수 있다는 것이다. 이러한 특징으로 인해 사슬복합체의 연결은 언제든 교체되고 연결의 특징과 유형 역시 변화될 수 있다. 복합체적 사고의 네 번째 유형은 확산복합체(diffuse complex)이다. 확산복합체는 요소들과 복합체와의 연결이 확산적이고 부정확하며 유동적이고 모호하다는 특징을 가진다. 수집이 개별 대상의 기능적 유사성을 기반으로 한 일반화로 나타난다면 확산복합체와 자연스럽게 연결되는 것은 경험의 바깥, 즉 생각의 영역에서 형성된 일반화라 할 것이다.

복합체 사고의 마지막 단계는 의사개념(pseudo concept)이다. 의사개념은 외형상 성인이 사용하는 개념과 유사하지만 그 본질과 심리적인 특성은 다르다. 의사개념은 발생적 성질과 그것을 출현시키고 발달시키는 조건들 그리고 그 기저에 놓인 역동적인 인과관계로 볼 때 개념이 아니며 복합체이다. 의사개념은 이름에서도 나타나듯 내적 모순을 포함한다. 이 모순은 한편으로는 과학적 분석의 장애물이 되기도 하고 다른 한편으로는 아동의 생각 발달 과정 중 가장 중요한 요인으로 발생론적 중요성을 부여한다. 모순의 본질은 의사개념의 형태로 복합체가 존재한다는 것이다. 기능적 측면에서는 차이를 의식하지 못하는 한 개념과 등가물이다. 아동은 의사개념을 마음대로 만들어 내지도 않으며 선택하는 것이 아니다. 어른들의 말을 해석하려는 과정에서 이미 형성되어 있는 의미를 익힌다. 하지만 의사개념이 아동의 사고의 주요 형태인 이유는 아동과 어른의 생각이 겹쳐치는 복합체와 개념 사이에서 서로 접촉하기 때문에 상호 소통이 가능한 지점이기 때문이다.

Vygotsky는 단일 속성 또는 속성 집합을 기반으로 객체를 그룹화하여 발생하는 형성을 잠재적 개념(potential concept)이라고 한다. 추상화

개발의 다음 단계에서 최대 유사성을 기반으로 하던 객체들의 그룹화는 단일 속성을 기반으로 하는 그룹화로 대체된다. 잠재적 개념에서 객체를 어떤 그룹에 포함시키는 속성은 추상화된 우월한 속성이지만, 잠재적 개념의 일부는 진개념으로 나아가지 않은 채 남아 있기도 한다. 따라서 복합체적 생각의 발달과 더불어 오직 추상의 과정을 숙달함으로써 드디어 아동은 진개념을 형성할 수 있는 단계에 도달할 수 있게 되는 것이다.

Vygotsky의 실험적 연구에서 가장 중요한 발생론적 결론은 오직 청소년기에서만 아동은 지적 발달의 마지막 단계, 개념에 근거하여 생각하는 경지에 도달한다는 것이다. 아동은 청소년기가 되면서 지적 성장과 함께 원시적인 혼합적, 복합체적 생각이 후퇴하고 잠재적 개념들이 축소되는 반면 진개념을 점차 많이 사용하게 된다.

Vygotsky는 개념 형성에 대한 그의 연구에 대해 “우리의 실험적 연구는 개념 형성에서 중심적인 역할을 하는 것은 주의를 집중하고, 구별되는 특징을 선택하고, 그것들을 분석하고 종합하는 수단으로서 단어 또는 다른 기호의 기능적 사용임을 입증했다(p.106).”라고 평하며, 실제 개념은 단어 없이는 불가능하며 개념에서 생각하는 것은 언어적 생각을 넘어서는 존재하지 않으므로, 개념 형성의 중요한 순간과 그 발생 원인은 기능적 ‘도구’로서 단어를 구체적으로 사용하는 것이라 말한다. 또한 개념 형성은 언제나 어떤 문제를 해결해야 하는 과업에 직면할 때 이루어지며 개념은 오직 문제 해결의 결과로 생겨난다고 말한다.

[표 2-2] Vygotsky의 개념 형성 단계

단계	Vygotsky의 단계		특징
1단계	비조직적인 덩어리들 또는 더미		아동은 우리가 일반적으로 문제를 해결하기 위해 새로운 개념을 형성하는 것과 같이 문제를 해결하기 위해 많은 객체를 비조직적인 덩어리들 또는 더미로 모을 때 개념 형성을 향한 첫 걸음을 내딛는다.
2단계		연합적 유형	아동은 어떠한 핵을 중심으로 객체들의 연상적 관계에 기반하여 다양한 객체들

	복합체 적 사고		을 구성 요소로 하여 복합체를 지을 수 있다.
		수집	아동은 서로 상호 보완하는 집합체를 다룬다. 이는 단일한 전체를 형성하는데 서로 다르지만 상호 보완적인 부분으로 이루어진다. 이 사고 유형은 장기간에 걸쳐 안정적으로 나타나며 아동의 구체적, 시각적, 실제적 경험에 깊은 뿌리를 둔다.
		사슬복합체	아동은 기준 물체에 대해 연상적 연관에 의해 하나 또는 여러 개의 객체를 선택하고 계속해서 객체를 통합된 사슬로 역동적, 일시적으로 선택함으로써 통합된 복합체를 형성한다.
		확산복합체	아동은 경험의 바깥, 즉 다양하고 비규정적인 연결을 통해 심상, 객체들의 무리를 재통합하는 복합체를 형성한다. 즉 이는 생각의 영역에서 형성된 일반화이다.
		의사개념	아동이 사용하는 말은 외형상 어른이 사용하는 개념과 유사하지만 그 본질과 심리적인 특성은 다르다. 이는 발생적 성질과 그것을 출현시키고 발달시키는 조건들 그리고 그 기저에 놓인 역동적인 인과관계로 볼 때 개념이 아니며 복합체이다.
	잠재적 개념		단일 속성 또는 속성 집합을 기반으로 객체를 그룹화하여 발생하는 개념 형성이다. 이때, 객체를 어떤 그룹에 포함시키는 속성은 추상된 우월한 속성이다.
3단계	진개념		개념에 근거하여 생각하는 경지이다.

Berger(2004)는 Vygotsky의 개념 형성 이론이 개인이 새로운 수학적 개념을 구성하는 방법을 탐구하는 강력한 프레임워크라고 주장하며 Vygotsky의 개념 형성 이론을 수학적 영역으로 외삽하여 '수학적 기호'의 역할을 Vygotsky의 개념 형성 이론에서 '단어'의 역할과 유사한 것으로 간주는 전유이론(Appropriation Theory)을 소개한다. Vygotsky의 분류는 구체적인 표현(기표, 즉 기호 또는 단어)을 가진 추상적인 객체(수학적 객체)가 학습자에게 제시될 때 만연한 특정 활동을 다루지 않기 때문에 수학적 개념의 형성에 특정한 몇 가지 새로운 범주의 기호 사용을 도입한 것이다.

그녀는 [표 2-3]과 같이 Vygotsky의 개념 형성 단계를 수학 영역에 맞게 수정·보완한 분석틀을 마련하였다. Vygotsky의 연합 복합체를 피상적 연합, 예 중심 연합, 인공적 연합의 세 가지 하위 범주로 나누었으며, Vygotsky의 확산 복합체는 피상적 연합 복합체로 편입하였으며, 잠재적 개념을 삭제하였다. 그리고 수학의 본질을 반영하여 표현 복합체와 템플릿-지향 복합체를 추가하였다. Berger는 효과적으로 Vygotsky의 이론을 고등 수학의 맥락에 맞추어 수정, 보완시킨 이론을 완성하였다. 하지만 Berger의 전유이론이 학생의 수학 개념 형성 과정을 관찰하기 위한 이론으로 정착하는 데에는 일반적 개념과 수학적 개념의 특성의 차이로 인한 근원적인 어려움이 존재한다. 구체적으로 확산복합체와 잠재적 개념을 통해 보겠다.

Berger는 확산복합체를 정확히 피상적 복합체에서 일어나는 일이라 보고 연합의 하위단계로 편입하였다. 그녀가 말하는 피상적 연합은 수학적 객체가 지각적으로 접근할 수 없고 객체에 대한 초기 접근은 기표를 통해 이루어지기 때문에 학습자의 초점이 기의보다는 기표에 있다고 본다. 따라서 피상적 연합은 기표에 대한 과도한 집중은 수학 표현에서 객관적으로 중요하나 다른 기표에 대한 결손으로 인해 경험적으로 나타나는 것이며 일부 학습자는 기표와 객체를 융합하여 객체의 속성보다는 기표의 지각적 속성으로 고립시키게 된다는 것이다. 예를 들어 '$|x|=$ 최대 정수 $\leq x$' 라는 함수에서 많은 학생들이 '최대'라는 기표를 중심으로 생

[표 2-3] Vygotsky의 개념 형성 단계와 Berger의 전유 이론 단계 비교

<table>
<tr><th>단계</th><th colspan="2">Vygotsky의 단계</th><th colspan="3">Berger의 단계</th></tr>
<tr><td>1단계</td><td colspan="2">덩어리</td><td colspan="3">덩어리</td></tr>
<tr><td rowspan="8">2단계</td><td rowspan="7">복합체적 사고</td><td rowspan="3">연합적 유형</td><td rowspan="8">복합체적 사고</td><td rowspan="3">연합</td><td>피상적</td></tr>
<tr><td>예-중심</td></tr>
<tr><td>인공적</td></tr>
<tr><td>수집</td><td colspan="2">수집</td></tr>
<tr><td>사슬복합체</td><td colspan="2">사슬</td></tr>
<tr><td>확산</td><td colspan="2">표현</td></tr>
<tr><td>의사개념</td><td colspan="2">템플릿-지향</td></tr>
<tr><td colspan="2">잠재적 개념</td><td colspan="2">의사개념</td></tr>
<tr><td>3단계</td><td colspan="2">진개념</td><td colspan="3">진개념</td></tr>
</table>

각하여 이를 ‘보다 큼’이라는 개념에 연결하고 따라서 |4.3|=5 라고 말한다는 것이다(Berger, 2004).

Vygotsky는 확산복합체가 한정적이지 않고 사실상 무한하다는 것을 강조하기 위한 비유로써 “자손들이 하늘의 별처럼, 바다의 모래알처럼 무수할 때까지 번성하기를 갈망했던 성서의 부족처럼 아동의 마음속에 흩뿌려진 복합체는 무한한 확장의 가능성을 가지는 객체들의 가족적 연합을 나타낸다”고 표현한다(p.118). 아동의 경우 경험을 넘어 추론할 때 어른들이 이해하기 힘든 무수한 뜻밖의 조합, 과도한 비약, 대담한 일반화, 동요하며 미묘한 분산적 일반화의 세계로 들어서며 명백한 경계나 경로가 없어 무한한 복합체가 지배하며 그 연결의 무궁무진성은 어른들을 놀라게 하기도 한다. 여기서 주목해야 할 부분은 이러한 확산복합체가 아동의 실제적 지식을 넘어서는 것들을 통합한다는 것이다. Vygotsky의 실험을 예를 들면, 실험실에서 한 아동은 노란색 삼각형을 사용해야 하지만 노란색 삼각형 뿐 아니라 옆에 있는 사다리꼴도 선택한다. 이는 사다리꼴을 보고 꼭지점이 잘린 삼각형을 연상한 것이다. 사다리꼴을 선택한 행동은 정사각형, 육각형의 선택으로 이어지고 육각형은 반원, 마지막에는 원으로 이어진다. 색의 선택도 마찬가지로 매우 유동적

이며 변경이 가능했다. 노란색, 녹색, 파란색, 검정색으로 그 객체의 선택이 뒤따랐다. 이러한 아동의 선택은 지각이나 실제 행동을 통해서는 쉽게 확인할 수 없는 그 생각의 비실용적이고 비지각적인 영역에서 나타나는 일반화이며 이는 실생활 맥락과 아주 유사한 점이기도 하다.

Berger는 잠재적 개념이 수학적 영역에서 특별히 유용하거나 적절한 분석 범주가 아니라고 제안하고, 추상화와 일반화가 모든 수학적 개념의 구성에 내재되어 있으므로 잠재적 개념이 수학적 사고에 풍부하다는 이유로 잠재적 개념을 수학적 복합체와 구별하지 않았다. Vygotsky가 설명하는 잠재적 개념은 단일 속성 또는 속성 집합을 기반으로 객체를 그룹화하여 발생하는 개념 형성이다. 이때, 객체를 어떤 그룹에 포함시키는 속성은 추상된 우월한 속성이다. 그것 중 일부는 진개념으로 가지 못한 개념으로 남아 있을지라도 잠재적 개념을 복합체의 마지막 단계로 편입시키지 않는 이유는 잠재적 개념 자체가 가진 의미에 집중하기 때문이다. Berger가 주장하는 복합체 및 의사개념 단계는 진개념의 전단계라기보다 오히려 수학적 오개념으로 보이는 것들이 많다. 학생들이 진개념에 도달하지 못했을 때 드러내는 수학 기호는 기호가 가진 정확한 의미에 맞게 쓰이지 않을 것이고, 그 결과는 항상 오개념으로 드러날 수 밖에 없는 수학의 특성 때문이다. 때문에 전유이론에 비추어 학생들의 수학 개념 형성을 관찰하는 것은 과정보다는 결과에 초점이 맞추어 질 수 밖에 없을 것이다. 이 연구는 Berger가 주장하듯이 수학적 개념의 구성에 내재되어 있는 일종의 잠재적 개념과 같은 개념 형성 과정에 더욱 초점을 맞춘 것이라 하겠다.

개념 형성 및 발달은 인지 심리학에서 매우 복잡한 주제이며 고전적 문헌을 비롯해 현재의 거대한 문헌이 다수 존재한다(Medin & Smith, 1984; Inhelder, 1958; Piaget, 1964; Vygotsky, 1986). 일반적인 활동에서 개념이 형성될 때에는 새로운 개념을 형성하기 위해 친숙한 개념을 활용해 설명한다. 하지만 수학적 사고는 본질적으로 자연스럽고 직관적인 일반적인 사고방식과는 달리 엄격한 규칙에 의해 형성되는데 수학적 사고를 하기 위해서는 수학적 맥락을 생각하면서 이러한 규칙을 인지하고 있

어야 된다는 점에서 일반적인 개념 형성 과정을 통해 수학적 개념 형성 과정을 파악하는 것은 다소 무리가 있다. 이는 수학적 개념 형성 과정을 일반적인 개념 형성 과정 이론의 틀을 통해 분석하게 되면, 수학적 개념이 구성되고 쌓여져 가는 과정이 아니라 단계별로 분절적으로 해석되는 경향을 보이는데, 이는 일반적인 개념 형성 과정은 일반화와 같은 것으로 간주되어 과정에서 나타나는 모호함에 더욱 초점이 맞춰지는 반면 수학적 개념은 이미 그 자체로 일반화가 된 상태를 뜻하기 때문에 단계를 명확하게 구분하는 것은 용이하지만 이러한 명확한 표현의 방법이 존재함으로 인해(수학적 표현, 기호, 상징 등) 그 사이의 모호함이 객체로 드러나기 어렵기 때문이다.

수학 개념 형성 및 발달에 관한 고전적인 연구에 해당하는 Piaget & Inhelfer(1958), Vygotsky(1986)에서는 일반적인 개념 형성 및 발달을 수학적 개념 형성 및 발달과 분리하지 않고 수학적 맥락으로 가져온다(Vinner, 2020). 그러나 일반적인 개념 형성을 유도하는, 예를 들어 아기가 새로운 사물을 마주할 때, 기존에 친숙한 개념을 사용하여 익숙하지 않은 개념을 설명하는 과정은 수학에 이르면 상황이 나빠진다. 수학적 사고는 직관적 사고방식과 본질적으로 다르기 때문이다. De Freitas 외(2017)는 총 19명의 철학자, 교육학자, 수학사가, 수학자 그리고 인지과학자 등이 ‘수학적 개념’이란 무엇인가?에 대한 질문을 바탕으로 16개의 장을 구성하여 설명하고 있다. 그러나 Larvor(2019)는 그들 중 누구도 ‘수학적’, ‘개념’의 두 단어를 고려하고, 문제화하고, 역사화하고, 맥락화하고, 불안정화하며 그 답은 여전히 제공하지 않는다고 비판한다. 또한 Nietzsche는 역사가 있는 것은 명확하게 정의될 수 없으며, ‘수학적’과 ‘개념’이라는 단어는 풍부하고 상호 연결되어 있으며 미완성된 역사를 가지고 있기 때문에 이것을 설명할 수 없다는 것은 놀라운 일이 아니라고 말한다(Larvor, 2019 재인용).

수학 개념은 고정적인 것이 아니며, 학생들은 자신이 가지고 있던 개념을 재구성하고 확장해 나가는 과정을 통해 새로운 개념을 형성해 나갈 수 있다. 수학 개념의 형성은 수학교육의 가장 오래된 관심사 중 하나로

문제를 해결하기 위해 선행되어야 할 기본적인 단계이다.

2.2 수학 개념 형성과 수학적 객체

Sfard는 Vygotsky, Wittgenstein 등에 영감을 받아 수학적 사고방식의 본질을 이해하기 위해 수학적 문제 해결과 관련된 사람들의 담론에 대한 분석법을 제안한다. 그녀는 인간의 사고가 의사소통의 한 형태라는 가정에서 비롯된 개념적 틀 안에서 대화의 대상이나 발화, 대화 참가자의 상호작용을 추적함으로 인해 학습자의 생각의 발전을 추적하고 이것을 그들의 상호작용과 연결시킴으로써 학습자가 어떻게 발전적인 아이디어를 제안하고 얻는 형성 과정을 거치는지에 대한 통찰을 제공한다.

그녀는 수학 학습 및 문제 해결 과정이 동일한 개념의 조작적 이해(operational conceptions)와 구조적 이해(structural conceptions)의 복잡한 상호작용으로 구성되어 있음을 밝히고, 수학 개념 형성 단계에 대한 철저한 분석을 통해서 계산 작업에서 추상 객체로의 전환이 내면화(interiorization), 대상화(condensation) 그리고 구상화(reification)의 세 단계로 수행되는 복잡한 과정임을 제시한다(Sfard, 1991).

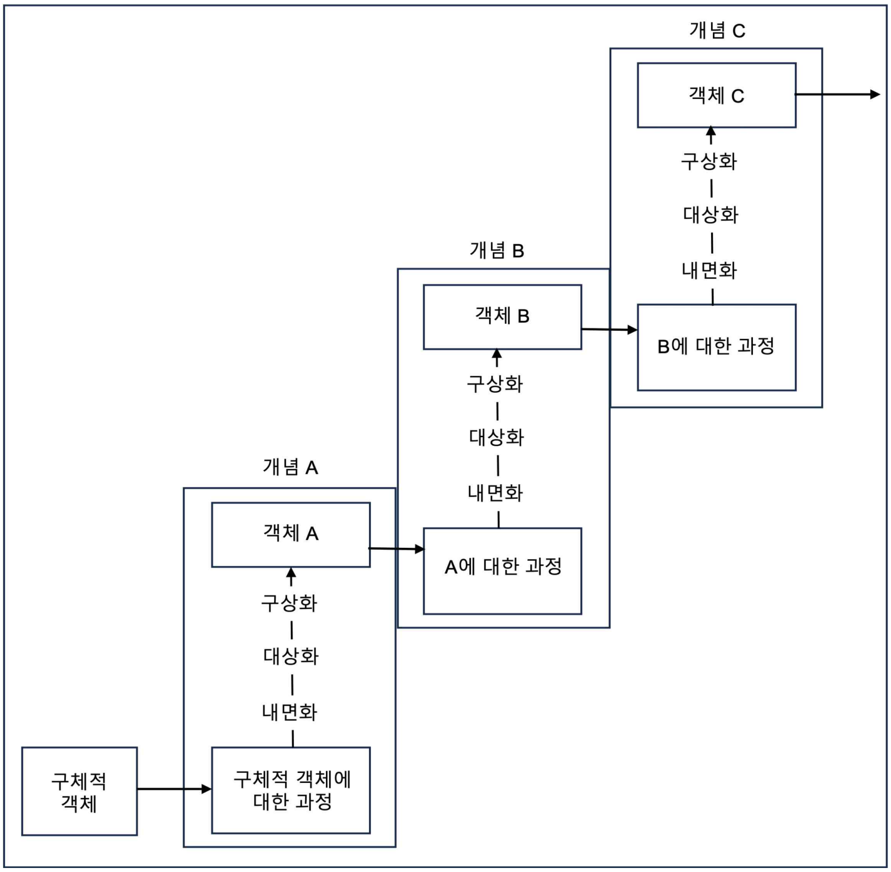
Sfard(1991)은 조작적 이해가 대부분의 사람들에게 새로운 수학 개념을 습득하는 첫 단계이며, 수학 개념 형성 과정에서는 이러한 조작적 이해가 구조적 이해를 선행하며 구조적인 접근은 개념 발달에서 보다 진보된 단계로 간주한다. 내면화 단계는 하위 수준의 수학적 객체에서 수행되는 조작 과정으로, 학습자가 새로운 개념을 발생시키는 과정에 익숙해지는 단계이다. 이 단계에서 학습자는 과정을 전체적으로 이해하지 못하고 피상적으로 이해한다. 예를 들어, 음수의 경우에는 뺄셈 연산에 익숙해지는 단계이며, 함수의 경우 변수에 대한 개념을 익히고 공식을 사용하여 종속 변수의 값을 찾는 능력을 습득한 때이다. 대상화 단계는 긴 조작의 순서를 조금 더 다루기 쉬운 조작 단위로 ‘압축’하는 단계이다. 이는 마치 컴퓨터 프로그램의 반복되는 부분을 자동화된 절차로 바꾸는 것과 같은데, 이러한 단계를 거치면 학습자는 이 과정을 다른 과정과 결

합하고 비교하고 일반화하기 쉬워진다. 예를 들어, 음수의 경우에는 음수와 양수를 더하거나 곱하는 것과 같은 산술적 조작을 수행하는 능력이며, 함수의 경우 특정 값을 살펴보지 않고 전체 좌표를 다룰 수 있는 능력이다. 대상화 단계가 더욱 발전되면 학습자는 함수를 조사하고 그래프를 그리고, 함수 쌍을 결합하고 주어진 함수의 역함수도 찾을 수 있게 된다. 대상화 단계는 새로운 개체가 특정 과정에 밀접하게 연결되어 있는 한 지속되며, 학습자가 개념을 완전한 객체로 인식할 수 있을 때에만 개념이 구상되었다고 말할 수 있다. 이와 같이 구상화는 존재론적 전환, 즉 친숙한 것을 완전히 새로운 관점에서 볼 수 있는 능력이라고 볼 수 있다. 내면화와 대상화 단계가 양적, 점진적인 변화라면, 구상화 단계는 순간적인 질적 도약이자 심리적 전환이다. 개념의 다양한 표현은 이 추상적이고 상상적인 구조에 의해 의미론적으로 통합되는 것이다. 예를 들어, 음수의 경우, 정수의 집합을 환의 개념으로 사고하며 전체 구조적인 성질을 파악하는 단계이며, 함수의 경우 함수 자체가 미지수인 미분 방정식 및 매개변수가 있는 방정식을 풀 수 있는 능력에 있는 단계이다.

[그림 2-9]는 이 세 단계가 계층적이며, 전 단계에 도달하기 전까지 다음 단계에 도달할 수 없음을 밝히며, 이 모델의 관점에서 보면 특정 수학 개념은 조작적으로나 구조적으로 모두 인식될 수 있는 경우에만 완전히 발달된 것으로 보아야 한다는 것을 의미한다.

구상화 단계는 해당 객체에 대해 수행된 과정에서 발생하는 개념과 같은 더 높은 수준의 개념의 내면화가 시작되는 지점이다(Sfard, 1991). Sfard(1994)에 따르면 새로운 개념을 이해하려면 의인화, 공간적 은유, 구조의 은유와 같은 적절한 은유를 만들어야 한다. 그런 다음 질문에 답하고 문제를 해결할 수 있다. 그러면 개념에 대해 약간의 조작을 수행할 수도 있다.

Sfard를 비롯한 많은 연구자들의 구상화 이론에 따르면, [그림 2-9]와 같이 어떠한 수학적 객체는 내면화, 대상화, 구상화 과정을 거쳐 형성된 객체 A를 통해 개념 A를 형성하고 이는 또다시 내면화, 대상화, 구상화 과정을 거쳐 형성된 객체 B를 통해 개념 B를 형성하게 된다. 이는 수학



[그림 2-9] Sfard의 개념 형성 모델(Sfard, 1991, p. 22)

이 엄격하게 계층적으로 정렬되어 있으며, 과정으로부터 객체 기반 사고로의 순서가 있음을 의미한다(Confrey & Costa, 1996, p.144). 이는 마치 선행되는 순서를 완료하지 못하면 다음 단계로 진행하지 못하는 컴퓨터의 알고리즘과 같이, 학습자가 한 단계에서 수학적 객체를 형성하지 못하면 더 높은 수준의 과정을 수행할 수 있는 객체를 형성할 수 없음을 의미하는 것과 같다.

Confrey & Costa(1996)는 Sfard의 구상화 이론을 중심으로, 고급 수학적 사고에서 중심 은유로서 수학적 객체를 선택하는 것에 대한 지적인 득과 실에 대해 논의하는 것을 통해 구상화 이론을 비판한다. 그들은 은유로서 수학적 객체를 선택하는 것이 특히 수학교육 분야에서는 역행적

일 수 있다고 지적하며, 구상화 이론의 단일 지적 메커니즘에 대한 과도한 의존은 수학적 실천의 안팎으로의 다양성과 풍부함을 드러내지 못함을 보인다고 말한다. 특히 그들은 수학적 도구 사용의 중요한 역할에 초점을 맞추어, 구상화 이론이 수학적 도구의 사용과 도구 사용의 발달을 소홀히 하게 할 수 있음을 지적한다. 또한 구상화 이론을 통하면 수학 수업에서 비판적이고 반성적인 토론을 불러일으키기보다는 수학 공동체의 좁은 관점을 더욱 강화하는 데 도움을 주며, 인간 상호작용의 역할을 최소화하면서 수학적 사고를 사회적 맥락에서 그 기원으로부터 분리한다고 보았다. 또한 수학 개념 형성 과정은 개인의 수학적 인지 과정에 초점을 맞춘 수직적 구조에 관심을 갖는 것으로부터 나아가 보다 다양한 구조로 볼 필요성을 제시한다.

제 3 절 이론적 논의를 통한 도구, 객체, 주체의 정의

이 절에서는 제 1 절과 제 2 절의 활동이론 및 구성주의에 관한 이론적 논의 및 활동이론의 이론적 토대가 되는 마르크스주의 철학적 논의 바탕으로, 제 3 장에서 설계할 수학 개념 형성 활동 체계를 구성하는 주요한 구성 요소인 도구, 객체, 주체에 대한 특성을 심도 있게 고찰하고 이를 정의한다.

1. 수학 개념 형성 과정에서 도구와 객체의 정의

제 1 절의 활동이론에서 정의하고 있는 객체는 활동이론에서 주체의 관심사이며, 주의, 동기, 노력 그리고 의미의 생산자이자 초점이다. 또한 활동을 통해 학습자는 끊임없이 변화하는 새로운 객체를 만들며, 새로운 객체는 종종 하나의 활동의 의도적인 산물이 아니라 여러 활동의 의도하지 않은 결과로 나타난다(Engeström, 2009). 이 항에서는 구성주의의 교육학적 관점에 비추어 객체를 이해하기 위해 Piaget와 Vygotsky로부터 이어져 오는 흐름에 따라 이 연구에서 학습자의 수학 개념 형성 과정을 분석하기 위한 주요 개념이 되는 학습자의 개인적, 사회적 맥락으로부터 진화되는 객체의 의미를 정의하고자 한다.

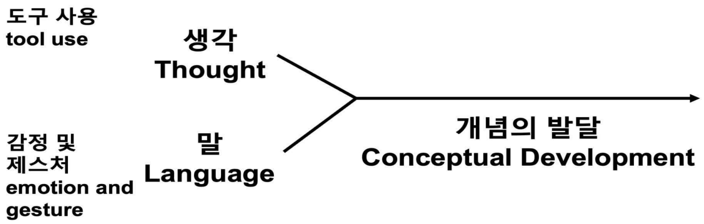
Piaget는 아동 발달 전문가이기 이전에 생물학자였기 때문에 자연스럽게 그의 이론에 진화론적 관점을 통합하고자 하였다. Piaget에 의하면, 아동은 어떤 대상에 대한 정적인 본을 갖는 것이 아니라 환경과 상호작용 하며 능동적 활동을 통해 지식을 구성한다. 행동과 조작을 가능하게 하고, 일반화할 수 있게 하는 행동과 조작의 일반적 구조를 Piaget는 '쉠(Scheme)'이라고 하였다. 기본적인 쉠은 생득적, 선천적 구조이며, 이후 환경과의 상호작용에 의해 분화, 조정, 재구성되면서 조작적 쉠으로 되는데, Piaget는 모든 쉠이 특정 상황에 대한 인식, 특정활동을 해당 종류의 항목과 연결하는 것 그리고 특정 결과에 대한 기대의 세 가지 부분으로

구성된다고 보았다(Von Glasersfeld, 1989, p.127). 지적 활동은 내면화된 행동 곧 조작적 쉠의 작용이고, 지적 발달이나 학습은 이 쉠의 변화이다. 새로운 개념은 외부에서 들어오는 것이 아니라 이전 것의 재구성, 즉 주체 자신의 쉠으로부터 나온다. 이것이 '자발적 발달'로, Piaget의 구성주의의 핵심이다. Glasersfeld는 지식은 인식 주체의 평형을 세우고 유지하기 위한 도구적인, 적응을 위한, 경험에 의미를 부여하는 개념적 수단이며, 목적 달성에 성공적이었다고 판단되는 개념, 개념구조 및 행동 '스킴(Scheme)'이라고 하였다. Glasersfeld 또한 지식의 준거는 진리(확실성)가 아닌 존속가능성(안정성)이라고 보았다. 이후 많은 구성주의 이론에서 스킴은 사람이 목적이나 목표에 의해 설정된 문제 상황에 직면한 후, 어떻게 행동하고 이러한 행동을 반성하고, 결국 해결의 성공 여부를 평가하는지와 관련 있는 구성 요소로 쓰인다(Dubinsky, 1991).

Vygotsky의 중심 신조는 사회문화적 요인이 정신 발달에 필수적 요소라는 점이다. Vygotsky에 의하면 의미, 기억, 사고, 지각, 의식을 포함한 모든 지적 발달은 사회적 관계에서 개인으로 진화하는 것이며, 모든 개인의 고등 정신 기능은 내면화된 사회적 관계이다(Wertsch, 1985, p.58, 66). Vygotsky는 생각과 말이 서로 다른 뿌리를 가지고 있다고 보았는데, 말은 제스처와 감정적 반응에서 진화하며 그것은 의사소통과 사회적 상호 작용의 맥락에서만 개발될 수 있다고 말한다.

> 우리가 아이의 행동을 관찰할 때, "엄마, 저를 의자에 앉혀주세요"라고 말하는 것이 "엄마"라는 단어 뿐 아니라 그 순간 아이의 모든 행동(의자쪽으로 손을 내미는 행동, 의자를 잡으려고 하는 등의 행동)을 의미하는 것이다. 여기서 객체를 향한 "정의적-정서적" 지향성은 말의 "의도적 경향"과 분리할 수 없으며, 이 둘은 동질적인 전체이다. 처음에 "엄마"라는 단어는 제스처에 대한 평범한 대체물이다 (Vygotsky, 1986, p.65)

Vygotsky의 신조에 동의하고 그 연구의 맥을 잇는 수학 교육자 Davydov는 노동과 관련된 생산 활동은 모든 인간의 인식의 기초가 되며, 노동의 과정, 즉 도구를 사용하여 객체를 변형시키는 과정을 통해서



[그림 2-10] Vygotsky의 '생각'과 '말'을 통한 개념 발달(Confrey, 1995, p.39)

객체의 부수적인 조건들이 제거됨으로 객체의 내부적이고 본질적인 속성이 드러날 수 있다고 보았다(Davydov, 1990, p.234). 또한 객체의 내적 또는 본질적인 특성은 관계 안에서만 존재하며, 즉각적인 존재보다는 반영된 존재, 그 자체로 매개되는 존재라고 보았다(Davydov, 1990, p.234). Vygotsky는 이러한 도구의 중재적인 역할을 말, 수 체계와 같은 심리적인 도구로 확장하고, 의사소통과 사회적 상호작용의 맥락에서 '생각'과 '말'의 변증법을 통하여, 즉, 객체와 도구의 상호작용을 통해 개념이 발달한다고 보았다고 볼 수 있다. 변증법적 발달이론가인 Vygotsky는 생각과 말의 고유한 근원을 떼어내어 서로가 어떻게 서로를 변형시키는지를 이해하는 것을 통해 아동뿐 아니라 고등 인지적 사고 발달을 설명하였는데, 결국 그는 "생각과 말의 합금"이라는 결론을 통해 궁극적으로 그들의 통일성을 가정하였다(Vygotsky, 1978, p. 30).

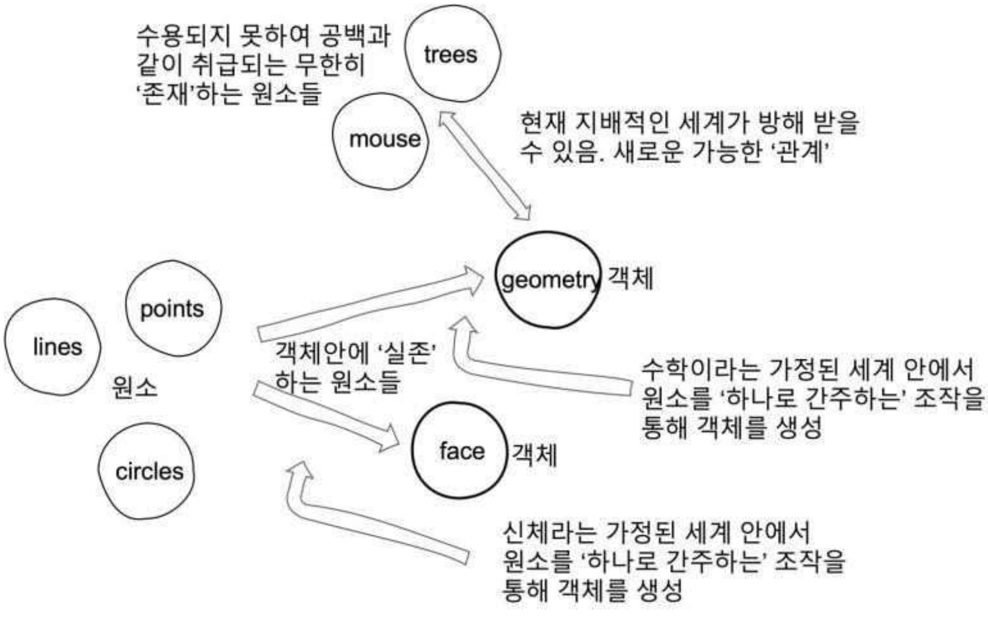
Vygotsky의 변증법적 사고는 마르크스주의에서 제시하고 있는 인간 활동의 변혁적, 혁명적 특성을 바탕으로 한 변증법적 유물론에 기인한다. 활동이론의 이론적 토대가 되는 마르크스주의의 중심 사조는 '인간의 의식이 존재를 규정하는 것이 아니라 사회적 존재가 의식을 결정한다'로 대표되는 물질적 토대에 대한 강조라고 할 수 있다(Marx, 2007). 즉, 마르크스주의는 인간 역사 변화의 요인을 경제적, 기술적, 물질적 요인에서 찾고 있으며, 사회적 계급과 국가들 사이의 물질적 이해관계의 충돌에 의해 비롯된다고 보고 있다(Cohen, 1978). 이러한 마르크스주의는 노동을 주체와 객체, 개인과 사회환경이라는 이원론적 사고를 극복할 수 있

는 중요한 개념으로 보고 있으며, 이와 같은 개념은 활동이론의 활동 개념으로 이어지고 있다고 볼 수 있다(Marx, 1909). 마르크스주의의 또 다른 영향 중 하나는 자연과 인간을 이어주는 생산 수단으로서의 도구의 개념이라고 할 수 있다. 마르크스는 도구를 인간존재의 고유한 특성 중의 하나로 제시하며 인간과 자연을 매개해주는 매개체의 역할을 하고 있다고 주장한다(Marx, 2007).

Brown(2020)은 포물선의 개념을 형성하는 실제 활동을 통해 학생들이 자신의 개념을 포물선이라고 명명하지 않고, 일부 친구들과의 토론 및 공유 활동을 통해 포물선에 대한 자신의 개념을 개발했으며, 각 개인에게 고유한 시간을 통한 경험이 존재했지만, 분명한 공유점을 중심으로 개념을 형성하였다는 것을 발견하고(Brown, 2020, p.99-103), 이러한 공유를 어떻게 이해할 수 있을까에 대한 답을 Badiou의 존재론을 통해 찾았다. 마르크스주의자이자 플라톤의 사상을 바탕으로 하는 Badiou는 라캉, 사르트르, 들뢰즈 등의 사상을 이어받아 창조적으로 계승한 철학자이자 수학자이다. Badiou는 존재론의 관점에서 객체를 바라보며, 수학적 객체, 즉 지식의 불확실성과 확장성에 접근한다. 그는 객체가 '하나로 간주하기(Counting as one)'의 조작으로부터 파생된다고 본다. 즉, 객체는 원소들의 집합을 가정된 세계 안에서 하나의 객체로 간주하는 조작에 의해 생성된다는 것이다. 원소들이 실존하기 위해서는 원소들 간의 관계를 이해할 수 있고 객체들이 실존할 수 있는 세계 안에서 개념화되어야 한다. 세계는 저마다의 논리가 있지만, 어느 한 세계에 대한 몰입은 항상 불확실하거나 반드시 그 타당성의 한계에 도달할 위치가 있다. 지식의 어떤 특정 영역도 그러한 세계가 될 수 있다. 중요한 것은 Badiou는 객체, 관계 또는 우선순위에 대한 이전의 개념에 의해 방해받지 않는 존재론에 다시 연결된 이 다수성의 새로운 구성을 위해 현재 지배적인 세계가 희미하게 사라질 가능성을 열어 둔 관계 구조에 만일의 사태를 들여온다 (Brown, 2020).

Badiou는 존재론을 이야기하는 데에 있어서 존재와 실존을 대립되는 시각으로 보지 않는다. 실존하는 객체는 언제든 다수의 존재하는 원소들

로 다시 구성될 수 있으며, 이를 확장하고 안정화하는 행위를 통해 수학적 사유를 확장해 나갈 수 있다는 것이다. 즉, 모든 원소는 그 자체로 집합이 될 수 있고 다른 집합의 잠재적인 원소가 될 수도 있다는 것인데, 이러한 확산 자체가 우주의 어떤 최종적인 안정성에도 도전하지 않으며, 이러한 이유로 구성 용어의 의미에 정착이나 수렴이 있을 수 없다는 것이다. 구체적인 도식으로써 하나로 간주하는 조작을 통해 객체를 생성하는 예를 이해해보면 [그림 2-11]과 같다. 인간은 선, 점, 원 등으로 존재하는 원소들을 신체라는 가정된 세계 안에서 하나로 간주하는 조작을 통해 얼굴이라는 객체를 생성하기도 하지만, 수학이라는 가정된 세계 안에서는 기하학이라는 객체를 생성할 수도 있다. 이때, 선, 점, 원은 각각 신체, 수학이라는 세계 안에서 실존하게 되며, 나무, 쥐는 수용되지 못하고 공백과 같이 존재한다.

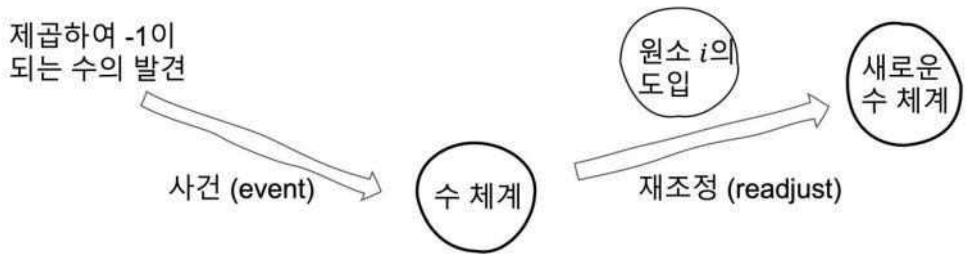


[그림 2-11] '하나로 간주하기', '존재와 실존'의 도식

현재의 가정된 세계는 나무나 쥐와 같이 존재하는 원소들에 의해 끊임없이 방해받을 수 있으며, 인간은 새로 가능한 관계를 모색하면서 지

식을 확장한다. Badiou는 이러한 방해를 사건(event)이라고 명명하고, 다양한 저서를 통해 존재와 사건의 개념을 확장시켜 나갔다(Badiou, 2007; 2009).

Badiou(2018)는 기존의 수 체계에서 제곱해서 −1 이 되는 수인 새로운 수가 등장하는 사건으로 인해 새로운 원소 i를 수 체계로 도입하는 재조정을 통해 새로운 수 체계를 구성하는 사례를 소개한다. 수학적 지식은 끊임없이 확장되는 집합들의 집합을 하나로 간주하여 재조정할 때 방해를 받을 수 있다. 지식은 하나로 간주하기가 실패하는 지점에서 수용되지 못하여 공백과 같이 취급되는 무한한 존재들을 상황 안으로 받아들이는 일이다. 수학의 발전은 그것의 객체를 생성하는 실천으로 볼 수 있다(Badiou, 2013; Brown, 2020).



[그림 2-12] 사건의 발생과 재조정에 의한 지식의 확장 과정

우리가 주어진 방식으로 수학을 이해했다면 우리의 활동을 통해 수학을 구성하고 지식을 확장하는 동기를 부여받지 못하게 될 것이다. Badiou의 객체성은 우리 각자에게 선행되는 수학이 우리가 수학을 하는 방식으로 자신을 이해하도록 동기를 부여하는 이유에 대해 사유할 수 있도록 한다. 이는 마치 수학이 자기의 목적과 관련하여 수학 자신의 사유를 다시 사유하도록 요구받는 것으로 보이는 특이한 순간인 것처럼 보인다. Badiou는 이러한 "수학적 사유는 오직 행위일 수만 있다. 왜냐하면 그곳에는 숙고할 그 어떤 것도 없기 때문이다. 극도로 압축된 경구를 통해 아리스토텔레스가 말하는 것처럼 수학적인 것들의 경우에 이지적인 것은 행동이다(Badiou, 2018, p. 43)." 라고 말하며 수학적 사유는 오직

행동을 통해서만 드러남을 강조하였다.

이상의 이론적 논의들을 바탕으로, 이 연구에서는 ‘수학 개념을 형성하기 위해 생성하는 수학적 또는 비수학적 표현, 발화, 행동, 감정 등’을 객체라 정의하고 ‘객체를 생성하기 위해 사용하고 조작하는 모델이나 다른 개념’을 도구라 정의한다. 이 연구에서 도구와 객체는 분석을 위해 표면적으로 분류되지만, 중심 활동 및 주변 활동의 여러 가지 구성 요소를 거치며 도구가 객체로, 객체가 도구로 부지불식간에 변화되기도 하며 이에 따라 도구와 객체가 종합된 형태로 생성되기도 할 것이다. 이들은 궁극적으로는 변증법적 통합을 이룬다. Vygotsky는 이러한 복잡한 구조는 깊은 발달 과정의 산물이며 개인과 사회의 역사 사이의 연결이며, 이러한 변증법적 성질이 인간 활동을 보다 동적으로 분석할 수 있게 한다고 보았다(Vygotsky, 1978).

2. 수학 개념 형성 과정에서 주체의 정의

제 2 장에서는 활동이론의 주체를 이해하기 위해 주체가 변환되는 과정 즉, 주관화의 정의를 검토하였다. 이 연구에서의 활동이론을 바탕으로 한 수학 개념 형성 과정에서 주체의 특성에 대한 이해를 위해서는, 먼저 제 2 장에서 언급한 Mead와 Trevarthen의 상호주관성(Intersubjectivity)에 대한 논의와 더불어 Engeström이 Leont’ev의 관점과의 비교를 통해 지적했던 Mead와 Trevarthen의 관점 및 한계를 검토하는 것이 적절하다.

Mead는 사회적 과정을 한 개인이 다른 사람의 제스처에 반응하는 것과 연결하고 제스처, 그에 대한 반응 그리고 제스처로부터 시작되는 사회적 행위의 결과 사이의 삼원성이 의미의 근간이 된다고 보았다. 즉, 의미의 근간은 객관적으로 사회적 행동 혹은 본질적으로 그런 행동의 관계 속에 있다고 보았다(Mead, 1934, p.80). Mead에 따르면 제스처는 인간과 동물 모두에게 원래부터 존재하던 것이며, 어떠한 의미를 갖거나 의식적

인 행동은 오직 인간에게서만 발견된다고 보았는데, 이러한 제스처가 어떻게 일어나는지는 설명하지 못하고 있다(Engeström, 2014). Mead의 삼원성의 구성 요소를 활동이론의 용어를 통해 이해해보면 각각 객체(제스처), 객체에 대한 반응, 객체의 결과물로 볼 수 있겠다.

Leont'ev 또한 객체가 본질적으로 구성된다는 Mead의 관점과 상통한 관점을 지닌다. 그러나 Mead가 객체가 그저 의사소통과 상징화로 구성된다고 보는 관점과는 다르게 Leont'ev에게 객체의 구성은 무엇보다도 도구에 의한 심미적이고 물질적인 구성이다(Engeström, 2014). Leont'ev(1981)는 인간의 활동 체계가 활동-행위-동작의 세 단계의 연결을 통해 나타난다고 보았다. 주체의 활동은 행위의 형태로 존재하며, 행위는 활동의 사회적, 집단적 맥락안에서만 의미를 가진다. 동작은 행위를 실현시키는 방법이며, 행위가 목표와 관련된 것과 달리 목표가 성취되는 도구적 조건에 의존한다(Leont'ev, 1981; 윤창국 & 박상옥, 2012). Leont'ev의 실험 결과에 따르면 이러한 동작은 객체와의 실질적인 연결이 부족하고, 결과적으로 객체에 작용하는 과제 및 활동과 분리되었으며, 결과론적으로 말로 교류하는 기능만 보존되었다(Leont'ev, 1981, p.219). 즉, 동작은 제스처로 변화되었고, 제스처는 그 결과로부터 분리된 동작이라는 것이다. 즉 제스처는 목표하는 객체에 적용되는 것이 아니며, 제스처를 객체로 볼 수 없다.

Leont'ev와 Mead의 관점 차이에서 가장 주목할 점은 상호작용 및 기호와 상징의 발생에 대한 관점의 차이다. Leont'ev는 기호와 상징을 반드시 상호작용적, 의사소통적 형태를 가진 '활동'으로부터 파생된 도구로 본다면, Mead에게 기호와 상징은 객체에 대한 도구가 매개된 절차를 숙달하기 위한 주된 기구가 아니며, 상호작용 즉, 사회적 과정 상황에서 물질적 객체는 부차적이고 추상적인 존재이다. 이상의 차이를 종합해 볼 때, 활동이론의 관점에서, Mead가 사회적 과정을 한 주체가 다른 주체가 객체에 반응하는 것과 연결하는 것은 단순한 말과 행동에 대한 교류일 뿐 주체의 사회문화적 맥락을 설명하기에 부족하다. 활동이론에서 사회적 맥락안에 존재하는 주체는 다른 주체 및 객체와의 단순한 연결로 존

재하는 것이 아니며, 자신의 동기나 욕구를 객체에 연결시키고, 생산 수단인 도구를 사용하여 객체를 변화시키기도 하며, 자신 또는 공동체의 변화를 일으키는 변혁적인 주관성을 가진다.

제 2 장의 [그림 2-4]는 Mead와 Trevarthen이 제안한 상호주관성과 이차 상호주관성의 예를 나타낸 그림이다. Mead는 주체를 객체에 연결시키는 과정 다시 말해, 객체에 대한 한 주체의 행동에 대해 다른 주체가 반응하는 것을 삼원성 즉, 상호주관성이라 제안한다. 이에 Trevarthen은 이러한 Mead의 삼원성에서 결여된 부분, 즉, 활동의 의사소통적인 측면과 도구적 측면에 사이의 관계를 입증하기 위해 일차 상호주관성으로부터 이차 상호주관성으로의 전환을 설명한다. 주체와 또 다른 주체 그리고 도구를 동일한 선상의 중요성을 가지고 연결하는 것이다 (Trevarthen & Hubley, 1978, p.214). 그러나 Engeström은 Trevarthen의 이러한 시도는 여전히 주체의 사회문화적 맥락의 활동 안에서 도구를 객체와 연결시키지 못하였으며, 오히려 Mead의 보편적이고 공적인 상호작용의 차원에서의 상징(도구)의 사회역사적 측면을 드러내지 못하는 결과를 가져왔다고 분석한다(Engeström, 2014).

마르크스주의 철학자이자 수학자인 Badiou에게 주체는 인간의 사유, 실천, 이념을 가진 존재, 진리를 만들어내는 원인이며, 주체가 된다는 것은 공존하고 있던 무한함과 접촉하는 순간을 의미하며, 이러한 경험을 통해 유한한 결과물을 만들어 낼 수 있게 된다(Badiou & Engelmann, 2015). Badiou가 말하는 주체와 주관성이란 단순한 관념이 아니다. 그것은 사건에 대한 긍정의 힘을 통해 세계를 변화시키는 '실천의 원동력'이다. 어떠한 타협도 없이 그 긍정을 끝까지 밀고 나가는 주관성, 포기를 모르는 실천적 주관성만이 사건이 만들어낸 새로운 가능성을 현실화시킬 수 있다. 그 주관성이 없다면, 사건은 그저 의미 없는 에피소드로 사라지고 말 것이다. 진리를 향하는 주관성은 확신의 형태로 나타나고, 그 확신에 기대는 강력한 실천으로 이어진다. 그러한 '실천적 주관성'이야말로 세계를 변화시키는 원동력인 것이다(Brown, 2020).

Badiou는 또한 사건에 대한 충실성(Fidelity)의 관점에서 주관성을 바

라본다. 주체는 개별 인간일 뿐만 아니라 주체, 원인, 동작 또는 새로운 존재 방식에 대한 주관적인 충실성이 될 수 있다는 것이다(Brown, 2020, p.119, 121). Badiou의 관점에서는 학생들이 스스로의 수학을 만들어보고 각자가 주체가 되어보는 접근을 제공하는 것을 통해 학습 주체성이 형성되며, 수학적 지식은 학생들, 교사와 학생들이 상호작용하는 과정에서 그 객관성을 담보될 수 있을 것이다. 기존에 주어진 맥락이나 지식에 의해 해석되지 못하고 교사들에게 소외되어 모래알 같이 존재하던 학생들의 원소들은 수업을 통해 실존하는 객체로 발현될 수 있으며, 이는 주체들에게 사고할 수 있는 틈을 제공하고 학습 주체성의 발현의 기회를 제공해 줄 수 있을 것이라 기대한다.

교육학적인 관점에서 수학 개념 형성 과정과 주체를 고찰하는 데 있어 행위주체성의 개념을 고려하지 않을 수 없을 것이다. 학습에 대한 행위주체성은 동기 및 참여, 목표 지향 및 자기 방향성, 자기 효능감 및 자신감, 메타인지 및 자기 모니터링 그리고 끈기의 사이클을 통해 함양될 수 있는 일련의 과정을 모두 포괄하는 개념으로 정의될 수 있다. 학습자는 내적, 외적 동기를 가지고 학습에 참여함으로써 스스로 학습 목표를 설정하려는 충동이 생긴다. 학습 목표를 설정한다는 것은 학습자가 자신의 학습을 통제하고 방향성을 갖는 것을 의미하며, 이는 더 강한 자기효능감 및 자신감으로 이어진다. 그 결과 학습자 스스로 더 추가적이고 복합적인 학습 목표를 설정하게 되고, 더 많은 학습 전략을 사용하는 것을 의식적으로 모니터링하게 된다. 학습자는 의식적인 자기 모니터링을 통해 더 많은 도전을 하고, 어렵고 복잡하여 달성할 수 없는 도전 과제를 끈기를 가지고 지속할 수 있게 되며, 의미 있고 가치 있는 것을 배우는 데 성공한 후 더 많은 동기를 부여받고 참여하게 되며 새로운 목표를 설정하고 다시 시작할 준비를 하게 된다(David T. Conley & Elizabeth M. French, 2014). 그런데 교육학적 관점에서 행위주체성은 학습자 개인의 역량에 많은 초점이 맞추어져 있어 사회문화적 맥락에 대한 고려가 다소 결핍되어있는 경향이 있다.

활동이론의 학습 활동의 관점에서, 변증법적으로 서로 얽혀있는 교수

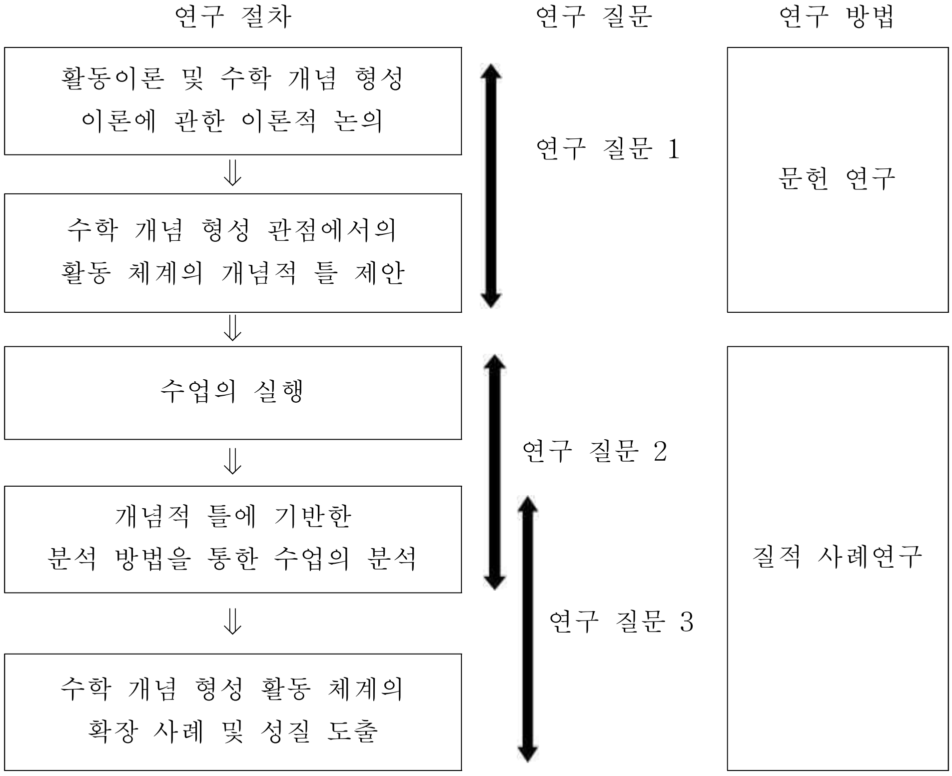
-학습에서는 교사의 계획 및 행동뿐 아니라 그에 따른 학습자의 행동에 대해서 살펴볼 필요가 있다. 이는 교사가 시행하려고 하는 계획된 과정이 학습자에 의해 수행된 실제 과정과 비교 및 대조되어야 함을 의미한다. 이 둘은 절대 일치하지 않을 것이며, 둘 사이의 간격, 협상 그리고 간헐적인 합병은 학습 과정을 행위주체성의 형성 과정으로서 이해할 수 있게 한다. 둘 사이의 간격을 분명히 하고 이를 연결 짓는 다양한 방법들, 즉, 협의 및 합의 과정, 객체의 경계 이동 등의 맥락에 대한 연구는 학습의 중심에 교사와 학습자의 행위주체성을 둘 수 있게 한다 (Engeström, 2014; Engeström, Rantavuori & Kerosuo, 2013). 즉, 이 연구의 수학 학습에서 행위주체성이란 학습자의 학습 활동 및 목표가 개인의 역량이나 목표와 같은 미시적 맥락 및 학습 안과 밖의 공동체, 사회문화적 환경과 같은 거시적 맥락 안에서 복합, 유기적으로 결정되며, 이러한 확장학습의 과정을 통해 형성되는 것이다.

이상의 이론적 논의를 바탕으로, 이 연구에서는 '수업 안, 과제의 맥락 안에 있는 학습자인 동시에 수업 밖, 개인의 사회문화적 맥락 안에 있는 학습자'를 주체라 정의하고, '수학 개념 형성 과정'을 '주체의 변환 과정'으로 간주한다.

제 3 장 연구 방법

제 1 절 연구 절차 및 방법

활동이론 개발은 그 자체로 연구의 대상일 뿐만 아니라 일반적인 연구 방법론이기도 하다(Kaptelinin & Nardi, 1997; Zurita & Nussbaum, 2007; Hashim & Jones, 2007). 이 연구는 활동이론 개발 연구의 특성에 따라 연구 질문 1과 연구 질문 2, 3을 설정하였으며 다음과 같은 연구



[그림 3-1] 연구 절차 및 방법

절차를 가진다. 먼저 연구 질문 1에 답하기 위하여, 제 2 장의 활동이론 및 수학 개념 형성 이론에 관한 문헌 연구를 통하여 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 활동 체계 및 구성 요소의 특성을 정의함으로써 수학 개념 형성 활동 체계의 개념적 틀을 구성하고 이를 바탕으로 분석 방법을 제안한다. 다음으로 연구 질문 2에 답하기 위하여, 제안된 분석 방법을 통해 실제 수업 사례를 구체적이고 종합적으로 분석하고 결과를 상술한 후, 연구 질문 3에 답하기 위하여, 연구 질문 1과 2에 대한 연구 결과를 바탕으로 수학 개념 형성 활동 체계의 확장 도식의 사례를 제시하고 수학 개념 형성 활동 체계의 성질을 도출한다. 연구 질문 및 연구 방법과 관련한 연구 절차를 도식화하면 [그림 3-1]과 같다.

'질적' 연구는 인터뷰나 자료에 대한 심층적인 분석과 같은 다양한 방법을 사용하며, 문화적 상징, 개인적 경험, 현상 및 사회적 관계에 대한 자세한 이해의 기저에 깔린 의미와 동기에 초점을 맞추는 경향을 가진다 (Aspers & Corte, 2019; King et al. 2021; Kalof & Dan, 2008). 또한 질적 연구는 연구 주제에 대한 해석적, 자연주의적 접근을 포함하는 다중 방법에 중점을 두며, 개인의 삶에서 일상적이거나 어떤 사건이 되는 순간과 의미를 설명하는 다양한 경험적 자료를 대상으로 하는 사례연구 즉, 인터뷰, 관찰, 역사, 상호작용 등을 수집하고 사용하는 연구를 모두 포함한다(Denzin & Lincoln, 2011).

이 연구에서는 연구 질문 2와 3에 답하기 위해 질적 사례연구를 수행하였는데 그 이유는 다음과 같다. 첫째, 사례연구는 연구의 맥락을 드러내는 데 좋은 연구 방법이다(Stake, 1995). 이 연구는 구성주의 관점으로부터 학습자의 수학 개념 형성의 과정을 관찰하기 위한 분석 방법을 제안하는 것을 목적으로 한다. 수학 개념 형성 및 발달에 관한 다양한 이론들과 이 연구의 유사성 및 차이점을 바탕으로 연구의 필요성을 드러내는 데 있어서 사례연구는 효과적인 방법론이 된다.

둘째, 사례연구는 하나의 사건, 현상 또는 사회적 단위에 대한 구체적이며 상세하고 총체적인 서술을 통해 연구가 가진 의미를 조명하는데 좋은 연구 방법이다(Stake, 1995; Merriam, 1998; Guba & Lincoln, 1981).

이 연구는 중학교 3학년 통계 영역의 과제의 문제 해결 과정을 통해 기댓값과 표준편차의 개념을 형성하는 사례를 이론적 논의를 바탕으로 제안된 분석 방법을 통해 미시적, 거시적으로 서술하여 활동 체계로 수학 개념 형성 과정을 관찰하는 연구의 의미를 드러내는 것을 목적으로 한다. 정용재(2004)는 박사학위 연구를 통해 6학년 학생들을 대상으로 '힘의 작용'에 관한 개념학습에 개발된 모형을 적용한 학생별 활동과 발화의 구체적이고 총체적인 서술을 통하여 '전형적 인식상황'이 학생들의 선개념을 파악하는 도구로서, 개념학습에서 변화의 대상으로서 중요한 요소임을 밝혔다.

셋째, 연구에서 제안한 모델이나 틀이 전체 집단이나 특정한 사례가 아닌 다른 상황에서 일반화되지 않을 가능성도 발생할 수 있지만, 사례연구의 결과는 유사한 상황에서 가능한 것과 향후 연구에서 변경해야 할 사항들을 알려주는 정보를 제공해 줄 수 있다(Levenson, 2015; 문성재, 2020). 이 연구는 활동 체계의 분석틀을 기반으로 한 통계 영역의 구체적인 사례를 통해 교사에게 향후 더욱 다양한 영역에서 과제를 설계하고 학습자의 수학 개념 형성 과정을 관찰할 수 있는 기회를 제공하려는 목적으로 수행되었다. 임해미(2007)는 박사학위 연구에서 프로젝트 기반 학습에 대한 풍부한 이론적 논의를 통해 '프로젝트 기반 수학 수업의 틀'을 설계하고 '회귀분석' 수업의 사례 분석을 수행하고, 사례연구의 결과를 기반하여 향후 프로젝트 기반 수학 수업의 정규 교육과정에의 도입을 위해 수업의 설계, 수행의 단계에서 고려해야 할 점들을 제안하였다. 문성재(2020)는 박사학위 연구에서 포괄적 유물론을 기반한 '배치 모델'을 제시하고 이를 실제 수학 교수·학습 상황에 적용해보는 사례연구를 수행하고 보다 거시적이고 장기 발달론적인 후속 연구를 제안하였다.

제 2 절 연구 참여자 및 수업 배경

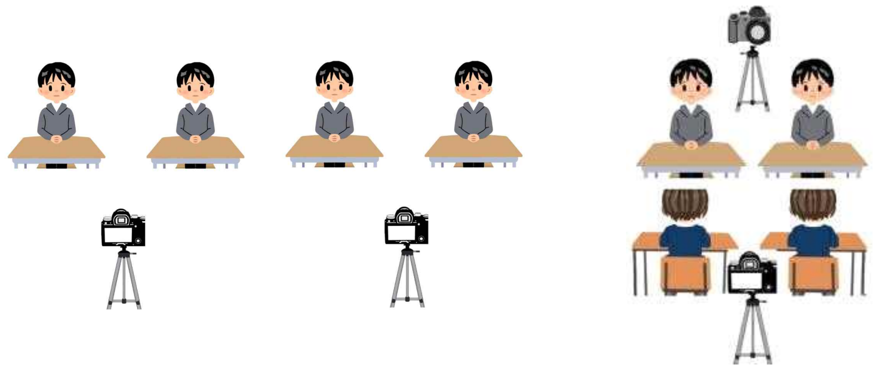
이 연구는 이론적 논의를 기반으로 현상을 관찰하기 위한 목적으로 수행하는 질적연구로 개별 학생이 과제를 해결하는 동안 나타낸 발화와

응답한 활동지 및 녹화 파일을 데이터로 수집한다.

COVID-19의 전국적 확산으로 인해 여러 학급의 학생들이 방과 후 다시 섞여 총 2차시의 수업을 하는 것에 대한 우려와 다른 학급에 대한 출입이 암묵적으로 금지되어있는 학교 상황을 고려하여 연구자가 직접 교사로 참여하였으며, 동일한 학급의 구성원만을 대상으로 연구 참여 희망자를 모집하였다. 또한 연구 과제의 특성을 고려하여 수학 개념을 형성하고 정의하는 데 있어 연구 참여자가 그룹 내에서 역할을 수행하고 문제를 해결하는 과정을 집중적으로 관찰하기 위하여 연구 참여자 수를 5명 이내로 제한하여 모집하였다(Ouvrier-Buffet, 2006; Borromeo Ferri, 2018, p. 6).

이 연구에 참여한 학생들은 기댓값과 표준편차의 개념을 구성하고 모델을 완성해야 하는 과제의 특성을 고려하여 새로운 수업 방식과 과제에 대해 적극적으로 참여하기를 원하고, 수학 과제를 주도적으로 해결하기에 충분한 역량을 갖추었다고 판단되는 경기도 소재의 중학교 3학년, 네 명의 학생들을 대상으로 한다. 참여를 희망하는 학생에 대한 스크리닝 작업은 진행하지 않았으므로 네 학생 모두 남학생으로 선정되었고, 네 학생 모두 학교 교육과정에서 기댓값이나 표준편차에 대한 교육을 받지 않았다. 용준이와 수현이는 전체적인 학업 성취도가 상에 속하는 학생이고 건우와 동혁이는 모두 전체적인 학업 성취도가 중에 속하는 학생이지만 수학에 흥미가 높은 편이었다. 수업은 총 2회, 약 150분(회차별 약 75분)으로 이루어졌으며, 1회차 수업과 2회차 수업은 1주일을 간격을 두고 진행되었다. 1회차 수업은 활동지를 중심으로 발화나 수학적 도구의 사용을 관찰하는 것에 초점을 맞추어 진행되었으므로, 학생들의 자리를 교사를 바라보도록 일렬로 배정하고 카메라는 학생과 활동지가 보이도록 교사의 시선으로 배치하였다. 이는 학생들이 어떠한 순서로 활동지를 작성하고, 어떤 과정을 거쳐 수학적 도구를 생성해내는지 분석 단계에서 구체적으로 확인하기 위함이다. 2회차 수업은 담화를 통한 상호작용에 더욱 초점을 두어 관찰하기 위해 네 명의 학생들이 서로 바라보도록 자리를 배정하고 카메라를 학생들이 서로 얼굴을 바라보는 시선으로 배치

하였다.



https://openai.com/product/dall-e-2 를 통해 생성한 이미지를 편집함

[그림 3-2] 학생의 자리 배정 및 카메라 배치

수업 후 수업의 결과를 분석한 이후 각 학생별로 면담을 진행하였는데, 이는 수업 안에서의 상황적 맥락과 더불어 수업 밖에서의 학생의 사회·문화적 맥락을 더 깊이 이해하고 분석을 구체화하기 위함이다. 면담은 반구조화된 면담지를 바탕으로 자유로운 대화 형식으로 이루어졌으며 온라인을 통해 학생별로 약 30분간 진행되었다.

제 3 절 수업 과제의 설계

학습자가 과제를 해결하는 과정에서 수학적 또는 비수학적 도구나 객체 등을 생성하는 활동을 중심으로 수학 개념 형성 과정을 분석하기 위해서는 교수·학습 상황에서 수학적 용어나, 학습 목표가 최대한 드러나지 않는 것에 초점을 맞추어 과제가 설계되어야 한다. 따라서 이 연구의 목적을 달성하기 위하여, 실제 상황에서 만나는 보다 현실적이고 덜 정형화된 문제 상황을 수학 교실의 활동으로 가져올 수 있도록 설계된 모델링 과제를 중심으로 연구의 과제를 설정하는 것이 적절하다고 판단하였다. 모델링 과제는 지식을 형식적 수학에서 벗어나 비정형화된 방법으

로 생성할 수 있도록 설계되고 개발되는데, 이 연구의 과제 또한 학교 수학에서 지식을 구성하는 교육과정의 절차적 맥락에서 벗어나서 개념을 형성하는 비형식적 추리 추론6) 과정을 살펴볼 수 있도록 설계되어야 한다는 점에서 유사한 성격을 띠고 있기 때문이다.

이 연구에서는 통계 영역과 관련한 'flipping for a grade'(Gould, Murray & Sanfratello, 2012)의 수학적 모델링 과제를 바탕으로 연구의 목적에 맞도록 변형하고 추가하는 과정을 거쳐 총 10문항(17개의 세부 문항) 및 두 가지 활동으로 과제를 구성하였다. 과제는 표준편차와 관련된 핵심 개념을 형성하기 위한 학습 목표를 가지고 설계되었으며, 이 과정에서 범위, 평균, 기댓값 등의 개념을 정형화되지 않은 형태로 형성하거나 이를 활용할 수 있도록 하였다. 또한 과제는 확장학습 순환상의 인식론적 행위들인 질문하기, 분석하기(역사적 분석, 실제적-실증적 분석, 새로운 해결책 모형화하기, 새로운 모형 검증하기, 프로세스 성찰하기 및 새로운 절차로 안정화하기를 최대한 따르도록 설계되었으며(Engeström, 2008, p.132), 구체적인 과제의 설계 원리를 문항별로 살펴보면 다음과 같다.

Leading Question
게임 1과 게임 2 중에서 어떤 게임을 고르겠습니까? 그 이유는 무엇입니까? 밝혀준 이유를 정당화해보세요.

도입 질문은 직관적인 선택을 하도록 유도하지만, 그 이유를 정당화해야 하기 때문에 두 게임의 차이점이 무엇인지까지 스스로 질문해보며 고려해볼 수 있기를 기대하며 설계되었다.

---

6) 비형식적 추리 추론(informal inferential reasoning)은 특히 통계 분야에서 활발하게 연구되며 학자마다 연구의 분야, 관점에 따라 그 정의에 차이가 있으므로 이에 대한 다양한 논의가 가능하겠지만, 이 연구에서는 학교 수학을 학습하기 전에 일상에서 비롯한 경험적 지식 혹은 사전 개념 지식을 수학 학습에 활용하는 방식 또는 추론 과정을 의미하는 관점에 주목하였다(Makar & Rubin, 2009; Pfannkuch, 2011; Ben-Zvi, 2006).

1. 게임에 영향을 주는 요인에는 어떤 것이 있을까요?

2. 1.에서 말한 게임에 영향을 주는 요인 중 어떤 요인을 통제하면(가정하면) 당신의 생각을 수학적으로 정당화하기 좋을까요?

1번과 2번 문항은 게임을 선택한 이유를 질문한다. 이 질문에 답하기 위해서는 게임을 선택한 이유와는 별도로 게임에 대한 실제적인 분석이 가능해야 한다. 하지만 이 질문에서 학습자는 자신이 선택한 게임에 대한 정당화를 위해 유리한 방향으로 통제해보는 시도를 할 것이다. 과제를 지날수록 이러한 통제가 합의되지 않을 것이며, 학습자는 내·외적 모순에 직면하게 될 것을 기대한다.

3. 당신이 통제한(가정한) 요인을 고려하여 누군가가 게임 1과 게임 2를 할 때 동전을 열 번을 던져 얻을 수 있다고 생각하는 점수를 각각 추측해보세요. 그렇게 생각한 이유를 적어주세요.

3-1. 이제 3.의 두 추측 값을 비교하세요. 이 두 게임에 대해 어떤 결정을 내릴 수 있습니까?

3번 문항을 통해 학습자는 자신의 선택이 더 옳다는 것을 다른 누군가에게 설득하는 과정을 거치길 기대한다. 다른 사람을 설득하기 위해서는 자신이 게임을 선택한 이유를 더욱 깊이 생각하고 이해해야 하며, 이는 자신이 생성한 객체를 더욱 정교화하는 과정을 거치게 한다. 이 과정은 자신이 통제(가정)한 요인이 다른 누군가에게도 설득력이 있는지에 대한 고민도 동반하게 될 것을 기대한다. 3번 문항에서 '기댓값'이라는 수학적 용어를 쓰지 않고 '추측 값'이라는 일반적인 단어를 쓴 이유는 이후 문항을 통해 합의를 거쳐 정교하게 수학화된 형태의 값을 기댓값으로 정의하기를 기대하기 때문이다.

4. 우리는 3번에서 추측해본 가장 적절한 추측 값을 **기댓값**이라는 용어로 정의하려고 합니다. 앞에 해결한 문제들을 바탕으로 기댓값을 정의해 보세요. 단어 또는 수학적 기호로 나타내 봅시다. 수학적 기호로 표현하기 어렵다면 2. 또는 3.으로 돌아가 통제한(가정한) 요인을 변화시켜 더 적절한 추측 값을 다시 찾아보는 것도 좋겠지요?

4-1. 게임 1에서 동전을 열 번 던졌을 때 점수의 기댓값은 얼마입니까? 게임 2에서 동전을 열 번 던졌을 때 점수의 기댓값은 얼마입니까? 자신이 정의한 기댓값을 바탕으로 계산해 보세요.

4-2. 그렇다면 게임 1과 게임 2의 기댓값을 통해 당신이 게임을 선택한 이유를 정당화할 수 있을까요? 그 이유를 밝혀주세요.

3번 문항을 통해 학습자는 각자 게임을 선택한 이유를 정당화하는 과정을 거치며 동전을 10번 던졌을 때 나올 것이라고 기대되는 점수를 추측 값으로 정할 것이다. 4번 문항은 학습자가 생성한 추측 값이 자신이 선택한 게임에 따라 그 선택을 정당화하기에 유리한 값으로 정의되었을 가능성을 염두에 두고 합의된 값을 기댓값에 이르도록 하는 다양한 장치를 마련하는 방식으로 설계되었다. 또한 추측 값을 기댓값이라는 용어로 정의하기 위해 기댓값을 수학적 기호로 나타내거나, 앞에서 통제했던 요인들을 변화시키며 더 적절한 추측 값을 찾는 활동을 하도록 설계되었으며, 이후 활동 1과 활동 2를 통해 동전을 던지는 게임을 직접 해볼 수 있도록 하였다. 활동 1과 활동 2를 통해서 학습자는 기댓값과 같은 결과를 얻을 수도 있지만, 대부분은 전혀 다른 결과를 얻게 될 것이다. 이는 자신의 기댓값과 활동 결과가 불일치하는 모순을 드러낼 것이며, 직접 동전을 던지는 활동은 단순히 수업의 흥미를 유도하는 장치를 넘어서 더욱 보편적으로 타당한 기댓값이 무엇일까 다시 환기시켜주는 장치가 될 것이다.

5. 4.에서 당신이 정의하고 구했던 게임 1과 게임 2의 기댓값과 활동 1과

활동 2를 통해 실제로 동전을 던져서 나온 점수는 얼마나 큰 차이가 있습니까? 다른 친구들의 결과는 어떘는지 그 결과를 종합해 비교해봅시다.

5-1. 나의 기댓값과 친구들의 기댓값이 그 차이를 설명하는 데 보편적으로 타당한가요? 그렇지 않다면 보편적으로 타당한 기댓값을 함께 도출해보세요.

5-2. 합의된 기댓값을 통해 당신이 게임을 선택한 이유를 정당화할 수 있을까요?

5번 문항은 기댓값으로 이끄는 다양한 장치에도 불구하고 여전히 자신의 기댓값을 고수하고 있는 학습자가 있을 것을 고려해 다른 학습자의 기댓값과 활동 결과를 비교해보고, 더욱 보편적으로 타당한 기댓값을 합의하여 도출해보는 것을 목적으로 설계되었다. 이때 학습자는 자신의 문화역사적 맥락 즉, 지식을 공유하는 공동체 내에서의 자신의 위치, 성격, 가치관 및 구성원들과의 관계, 소통의 방법 등의 맥락에 의해 서로 다른 경험적 결과에 이를 것이다. 그들 간에 명시적이든 암묵적이든 유기적으로 공유된 경험은 때에 따라 공간에 따라 다르게 나타날 것을 기대한다.

이 수업은 최대한 구체적인 용어의 개념이나 정의에 대해 따로 설명하기 않는 것을 목표로 하기 때문에 체크 포인트가 될 수 있는 문항이나, 활동을 배치하여 학습자가 과제를 수행하는 가운데 학습 목표나 수업의 방향성을 잃지 않도록 하는 데에 초점을 맞추어 설계하였다. 5번 문항은 총 2 회 수업으로 구성된 이 과제에서 두 번째 차수의 첫 문항으로 배치되었으며, 일주일 동안 과제에 대해 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하였다.

당신은 여전히 기댓값을 통해 당신이 선택한 게임의 이유를 정당화하기 힘들다는 것을 알게 되었습니다. 그렇다면 당신의 선택을 정당화할 다른 방법을 찾아야 하겠죠? 힌트를 드리겠습니다. 게임 1과 게임 2의 차이를 고려해 봅시다.

6. 게임 1보다 게임 2에 얼마나 많은 차이가 있는지를 고려하는 수학적 모델을 만들 수 있습니까? 모델에 반드시 포함해야 하는 것이 있습니까?

6-1. 친구들이 만든 모델을 비교하세요. 다른 친구들의 모델은 당신의 모델과 어떤 유사점 및 차이점이 있습니까?

6-2. 가장 적합한 모델을 정해주세요.

6번 문항은 표준편차의 개념을 형성해 보도록 설계되었다. 학습자는 5번 문항까지 문제를 해결하면서 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결론에 이를 수 있을 것이다. 하지만 자신이 게임을 선택한 이유를 정당화하기 위해 게임을 선택할 때부터 직관적으로 존재했던 두 게임의 차이를 수학적으로 나타낼 수 있는 방법을 고려해야만 할 것이다. 6번 문항에서는 그 차이에 대한 힌트로 '얼마나 많은 차이가 있는지' 라는 용어를 사용해 수학적 모델을 만들도록 설계되었다. 하지만 학습자에게 이러한 차이를 고려한 모델을 만들어야 하는 상황이 갑작스러운 것은 아닐 것이다. 과제는 학습자가 5번 문항까지 지나오면서 다양한 방법으로 자신의 선택을 정당화하기 위해 이 차이를 고려하는 모델을 만드는 것을 도울 수 있도록 설계되었다. 최솟값과 최댓값의 범위를 인식하는 수준에서 기댓값과의 편차를 고려할 수 있는 수준까지 이끌도록 하는 것이 이 문항의 목적이다.

학습자는 수학적 모델을 만들어 보는 낯선 경험을 하게 되겠지만, 이는 이 과제가 늘 그래왔던 것처럼 수학적으로 완벽할 필요가 없다는 것을 이미 잘 알고 있다. 자신의 모델을 만들어 보고, 친구들의 모델과 자신의 모델을 비교하는 과정에서 모델에 반드시 포함해야 하는 요소를 찾아보고 가장 적합한 모델을 만들어 보는 것을 통해 기댓값만으로는 설명할 수 없었던 두 게임의 차이를 설명할 수 있게 된다. 이때 학습자는 교사가 생각할 수 없는 다양한 방법을 통해 차이를 설명할 것이라 기대한다.

7. 선생님이 고려한 모델은 **표준편차**입니다. 표준편차의 공식을 인터넷에서 찾아보세요. 당신의 모델과 어떤 유사점과 차이점을 가지고 있습니까? 당신의 모델은 이미 그 자체로 훌륭합니다. 그럼에도 불구하고 당신의 모델에 더 수정해야 할 사항이 있습니까?

8. 이제 당신이 게임 1 또는 게임 2를 선택한 이유를 당신의 모델을 통해 수학적으로 정당화할 수 있습니까?

7번과 8번 문항은 확장학습의 문화적으로 더 발전된 중심 활동 및 학습 활동에서 중심 활동의 더욱 고등적인 형태의 결과물과의 비교를 통해, 자신의 모델을 더욱 발전적 형태로 변화시키는 활동을 하기 위한 목적으로 설계되었다. 학생들은 이 과정을 통해 흩어져있던 객체를 자신의 모델과 연결시키고, 오개념을 발견하는 것과 같은 반성적 활동을 통해 더욱 발전적인 모델을 완성할 수 있을 것이라고 기대한다.

9. 당신의 선택이 더욱 유리한 결과를 낳기 위해서 선생님께 어떠한 제안을 할 수 있을까요? 그 이유는 무엇인가요?

9번 문항은 최종적으로 기댓값과 표준편차의 모델을 이해하고, 확장된 규칙-생산 활동을 통해 개념을 확장하기 위한 생산적인 실천 과정을 제공하기 위하여 설계된 문항이다.

제 4 장 연구 결과

연구 질문 1에 답하기 위하여 제 2 장에서 문헌 연구를 수행하였으며, 이 장의 제 1 절에서는 연구 질문 1에 관한 최종적인 연구 결과를 제시한다. 제 2 절과 제 3 절에서는 연구 질문 2를 위한 질적 사례연구 결과 분석을 제시하며, 마지막으로 제 4 절에서는 연구 결과를 바탕으로 연구 질문 3에 답한다.

제 1 절 수학 개념 형성 활동 체계(MCFAS)

활동이론은 일찍이 기술의 사용이 기계적인 입-출력 관계가 아니라는 것이라는 인식에서 시작하여 사람과 기계의 상호작용을 위한 설계와 평가를 위해 더욱 풍부한 상황 설명이 필요하다는 필요성이 제기되면서(Nardi, 1996) 컴퓨터 사이언스 분야에서 활발하게 연구되었다. 활동이론은 기존의 정보처리 심리학이 가지는 이론적 한계점을 극복하고, 인간과 컴퓨터 상호작용(Human-Computer Interaction : HCI) 체계의 설계를 위한 분석틀로서 중요한 영향을 끼치게 된 것이다(박연정 & 조일현, 2014). 인간과 컴퓨터 상호작용에서는 활동 체계의 활동을 ‘최소한의 의미 있는 맥락을 포함하는 개별 행동’으로서 분석의 기본 단위로 보고, 상호작용 체계를 설계할 때 활동이 가진 맥락적, 역동적, 중재적, 지속적인 변화와 발전에 대한 이해, 활동 체계의 객체, 주체, 도구, 규칙, 공동체 그리고 분업에 해당하는 것이 무엇인가에 대한 이해를 바탕으로 활동 체계에서 발생하는 모순이 실생활에서 생기는 여러 가지의 객체들에 의해 서로 다른 활동 간 혹은 활동 체계의 구성 요소 안에서 발생하며 이러한 모순이나 문제점 등이 발전의 근원으로 설계의 주안점으로 보는 관점을 가지고 분석 가능한 체계를 만들도록 설명한다(Kuutti, 1996; 박연정 & 조일현, 2014).

활동이론은 특정 활동의 개념과 관점의 방향성을 제공하는 것을 돕고

(Nardi, 1996), 그 활동에 대한 명료한 설명을 위한 분석틀을 제공하지만 연구를 위한 기술 및 절차를 제공하는 것이 아니며, 오히려 그것의 개념적 도구는 검토 대상의 특정한 특성에 따라 구체화 되어야 할 것을 강조한다(Engeström, 1993). 수학 교실의 맥락에서 수학 개념 형성을 관찰하기 위한 이론적 또는 분석적 틀로서 활동이론을 채택하기 위해서는 주체, 객체, 도구, 공동체, 분업, 규칙의 구성 요소가 수학 개념 형성의 특성에 기반하여 구체화 되어야 할 것이다.

이론적 논의에서 구성주의, 마르크스주의 및 다양한 철학적 논의를 바탕으로 수학 지식의 구성이 개인의 주관성을 통해서가 아니라 사회적 상호작용에 더욱 무게를 두고 사회적 합의에 따라 타당한 어떠한 지식이 타당하다고 결정될 수 있는 가능성을 가지며, 주어진 방식이 아니라 각자가 수학을 하는 방식으로 개념을 이해하도록 동기를 부여하는 활동을 통해 수학을 구성하고 지식을 확장할 수 있다는 중요한 특성 등을 바탕으로 활동이론에 기반한 수학 개념 형성의 관점으로 주체, 객체, 도구를 정의하였다. 이 절에서는 연구 질문 1에 대한 최종적인 답을 위해 수학 개념 형성의 관점에서 활동 체계를 정의하고, 정의된 주체, 객체, 도구와 더불어 공동체, 분업, 규칙을 함께 정의하였으며, 이는 제 2 장의 문헌 연구를 통한 활동이론의 기본적인 틀과 수학 개념 형성의 특성에 관한 이론적 논의에 근거한 것이다.

1. 수학 개념 형성 활동 체계의 개념적 틀

제 2 장의 논의를 통해 수학 개념을 형성하는 과정을 분석하는 이론이 개인적 차원을 넘어서 사회적 맥락으로 해석되어야 할 필요성을 제기하였다. 학교에서 학생들이 수학 학습을 경험한 결과로 비교적 지속적인 행동의 변화를 나타내거나 그 잠재력을 변화시키고 수학 지식을 습득하는 과정을 익힐 수 있을지는 물음표로 남아 있지만, 적어도 이 연구에서 지향하는 수학 학습을 통해서는 이러한 변화와 과정들이 경험되고 그 과

정을 관찰할 수 있을 것이라고 기대할 수 있기에 이 연구에서는 수학 개념을 형성하는 과정을 인간 학습 활동의 맥락으로 보고 ‘수학 학습 활동’과 ‘수학 개념 형성 활동’을 같은 내용적 의미를 담은 용어로 간주한다.

이 연구에서는 수학 개념 형성 활동 체계(Mathematical Concept Formation Acitivity System: 이하 MCFAS[7]))를 다음과 같이 정의한다.

MCFAS : 수학 학습 목표를 중심으로 주체, 도구, 객체, 규칙, 공동체, 분업의 구성 요소들이 상호작용을 통해 수학 개념을 형성하는 전 과정을 최소단위로 하는 활동 체계

제 2 장에서는 이론적 논의를 통해 이 연구에서 수학 개념을 형성하기 위해 생성하는 객체와 도구에 대해 자세히 논의해 보았다. 이를 바탕으로 MCFAS의 각 노드의 여섯 가지 구성 요소의 특성을 정의하면 다음과 같다.

MCFAS에서 주체는 수업 안, 과제의 맥락 안에 있는 학습자인 동시에 수업의 밖, 개인의 사회문화적 맥락 안에 있는 학습자이다. 학습자의 수학 개념을 형성 활동은 사회적 관계로 이루어지며, 학습자는 수학 개념을 형성하기 위해 수업 안의 지식 공동체 및 자신이 속한 다양한 공동체에 의지한다. MCFAS에서 공동체는 동일한 객체 및 수학 학습 목표를 가지고, 성취하기를 바라는 객체 및 수학 학습 목표에 어느 정도 자신의 노력을 기울이고 있는 수학 개념 형성 활동의 주체인 개인 또는 그룹의 집합이다. 이 절에서는 주체와 공동체를 조작적으로 분리하여 정의하였으나, 주체인 학습자는 학습자 자체로 공동체이자 공동체 없이 존재하지 않는다. 주체와 공동체, 즉 개인과 사회가 분리되어 해석될 수 없다는 관점은 활동이론의 기본 전제이며 제 2 장에서 다양한 학자들의 견해를 통해서도 논의되었다. 예를 들어 Mead는 각각의 개인이 구성하는 행동의 관점에서 사회적 집단의 행동을 이해하지 않고, 오히려 공동체 활동을

---

7) ‘수학 개념 형성 활동 체계’의 영문 첫 알파벳을 딴 MCFAS는 ‘맥파스’라 읽는다.

구성하는 개인의 행동을 원소로써 분석하는 사회 전체를 통해 이해하며, Peirce는 개인이 개념 즉, 진리에 이르기 위한 방법은 공동체에 기반을 두어야 하는데, 이는 개인의 모든 사고가 도구를 통해 이루어지며 이 도구는 공동체 안에서 상호주관적으로 해석되어야만 의미를 갖는 것이기 때문이라고 보았다.

Cobb과 그의 동료들은 학습자의 수학적 개념과 그 활동을 해석하고 이해하는 방법으로 사회수학적 규범에 대한 이해의 필요성을 제안하였다. 그들은 교실 상황에서 개인은 그 안에 존재하는 공헌, 권위 등에 따라 서로 다른 관점을 협상하거나 재정의하는 사회적 관계를 통해 수학적 의미를 협상한다고 보았다(Yackel & Cobb, 1996; 방정숙, 2001). MCFAS에서 분업은 수학 개념을 형성하기 위해 서로 협동하는 학습자들 간의 수평적 구분뿐 아니라, 교사 혹은 또 다른 학습자 사이의 권력적, 수직적 구분을 뜻한다. 즉, 분업은 학습자가 수학 개념을 형성하는

[표 4-1] 수학 개념 형성 활동 체계(MCFAS) 구성 요소의 정의

구성 요소	특성
주체	수업 안, 과제의 맥락 안에 있는 학습자인 동시에 수업 밖, 개인의 사회문화적 맥락 안에 있는 학습자.
객체	수학 개념을 형성하기 위해 생성하는 수학적 또는 비수학적 표현, 발화, 행동, 감정 등
도구	객체를 생성하기 위해 사용하고 조작하는 모델이나 다른 개념
공동체	수업 공간의 공동체(수업 공간에 있는 친구들과의 관계, 수업 교사와의 관계, 교실 환경 등)와 수업 밖 공간에서 공동체(교우관계, 가정환경 등)
분업	수업 안·밖에서의 묵시적 위계를 기반으로 한 학습자가 놓인 상황이나 과제의 맥락을 통해 맡겨진 역할
규칙	과제에서 드러난 명시적 규칙 및 수업 안에서 일어난 암묵적 합의와 수업 밖의 환경으로부터 기인한 규칙 생성

과정에 영향을 미치는 묵시적 위계와 같은 개인적, 사회적 관계를 기반으로 한 학습자가 놓인 상황이나 과제의 맥락을 통해 맡겨진 역할이다. MCFAS에서 규칙은 수학 개념 형성 활동의 주체인 학습자 또는 공동체 구성원들의 객체 활동, 도구-생성 활동 등과 같은 행위와 각 구성 요소들 간의 상호작용을 조절하는 원칙이다. 어떠한 맥락 속에서 학습자는 과제에서 드러난 명시적 규칙 및 수업 안에서 일어난 지식 공동체의 암묵적 합의뿐 아니라 수업 밖의 환경으로부터 기인한 명시적인 법, 정책, 규정을 비롯하여 사회의 암묵적인 규범, 기준 등의 규칙을 따르게 된다. 규칙은 공동체가 사용하는 수학적 또는 비수학적 표현을 통해 공동체 내에서 받아들여질 수 있는 활동을 이끌어내며, 규칙을 생성하는 활동을 통해서는 개인이 공동체의 합의를 이끌어낼 수 있는 활동의 중요한 구성 요소가 된다.

MCFAS의 구성 요소의 특성 및 관계를 조금 더 구체적으로 이해하기 위해서는 제 2 장의 제 1 절에서 논의한 Marx의 생산, 분배, 교환, 소비의 개념을 통해 MCFAS의 삼각 구조 안에서의 분석의 논리를 이해할 필요가 있다. Marx는 사회적으로 규정된 개인은 생산을 출발점으로 하여 다양한 요구와 동기를 교환하고 분배하며 소비한다고 보고, 생산을 중심으로 생산과 소비 및 생산과 분배의 관계를 정립한다(Marx, 2007). 제 2 장 제 3 절에서는 MCFAS의 주체, 도구, 객체의 관계를 구체적으로 다루고 이를 정의하였는데, Marx 관점에서 보면 이 관계는 수학 학습 활동에서 자연적이고 일반적으로 발생하는 생산, 즉 객체 및 그 결과물의 형성 과정이라 할 수 있다. Marx는 생산을 출발점으로 하여 이를 더욱 깊이 분석하기 위해 생산과 소비의 관계, 생산과 분배의 관계 및 교환에 주목하는데, 이 연구에서도 MCFAS의 구성 요소를 통해 수학 개념 형성 활동 체계의 삼각형을 도식화하고 이를 더욱 구체적으로 이해하기 위해 주체를 중심으로 주체와 규칙, 공동체 그리고 분업의 관계를 생산, 분배, 소비, 교환의 관계를 통해 그 개념과 분석의 논리를 구체화하면 다음과 같다.

먼저, MCFAS에서 주체는 먼저 수업 안의 학습 공동체에 있는 학습

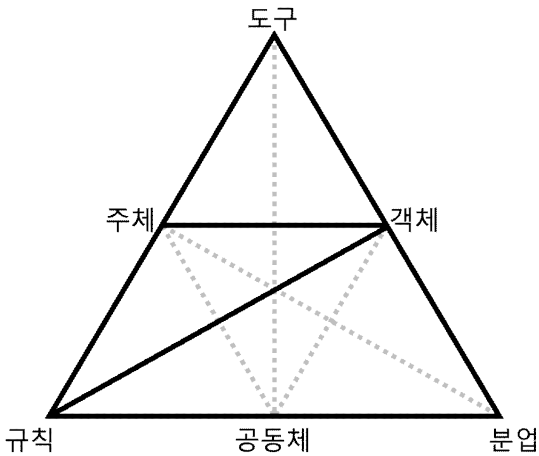
자이다. 주체는 수업 공간 안에 있는 학습 공동체 내에서의 관계 및 교실 환경, 과제의 맥락에 영향을 받는 학습자이다. 동시에 주체는 수업 밖의 공간에서의 공동체, 예를 들어 가정환경, 교우들과의 다양한 관계 속에 있는 학습자이다. MCFAS에서 주체는 공동체를 벗어나 존재할 수 없으며, 모든 주체의 행위는 공동체의 맥락에서 이해될 수 있다. 이 두 구성 요소는 시간과 공간에 따라 지속적인 영향을 주고받지만, 가시적으로 드러나기 힘들며 도구, 객체, 규칙 등을 통해 맥락으로 다루어질 수 있다.

Marx는 분배를 개인이 사회적인 규칙에 따라 그 생산에 참여하는 비율을 결정하고 그 생산을 나누는 과정이라 보고, 개인에게 분배는 생산 내에서의 각 개인의 지위를 조건 지우는 하나의 사회 법칙으로 현상하며 개인은 이러한 지위 안에서 생산하므로 지위는 생산에 선행한다고 보았다(Marx, 2007, p. 64-68). MCFAS에서 분업은 학습자가 놓인 상황이나 과제의 맥락을 통해 맡겨진 역할이며 이는 주어진 상황이나 맥락으로 그치는 것이 아니다. 다시 말해 분배가 생산물들의 분배이기 이전에 생산 도구들을 분배하고 생산물의 분배는 생산 속에 포함되어 있는 것과 같이, 학습자가 개인의 역할을 통해 도구를 활용해 객체를 생성하고 수학 개념을 형성하는 과정에서 다른 학습자의 도구나 그 결과물을 활용하는 역할의 분배가 수학 개념 형성 과정에 포함되어 있다는 것을 의미한다. 예를 들어, 수업 안, 과제의 맥락에서의 발표나 토론 등을 통해 생성되는 결과물이며, 이 결과물은 다시 학습자 자신에게뿐 아니라 학습 공동체 내의 모든 구성원에게 영향을 미친다. 학습자의 역할은 학습자가 놓인 위치나 묵시적 위계에 따라 달라지며, 개인적, 사회적 관계에 영향을 받는다.

Marx는 교환을 개인이 필요에 따라 분배에 의해 나누어진 몫을 더 나누고 이에 따른 특수한 생산을 개인에게 다시 공급하는 과정이라고 정의하며 결국 교환은 분배 없이는 존재할 수 없다고 규정한다(Marx, 2007, p. 57-70). MCFAS에서 규칙은 과제의 명시적 규칙과 상황적 맥락을 이해하는지 파악하고, 공동체의 암묵적 합의를 가시적으로 드러낼 수

있는 좋은 장치가 된다. 학습자가 주장을 정당화하기 위해 과제를 변형하고 새로운 규칙을 마련하도록 유도하는 과정은 과제에서 형성된 다양한 객체 및 수학 개념을 학습자가 다시 활용할 수 있도록 돕는다.

이상의 구성 요소의 특성을 바탕으로 하여 이 연구에서는 중심 MCFAS를 주체의 도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동의 주변 MCFAS를 분석 단위로 하며, 공동체 및 분업은 그 분석을 구체화해주는 맥락으로 다룬다. 주체는 중심 MCFAS와 이에 수반되는 다양한 주변 MCFAS를 생산하며, 그 활동의 결과물이 수학 개념이다. [그림 4-1]의 MCFAS 삼각형은 [그림 2-2]의 Engeström의 인간 활동 체계를 MCFAS의 구성 요소 사이의 관계를 바탕으로 연구의 목적에 맞도록 수정한 것이다. 모든 구성 요소를 연결하기 위해 삼각형 외부는 실선으로 표현하였고 각 구성 요소가 서로 영향을 주고받으므로 삼각형 내부는 모든 구성 요소를 점선으로 연결하였으나, 구체적인 분석 단위가 되는 도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동과 직접적으로 연관되어 있는 구성 요소들은 실선으로 표현함으로써 그 연결을 강화하였다.



[그림 4-1] MCFAS 삼각형

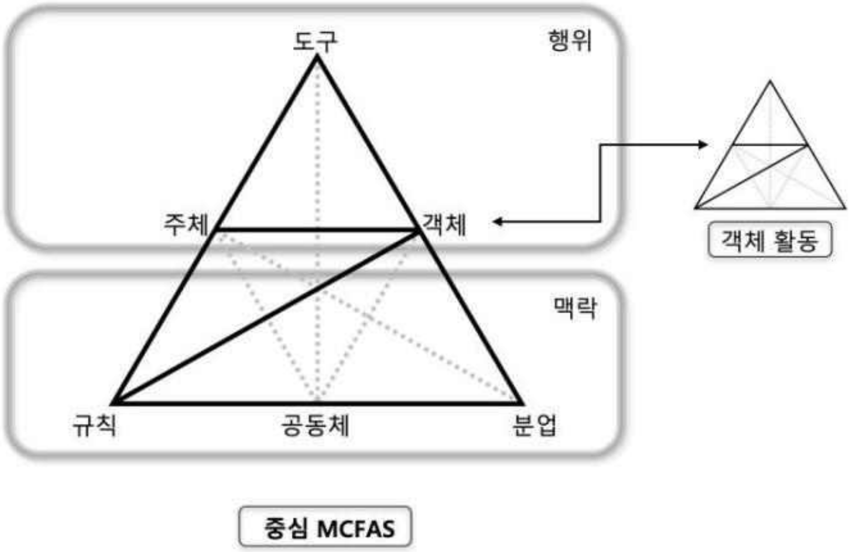
학습자의 수학 개념 형성 과정을 이해하는 데에는 학습의 맥락성, 지속성, 방향성이 고려되어야 한다. 과제를 통한 수학 개념 형성 과정을 활

동이론의 활동 차원으로 정의한다는 것은 수학 개념 형성 과정에 문화역사적 맥락을 포함시킨다는 것을 의미한다. 과제를 해결하는 동안 한 학습자가 생성하는 객체는 그것들을 공유하는 교사나 다른 학생들 안에서 의미를 지니며, 그들 간에 명시적, 암묵적, 경험적으로 합의된 규칙에 의해 조망되고 검열될 것이다. 과제를 함께 해결하는 지식 공동체 내에서의 합의는 구체적으로는 공동체 내에서의 각 개인의 위치, 성격, 가치관, 구성원들 간의 관계 및 소통의 방법 등에 따라서도 달라질 수 있다.

교수·학습 활동에서 활동의 심오한 사회적 구조는 수면 아래에서 활동 체계에 안전성과 관성을 제공하며, 주체-도구-객체로 이루어진 상단의 작은 삼각형은 교사와 학습의 가시적인 도구적 행위들을 나타낸다(Engeström, 2008). 주체-도구-객체의 세 가지 구성 요소가 전체의 빙산의 일각으로 행위(action)의 영역에 해당한다면, 규칙, 공동체, 분업의 세 가지 구성 요소는 상단 삼각형 하부에 있는 맥락(context)의 영역에 해당한다(Engeström, 1993; Florian et al., 2011).

제 2 장에서는 최소한 두 개의 상호작용하는 활동 체계를 포함하며 인간 활동에 대한 분석을 위, 아래 그리고 안과 밖으로 확장 시키며 두 방향을 통합하기 위해 복수의 관점들을 네트워킹하는 더욱 발전적 도구로서의 확장학습 도식들을 살펴보았다. [그림 2-5]와 [그림 2-6]과 같이 주변 활동은 주체, 도구, 규칙 등을 생산하는 학습 활동이며, 학습 활동의 결과물로서 객체는 더욱 생산적인 실천으로의 중심 및 주변 활동으로의 객체 활동을 반복하면서 학습 활동은 더욱 고등적인 형태의 활동을 생산한다.

이 연구에서는 MCAFS의 구성 요소의 특성과 그 관계를 바탕으로 한 MCFAS 삼각형과 객체 활동 및 주체의 행위 및 맥락의 영역에서 수학 개념 형성 과정의 분석을 위한 중심 MCFAS의 주변 MCFAS로의 확장에 관한 개념적 틀을 [그림 4-2]와 같이 제시한다. 객체는 중심 MCFAS의 결과물이며 도구 및 규칙의 생산과 같은 주변 MCFAS를 통해서도 생성된다. 따라서 이후 연구 결과를 통해서는 보다 구체적인 분석을 위하여, 주변 MCFAS를 도구-생산 활동, 규칙-생산 활동 그리고 객체 활



[그림 4-2] MCFAS의 개념적 틀

동으로 나누어 분석하고자 한다.

2. MCFAS 분석의 관점

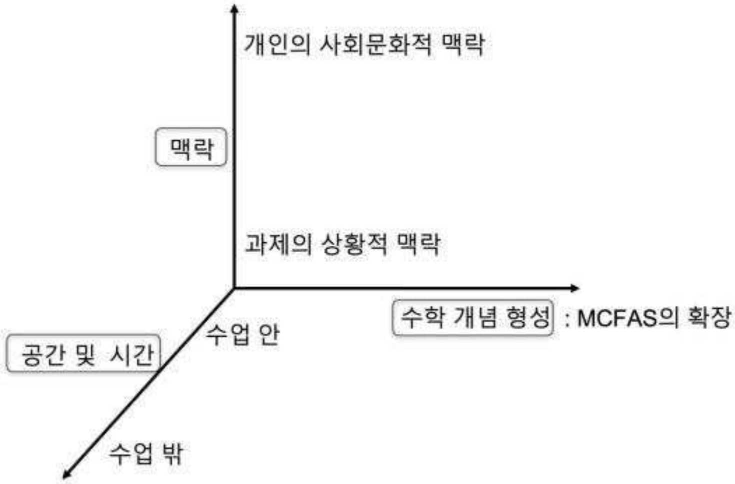
이 연구는 학생의 수학 개념 형성 과정을 수업 안에서 과제의 상황적 맥락을 바탕으로, 활동 체계의 구성 요소 사이의 상호작용 및 주변 활동을 바라보는 미시적 관점 및 수업 밖의 개인의 사회문화적 맥락을 바탕으로 활동 체계의 구성 요소 사이의 상호작용 및 주변 활동을 바라보는 거시적 관점을 넘나들며 분석한다. 미시적, 거시적 관점의 분석 단위로는 활동이론의 확장적 도구 사용에 근거한 기제를 바탕으로 한, 즉 상단의 작은 삼각형의 도구적 행위들을 바탕으로 한 중심 수학 개념 형성 활동과 도구-생산 활동, 객체 활동과 맥락을 바탕으로 하는 규칙-생산 활동에 초점을 맞추어 분석한다. 이론적 논의를 통해 MCFAS의 객체를 수학 개념을 형성하기 위해 생성하는 수학적 또는 비수학적 표현, 발화, 행동, 감정 등을 객체라 정의하고 객체를 생성하기 위해 사용하는 다른 개념이

나 모델을 도구라 정의하였다. 학습자는 수학 문제 해결 과정에서 객체의 목표에 따라 수업 안과 밖의 학습 공간 및 시간, 과제의 상황적 맥락이나 개인의 사회문화적 맥락을 바탕으로 다양한 도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동 등을 수행을 통해 개념을 형성한다. [표 4-2]는 미시적, 거시적 관점에 따른 학습 공간 및 시간, 맥락, 객체의 목표 및 미시적, 거시적 관점을 나타낸 것이며, [그림 4-3]은 미시적, 거시적 분석이 단순히 학습 공간 및 시간, 맥락에 따라 나누어 단편적으로 보는 관점이 아니라, 모든 요소가 서로 영향을 주고 받으며 다양하게 통합될 수 있는 가능성을 보여준다. 하지만 [그림 4-3]은 [표 4-2]의 관점을 입체적으로 해석할 수 있는 가능성을 보이기 위한 도식일뿐 이후 연구 결과의 분석 틀이나 방법을 의미하는 것은 아님을 밝힌다.

중심 MCFAS를 중심으로 도구-생산 활동, 객체 활동 및 규칙-생산 활동과 같은 주변 MCFAS를 분석하는 것은 중심 MCFAS 안에서 밖으로의 확장적 개념 형성 과정을 보여줌과 동시에, 확장된 MCFAS를 통해 밖에서 안으로 시선을 옮길 수 있게 한다. 또한 MCFAS는 수업 안의 환경, 과제의 상황적 맥락 또는 수업 밖에 환경으로부터 기인한 개인의 사회문화적 맥락에 따라 미시적 또는 거시적으로 분석될 수 있게 한다.

[표 4-2] MCFAS의 관점

관점	학습 공간 및 시간	맥락	객체의 목표	분석 단위
미시적	수업 안	과제의 상황적 맥락	수업 안의 환경으로부터 기인함	도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동
거시적	수업 밖	개인의 사회문화적 맥락	수업 밖의 환경으로부터 기인함	



[그림 4-3] MCFAS의 관점

다음 절에서는 MCFAS의 개념적 틀에 기반하여, 학습자의 수학 개념 형성 활동을 중심 MCFAS과 이에 따라 생성되는 주변 MCFAS를 중심으로 구체적으로 분석하고, 학습자의 MCFAS의 행위 및 맥락의 영역에서 종합적으로 분석하고자 한다.

제 2 절 최소단위 중심 MCFAS를 통한 수업 분석

이 절에서는 학습자의 수학 개념 형성 활동을 크게 두 가지 범주, 세부적으로 네 가지 주제의 최소단위[8] 중심 MCFAS로 구성하고 이를 분석하였다. 첫 번째 범주는 '기댓값 개념 형성'을 목표로 하며 세부 주제 활동은 '게임을 선택한 이유를 정당화하는 활동'과 '기댓값을 단어 또는 수학적 기호로 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 활동'이다. 두 번째 범주는 '표준편차 개념 형성'을 목표로 하며 세부 주

[표 4-3] 최소단위 중심 MCFAS의 구성

연번	학습 목표	활동 내용	중심 MCFAS 명
1	기댓값	게임을 선택한 이유를 정당화하는 활동	MCFAS-1
2		기댓값을 단어 또는 수학적 기호로 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 활동	MCFAS-2
3	표준편차	두 게임의 다른 차이를 발견하고, 그 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 활동	MCFAS-3
4		다른 학생의 모델 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 활동	MCFAS-4

8) 모든 심리학에서는 개인과 객체가 분석의 최소의 단위가 되지만, 활동이론에서는 어떠한 결과의 전체 생산이 최소단위가 된다. 수학적 활동에서는 활동을 하는 기관, 도구, 사람과 함께 객체의 집합체를 유사한 객체의 집합체로 만드는 전 과정이 최소단위를 이룬다. 이 연구의 수학 개념 형성 활동 체계의 최소단위는 교사가 학습자에게 성취하기를 바라는 학습 목표를 기반으로 설정하였으며, 이러한 중심 MCFAS는 수많은 주변 MCFAS를 수반한다.

제 활동으로는 '두 게임의 다른 차이를 발견하고, 그 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 활동'과 '다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 활동'이다.

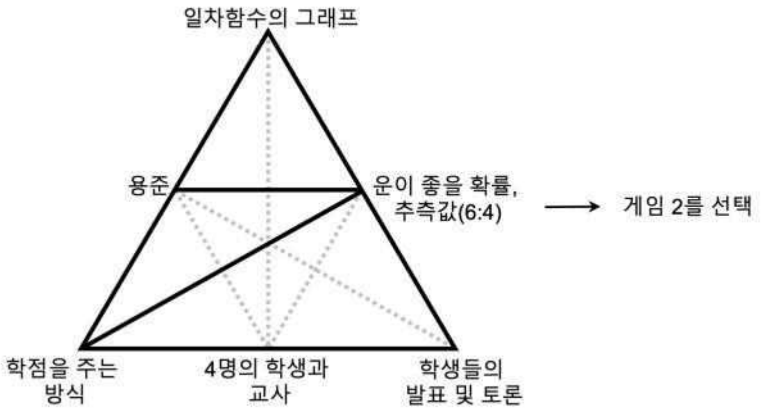
이 절에서는 편의를 위해 [표 4-3]과 같이 활동 내용별로 MCFAS-1, MCFAS-2, MCFAS-3, MCFAS-4로 표기하고, 제 1 절에서 정의한 MCFAS의 개념적 틀에 기반한 분석 방법을 통해 활동 내용별, 학습자별로 총 16개의 중심 MCFAS를 분석하였다.

1. 기댓값 개념 형성을 목표로 하는 활동

1.1 게임을 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS-1

(1) 용준이의 MCFAS-1

용준이의 첫 번째 최소단위 중심 MCFAS의 목표는 '추측값(6:4)'이라는 객체로써 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 결과물을 도출하는 것이다. 용준이는 게임 2를 선택하였고, 이를 정당화하기 위해 일차함수의 그래프를 활용하였다. 용준이가 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 다음과 같다.



[그림 4-4] 용준이가 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

용준이는 게임 1과 게임 2의 일차함수를 각각 ‘$y=3x-10$’, ‘$y=199x-990$’ (x=앞면이 나오는 횟수)로 정의하고, 그래프를 통해 ‘성적분포의 범위’를 y축의 범위로 시각화하고, 게임 2가 게임 1과 비교해 범위가 더 넓다는 방법을 통해 ‘A를 받을 확률’이 더 높다는 결과물을 도출하는 도구-생산 활동을 하였다.

‘운’은 네 학생 모두 최초 생성한 객체이지만, 용준이는 특히 게임을 선택한 이유에 정의적 요인이 높은 비중을 차지하였다. 운을 결정 짓는 요인 즉, ‘(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=6:4 이상’이 나올 수 있는 요인을 ‘경험’, ‘책임감’, ‘확신’, ‘컨디션’, ‘자기 믿음’, ‘침착함’ 등의 정의적 요인을 들어 정당화하였으며, ‘D 학점을 받으면 기분이 나쁘다’는 정의적 요인도 게임 2를 선택한 이유에 해당되었다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

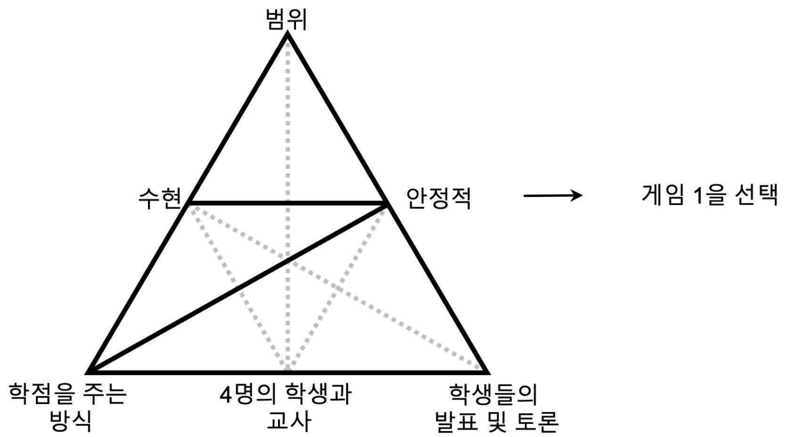
게임에 영향을 주는 요인을 통제(가정)하고 수학적으로 정당화하는 2번 문항에서 용준이는 자신이 선택한 게임이 유리하도록 통제하는 방식을 제시하였다. 운이 결과를 가르는 상황을 많이 ‘경험’한 사람이 동전을 던지거나, ‘뒷면 무게를 더 나가게’ 하여 앞면이 더 많이 나오도록 운을 통제함으로써 ‘추측값(6:4)’를 정당화하였다.

용준이가 게임 2를 선택한 맥락은 A학점을 받기 위한 욕구로부터 온다. 용준이는 이러한 욕구에 기인하여 그래프의 기울기를 도구로 하여 ‘운이 좋을 확률’이라는 객체를 생성시켰으며, 이는 더욱 세분화되어 ‘운이 엄청 좋다’, ‘운이 평균이다’, ‘운이 좋다’와 같이 다소 편향적인 객체를 생성시킨다. 이 객체는 바로 도구로 작용하여 ‘두 게임의 그래프의 기울기를 비교’하는 객체의 생성을 통해 x값이 5에서 6으로 바뀌는 특정 예를 중심으로 게임 2는 게임 1에 비해 학점을 잘 받을 수 있다고 주장했다. 이러한 맥락은 과제 마지막까지 영향을 주며 ‘(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=6:4 이상’이라는 객체를 지속적으로 생성하며 자신의 추측값을 정당화하려는 노력으로 드러난다. 용준이는 수업 초

반부터 자신의 주장에 확신을 가지고 있었고, 이를 정당화할 수 있는 방법으로 공동체 내에서 처음으로 일차함수의 그래프를 활용하였다.

(2) 수현이의 MCFAS-1

수현이의 첫 번째 최소단위 중심 MCFAS의 목표는 ‘범위’라는 객체를 도구로서 ‘안정적’이라는 객체를 생산하여 게임 1을 선택한 이유를 정당화하는 결과물을 도출하는 것이다. 수현이는 게임 1을 선택하였고, 이를 정당화하기 위해 게임 1과 게임 2에서 받을 수 있는 학점의 범위를 계산하여 제시하였다. 수현이가 게임 1을 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 다음과 같다.



[그림 4-5] 수현이가 게임 1을 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

게임 1과 게임 2의 범위를 각각 ‘$\begin{cases} \text{최고}: 20 \\ \text{최저}: -10 \end{cases}$ B ~ D’, ’ , ‘$\begin{cases} \text{최고}: 1000 \\ \text{최저}: -990 \end{cases}$ A ~ E’ 라는 표현을 통해 나타내고, 게임 2는 한 번이라도 잘못 나오면 E까지 떨어질 수 있고, 게임 1은 A를 포기하더라고 B~D 안의 범위에서 더 안정적으로 성적을 받을 수 있다는 결과물을 도출하는 도구-생산 활동을 하였다.

수현이는 게임에 영향을 주는 요인으로, ‘운’, ‘동전을 던지는 강도’, ‘동전의 양’, ‘앞과 뒤의 무게 차이’, ‘체공 시간‘ 등을 들었다. 이는 용준이가 게임에 영향을 주는 요인인 운을 결정하는 요소로써 정의적 요인을 객체로 생성한 것과는 유의미한 차이를 보인다. 수현이는 대부분 물리적 요인들을 언급했다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

게임에 영향을 주는 요인을 통제(가정)하고 수학적으로 정당화하는 2번 문항에서는 물리적 요인 자체를 통제해 버리면 앞면이 나올 확률을 높일 수 있게 되고 이를 ‘긍정적 통제’라는 객체로 생성하였다.

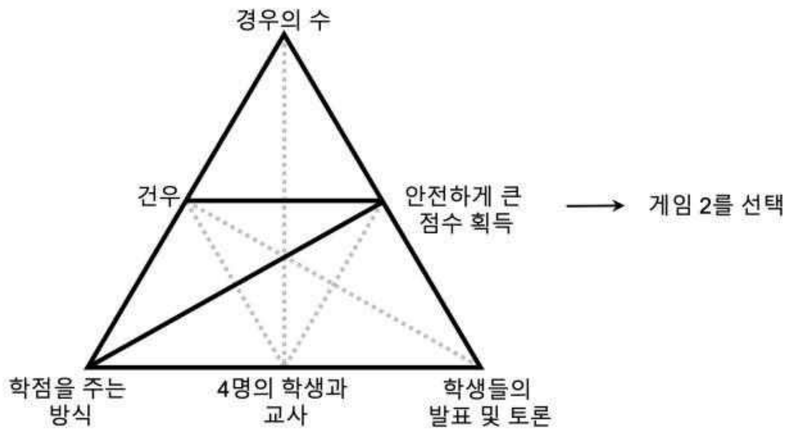
게임 1을 선택한 수현이는 ‘통제는 공평하지 않다’는 객체를 생성하며 요인을 통제하지 않고 추측하는 방향으로 ‘(앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률)=50:50’ 이라는 객체를 생성하기 시작한다. 수현이는 ‘긍정적 통제’를 하게 되면 게임 2가 유리할 수밖에 없으며 게임을 하는 의미가 없다는 주장을 지속하고, 이후에도 지속적으로 ‘(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5’가 타당하다는 주장을 한다.

(3) 건우의 MCFAS-1

건우의 첫 번째 최소단위 중심 MCFAS의 목표는 ‘앞면이 5회 이상 나오는 경우의 수’를 도구로서 ‘안전하게 큰 점수를 획득’ 할 수 있는 게임이 게임 2임을 정당화하는 결과물을 도출하는 것이다. 건우는 게임 2를 선택하였고, 이를 정당화하기 위해 앞면이 5회 이상 나오는 모든 경우의 수를 도구로 사용하였다. 건우가 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 다음과 같다.

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

게임 1과 게임 2에서 앞면이 5회 이상 나오는 모든 경우의 수를 계산하고 이를 도구로서 게임 1은 ‘기본 C’, ‘운이 좋으면 B’, 게임 2는 ‘최소 C’, ‘6번 이상 무조건 A’라는 객체의 생성을 통해 게임 2에 대한 선택을 정당화하였다.



[그림 4-6] 건우가 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS

건우는 1번 문항에서 게임에 영향을 주는 요인으로, '안전성', '운'을 들었다. 게임이 얼마나 안전하다고 생각하는지가 게임에 영향을 줄 수 있다고 대답했는데, 이후의 발화와 활동지를 통해 건우가 생성하는 '안전성'이라는 객체는 너무 낮은 점수를 받지 않을 수 있다는 의미와, 높은 점수를 더욱 높은 확률로 획득할 수 있다는 의미가 혼재되어 있다는 것을 알 수 있다.

Leading Question에 대한 발화

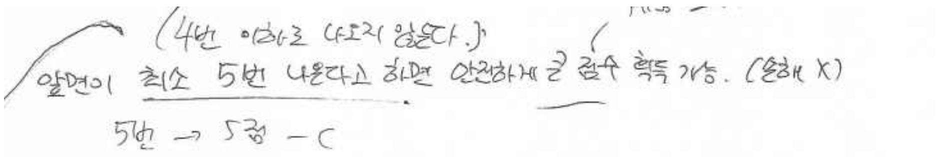
동혁 : 게임 2 같은 경우는 더 낮게 나오는 경우도 있으니까 게임 1이 좀 느낌이 좀... 더 안정적인 것 같아요.

교사 : 그래요. 그러면 건우는 왜 게임 2를 선택했는지 한번 이야기해 볼까요?

건우 : 게임 1이 안전하기도 하고 한데, 다 앞면이 나온다고 해봤자 A를 받는 것도 아니고, 반반 나온다고 해도 게임 1과 게임 2가 (점수가) 같기도 하고..., 근데 그렇게 할거면 그냥 운이 좋을 수도 있으니까 한 번만 더 앞면이 나와도 게임 2가 더 좋죠.

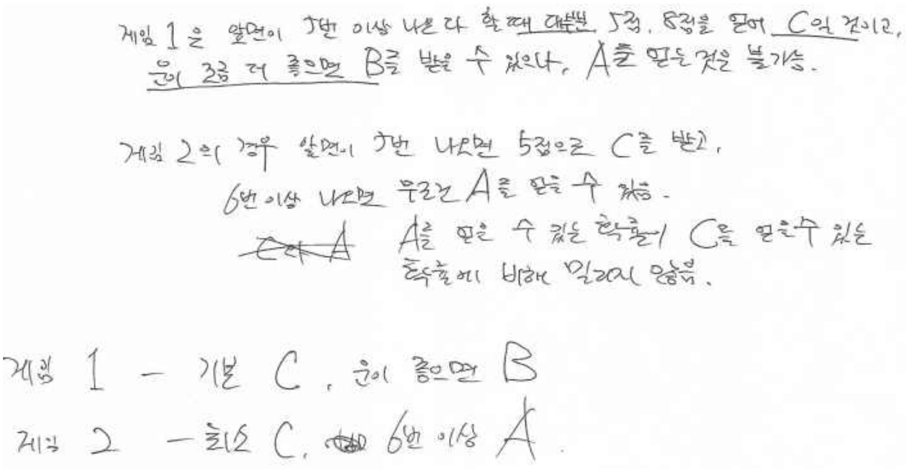
이후 문제를 해결하는 과정에서 건우는 자신만의 모델을 완성하고 이

2번 문항에 대한 건우의 활동지


(4번 이하로 나오지 않는다.)
앞면이 최소 5번 나온다고 하면 안전하게 그 점수 획득 가능. (손해 X)
5번 → 5점 – C

를 도구로서 게임 2를 선택한 이유를 정당화하는 과정을 통해 게임 2가 안전하지 못하다는 즉, 높은 점수를 더욱 높은 확률로 획득할 수 있는 반면, 낮은 점수를 더욱 높은 확률로 받을 수 있다는 가능성을 인지한다.

3번 문항에 대한 건우의 활동지


게임 1은 앞면이 5번 이상 나온다 할 때 대부분 5점, 8점을 얻어 C일 것이고, 운이 조금 더 좋으면 B를 받을 수 있으나, A를 얻는 것은 불가능.

게임 2의 경우 앞면이 5번 나오면 5점으로 C를 받고, 6번 이상 나오면 무조건 A를 얻을 수 있음.
~~C A~~ A를 얻을 수 있는 확률이 C를 얻을 수 있는 확률에 비해 밀리지 않음.

게임 1 – 기본 C, 운이 좋으면 B
게임 2 – 최소 C, 6번 이상 A.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

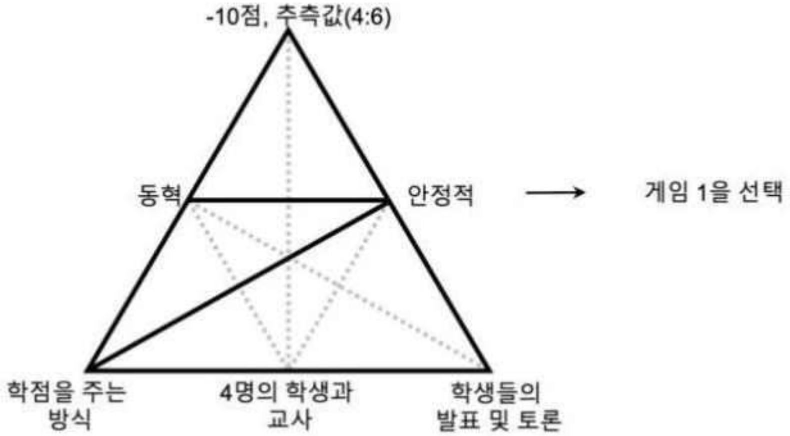
건우는 앞면이 최소 5 이상 나오는 방법으로 게임을 통제(가정)하였다. 이렇게 게임을 통제하게 되면 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5인 상황에서 게임 1과 게임 2가 수학적으로 같아진다는 규칙을 만들고 그 규칙 위에 운이 작용하게 되면 게임 2를 선택하는 것이 더욱 이익이 될 것이라는 규칙-생성 활동을 한다.

건우는 다른 학생들에 비해 다소 적은 양의 발화를 보였지만, 활동지를 통해 자신의 생각을 정리하였다. 건우가 게임 2를 선택한 이유는 A를 받기 위함이며, 최대 B를 받을 수 있는 게임 1은 게임에 대한 의미가

없다고 보았다.

(4) 동혁이의 MCFAS-1

동혁이의 첫 번째 최소단위 중심 MCFAS의 목표는 '−10점', '추측값(4:6)'이라는 도구로서 게임 1을 선택한 이유가 '안정적'이라는 객체를 생성한 이유를 정당화하는 결과물을 도출하는 것이었다. 동혁이가 게임 1을 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 다음과 같다.



[그림 4-7] 동혁이가 게임 1을 선택한 이유를 정당화하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

동혁이는 '−10점'을 기준으로, 게임 1은 뒷면이 많이 나와도 더 낮아지지 않으며, 게임 2는 더 낮아질 수 있다는 도구-생산 활동을 하였다. −10점은 게임 1을 선택했을 경우 얻을 수 있는 가장 낮은 점수이자, 게임 1은 D학점을 게임 2는 E학점을 받는 점수이다. 게임 1을 선택한 이유가 '안정적'이라는 같은 객체를 생성한 수현이가 범위를 이용해 정당화한 것과 비교해 동혁이는 가장 낮은 점수가 나올 특정 경우만을 제시하였다.

동혁이는 '안정적인 느낌'이라는 객체를 생성하였다. 동혁이는 도구를

통해 객체를 정당화하는 활동을 수행하지 못했다고 볼 수 있다. 하지만 게임 1을 선택한 동혁이는 2번 문항을 통해 게임의 요인을 통제할 수 있는 가능성을 제공받은 후 '어떤 게임을 고르는지'가 게임에 영향을 미친다고 응답하였다. 수현이와 마찬가지로 게임의 요인을 통제할 수 있게 되면 게임 1을 고른 이유가 무의미해지므로, 요인을 통제할 수 있게 된다면 게임 1을 선택한 이유를 정당화하기 위해 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)을 5:5로 고정하는 것이 가장 '공평한 통제'라는 객체를 생성한다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

게임에 영향을 주는 요인을 통제(가정)하고 수학적으로 정당화하는 2번 문항에서는 통제의 의미를 '(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=4:6'과 같은 특정한 경우로 만드는 것이라고 생각하였다. 동혁이는 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)를 0:10 부터 10:0까지 가정하고, 게임 1과 게임 2가 각각 얻을 수 있는 모든 경우의 점수들을 계산하였다. 도구-생산 활동과 마찬가지로 동혁이는 개인적인 기준을 제시하고, 게임 1은 2점으로 C학점을 받고, 게임 2는 −194점으로 E학점을 받는 경우 게임 1이 가장 '유리하도록 통제'할 수 있다고 주장한다.

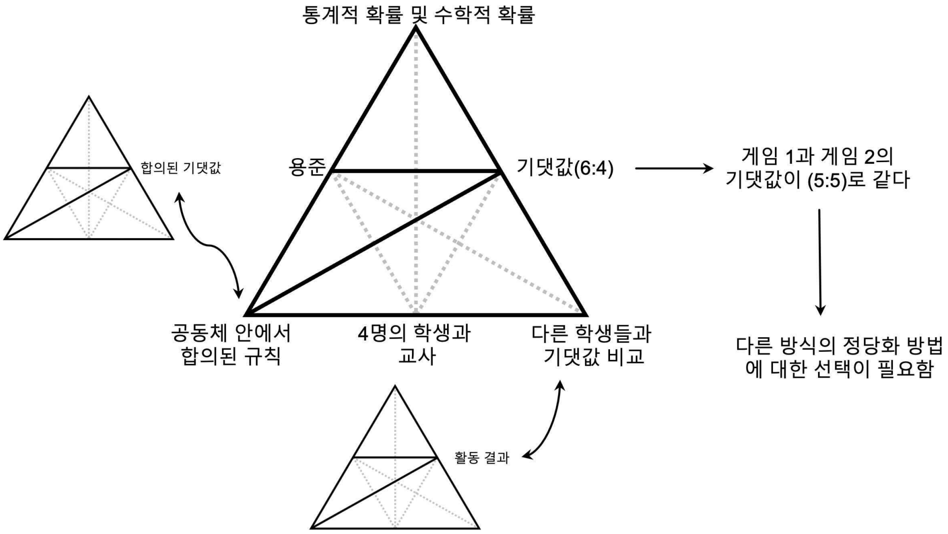
동혁이는 2번 문항을 통해 '(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5'가 가장 '공평한 통제'임을 주장했지만, 통제의 의미를 자신이 선택한 게임을 정당화하는 것이라고 생각하여 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=4:6이 개인적인 기준에 의한 '유리한 통제'임을 주장하고 기댓값을 합의하는 과정에서도 지속적으로 4:6의 특정한 상황이 기댓값으로 타당하다고 보았다.

1.2 기댓값을 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS-2

학생들은 자신이 선택한 게임에 유리한 추측 값을 찾고, 게임을 선택한 이유를 정당화하지만 가장 적절한 추측 값을 기댓값으로 정의하고 이를 단어 또는 수학적 기호로 나타내는 과정을 통해 기댓값의 개념을 형성한다. 이후 기댓값을 도출하는 활동은 학생들의 상호작용을 통한 합의의 과정이므로, 객체의 추적을 통해 관찰하는 방법이 더욱 효과적이다. 학생들은 자신이 선택한 게임에 대한 정당화를 지속하지만 교사의 '운을 통제할 수 있을까?'라는 개입을 통해 자신의 주장에 모순을 겪게 됨으로써 새로운 국면을 맞이하게 된다. 네 명의 학생들은 수많은 객체들을 생성시키는 과정을 통해 공동체 안에서 두 게임의 기댓값이 모두 5점임에 합의하며, 교사는 모든 수업 상황에서 도출된 기댓값에 관하여는 일체의 개입을 하지 않았다. 모든 학생들의 최소단위 중심 MCFAS의 목표는 '기댓값(5:5)'라는 객체를 생성하고 기댓값의 개념을 형성하고 '게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다'라는 결과물을 도출하고 자신이 선택한 게임에 대한 정당화를 위해 다른 방식의 방법을 선택할 필요성을 인지하는 것이다.

(1) 용준이의 MCFAS-2

용준이는 기댓값을 자신의 기댓값을 도출하고 합의하는 과정에서 확률적 통계의 의미를 담은 다양한 객체를 생성하면서 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결과물을 도출했다. 용준이가 기댓값이 '(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5'로 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 [그림 4-8]과 같다.



[그림 4-8] 용준이가 기댓값을 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS

① 도구-생산 활동

용준이는 기하학적 풀이를 통해 기댓값을 수학적으로 나타내었다. 추측 값을 도출하기 위해 생성했던 두 객체 '$y=3x-10$', '$y=199x-990$' 를 통해 '두 함수가 만나는 지점이 (5,5)'라는 객체를 통해 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하였다.

또한 기댓값을 합의하는 과정에서 생물 교과의 우성과 열성 유전 현상을 매개체로 끌어 들여와 '생물의 유전이 3:1'인 것과 같이 '셀 수 없이 많이 던졌을 경우'를 이야기하지만 이는 기댓값을 바르게 도출하기 위한 목적보다는 단지 통계적 확률의 도구를 활용한 활동으로 볼 수 있다. 하지만 용준이의 이런 활동은 교과의 경계를 이동하는 활동이라는 의미를 가진다.

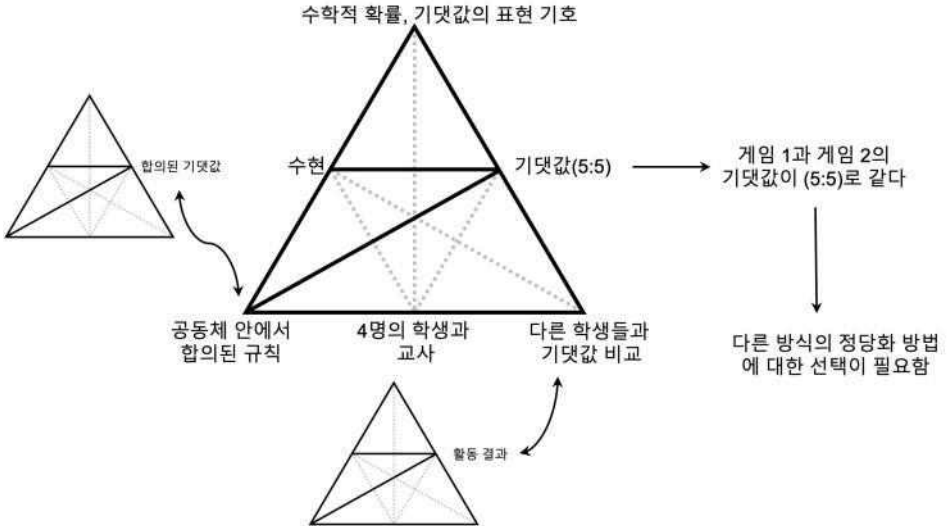
② 객체 활동 및 맥락

용준이는 초반 '추측값(6:4)'라는 객체를 지속적으로 생성하면서, 건우의 추측 값이 '(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=6:4'라는 이유를 들어 '6:4 가 다수'라는 주장을 지속해 나간다. 하지만 다른 학생

들의 기댓값과 비교하고 합의하는 분업을 통해 '생물의 유전이 3:1', '1000번 던질 경우', '셀 수 없이 많이 던졌을 경우' 등의 수업 밖으로부터의 객체를 생성하며 통계적 확률의 개념을 형성해나갔고, 자신의 수학적 표현을 정교화해 나가며 공동체 안에서 합의된 규칙을 따라 '게임 1과 게임 2의 기댓값은 모두 5'라는 결과에 도달한다.

(2) 수현이의 MCFAS-2

수현이는 기댓값을 자신의 기댓값을 도출하고 합의하는 과정에서 모든 경우의 수를 고려하여 기댓값을 표현하기 위해 다양한 기호와 표현 방법을 생성하는 과정을 통해 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결과물 도출했다. 수현이가 기댓값이 '(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)＝5:5'로 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS를 주변 MCFAS 통해 더 자세히 분석해 보면 [그림 4-9]와 같다.



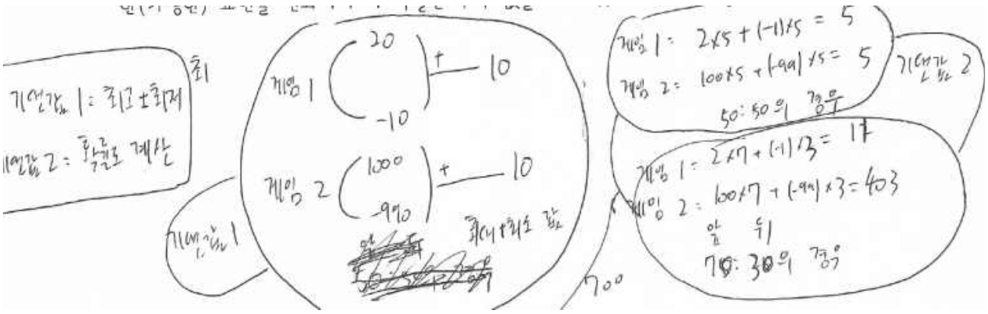
[그림 4-9] 수현이가 기댓값을 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

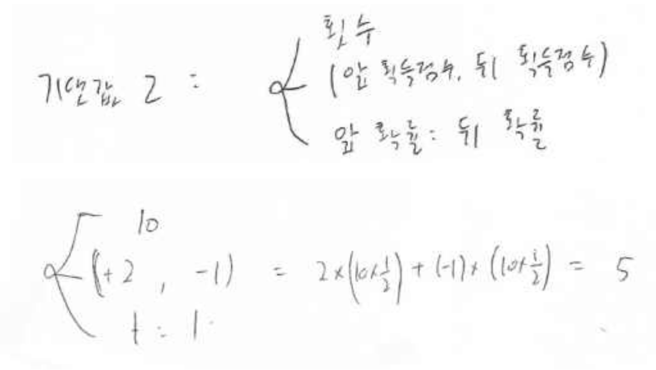
수현이는 기댓값을 자신만의 기호 및 수학적 확률 통해 두 가지 방식으로 표현하였다. 첫 번째 방식은 MCFAS-1의 결과를 도구로 하여 '최고점과 최저점의 합'을 통해 두 게임 모두 기댓값이 '10'이라는 객체를 생성하는 방식으로, '$20+(-10)=10$', '$1000+(-990)=10$'과 같은 풀이를 통해 나타내었다. 두 번째 방식은 '수학적 확률' 식을 도구로 하여, (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 50 : 50, (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률)=70 : 30과 같은 경우의 수를 '$2\times5+(-1)\times5=5$', '$100\times5+(-99)\times5=5$', '$2\times7+(-1)\times3=11$', '$100\times5+(-99)\times5=5$'와 같은 풀이를 통해 나타내었다.

수현이가 기댓값을 표현한 두 가지 방식은 모두 경우의 수를 활용한 것이다. 활동지 1을 보면, 기댓값 1은 (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 100 : 0, (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 0 : 100의 두 경우의 수의 합을 나타낸 것이며, 기댓값 2는 (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 50 : 50, (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 70 : 30의 경우의 수를 나타낸 것이다. 이후 수현이는 모든 경우의 수에 대하여 기댓값을 표현할 수 있는 자신만의 단어 또는 수학적 기호를 통해 기댓값 2를 활동지 2와 같이 표현하였다. 수현이는 기댓값을 구하는 과정으로부터 모든 경우의 수의 기댓값을 표현하는 방식에 이르기까지 활동을 모두 포함하는 도구-생산 활동을 하였다.

4번 문항에 대한 수현이의 활동지 1



4번 문항에 대한 수현이의 활동지 2



② 규칙-생산 활동 및 맥락

수현이는 기댓값을 두 가지 방식으로 표현했는데, 기댓값 1은 아무런 요인도 통제하지 않았을 때 즉, (앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률) = 50 : 50인 경우라고 보았고, 기댓값 2는 확률을 통제하는 경우라고 보았다. 또한 기댓값 1을 표현하기 위해 '최고±최저'라는 도구를 통해, '최고점+최저점=10'이라는 객체를 생성하여 기댓값을 바르게 정의하지는 못하였지만, 이후 두 게임의 차이를 고려하는 모델을 도출할 수 있는 객체를 생성할 수 있었다.

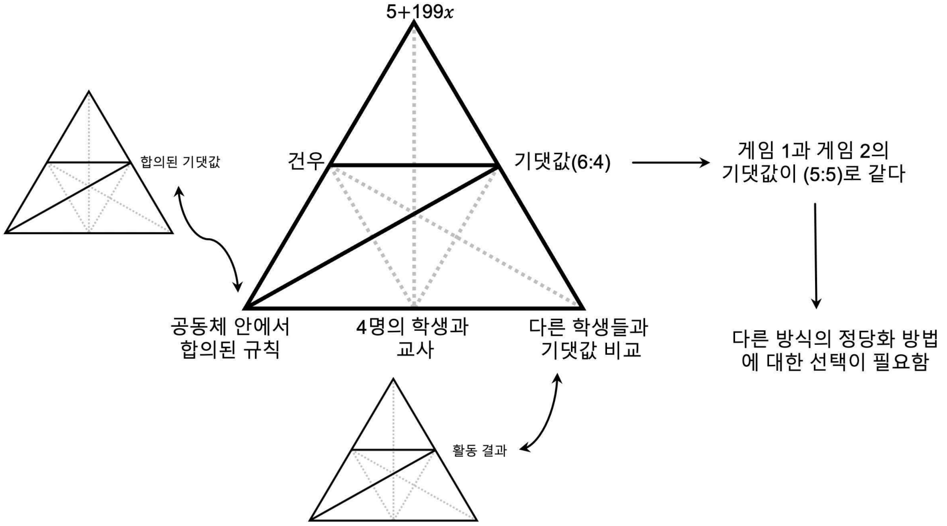
(3) 건우의 MCFAS-2

건우는 4번 문항에서 요구하는 단어나 수학적 기호를 통해 기댓값을 정의해 보는 도구-생산 활동을 수행하지 못하였으며, 5번 문항을 통해 공동체 안에서 합의된 규칙에 의해 기댓값이 5:5라는 객체를 생성하고, 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하였다.

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

건우는 단어나 수학적 기호를 통해 기댓값을 정의하는 활동을 수행하지 못하였다. 앞면이 항상 5회 이상 나온다고 가정하고 5회가 나올 경우는 게임 1과 게임 2의 결과가 같으므로, '추측 값(6 : 4)'라는 객체를 생성

하였다. 앞면이 최소 5회 이상 나올 경우를 수학적 기호로 나타내기 위해 $5+199x$, 2^5등의 식을 세웠지만, 유의미한 도구-생산 활동을 수행하지 못하였다.



[그림 4-10] 건우가 기댓값을 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS

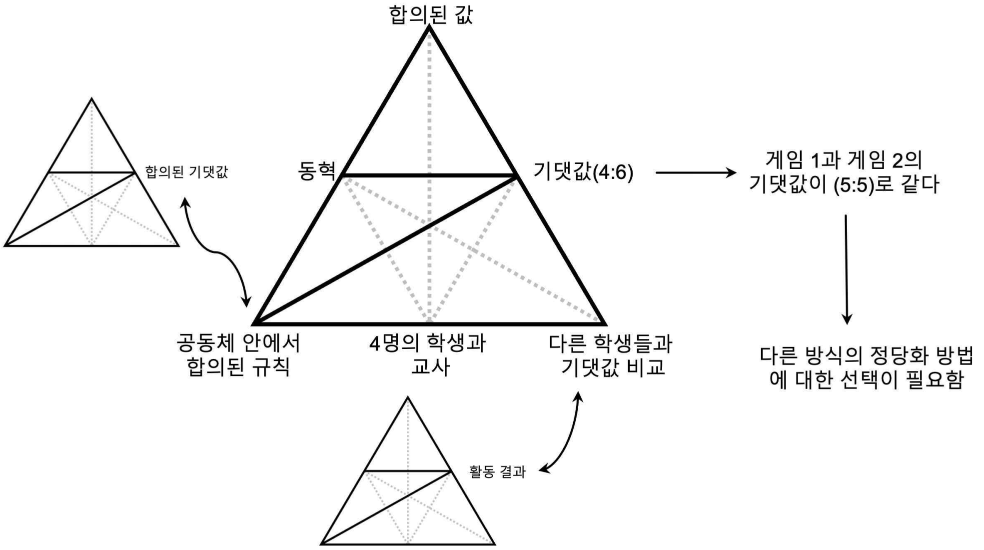
② 규칙-생산 활동 및 맥락

건우는 (앞면이 나온 횟수) : (뒷면이 나온 횟수)=5:5인 경우는 두 게임이 모두 5점이므로, 조금만 운이 좋더라도 게임 2가 높은 점수를 받기에 유리하다고 주장한다. 건우의 추측 값은 (6:4)이며 추측 값을 기댓값이라는 용어로 정의하고 수학적 기호로 나타내는 문항에서 도구-생산 활동은 수행하지 못하였지만, '5점을 주고 5번 던지기', '앞면이 5번 나오지 않았을 때 다시 던지기' 등의 객체를 통해 규칙-생산 활동을 하였다.

(4) 동혁이의 MCFAS-2

동혁이도 건우와 같이 4번 문항에서 요구하는 단어나 수학적 기호를 통해 기댓값을 정의해 보는 도구-생산 활동을 수행하지 못하였으며, 5번 문항을 통해 공동체 안에서 합의된 규칙에 의해 기댓값이 5:5라는 객체

를 생성하고, 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하였다.



[그림 4-11] 동혁이가 기댓값을 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

동혁이는 단어나 수학적 기호를 통해 기댓값을 정의하는 활동을 수행하지 못하였으며, 자신의 '기댓값(4:6)'과 활동 결과 값의 차이가 가장 작기 때문에 (앞면이 나온 횟수) : (뒷면이 나온 횟수) =4:6이 보편적으로 타당한 기댓값임을 주장한다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

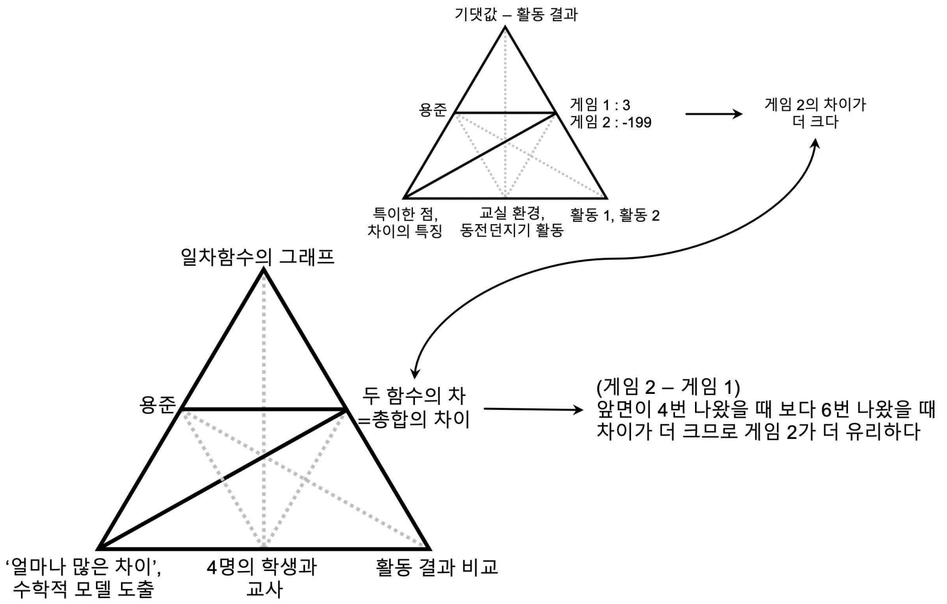
동혁이는 기댓값이 4:6이라는 주장을 지속적으로 이어나가며, 동전던지기 활동 이후에는 자신의 기댓값과 활동 결과이 비슷한 결괏값을 나타내게 되어 주장이 더욱 강화되었다. 다른 학생들과 기댓값을 합의하는 과정을 통하여 공동체에서 합의된 규칙에 의해 기댓값을 5:5라고 답했지만, 이후 표준편차의 모델을 도출하는 활동에서도 여전히 기댓값이 4:6, 즉 게임 1이 유리한 상황을 정당화하기 위해 노력하였다.

2. 표준편차 개념 형성을 목표로 하는 활동

2.1 두 게임의 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 MCFAS-3

수현이를 제외한 세 명의 학생들은 기댓값을 단어나 수학적 기호로 표현하는 활동 이후에도 게임 1과 게임 2의 기댓값이 모두 5로 같다는 결론에 도달하지 못하였다. 학생들은 활동 1과 활동 2를 통해 직접 동전을 던져보고, 자신의 기댓값과 활동 결과 값을 비교해 보고, 친구들의 결과와 비교하고 합의하는 과정을 거치면서 최종적으로 두 게임의 기댓값이 같다는 결과에 도달하였다. 또한 게임 1에 비해 게임 2에서 기댓값과 활동 결과 값의 차이가 더 크다는 힌트를 얻게 된다.

(1) 용준이의 MCFAS-3

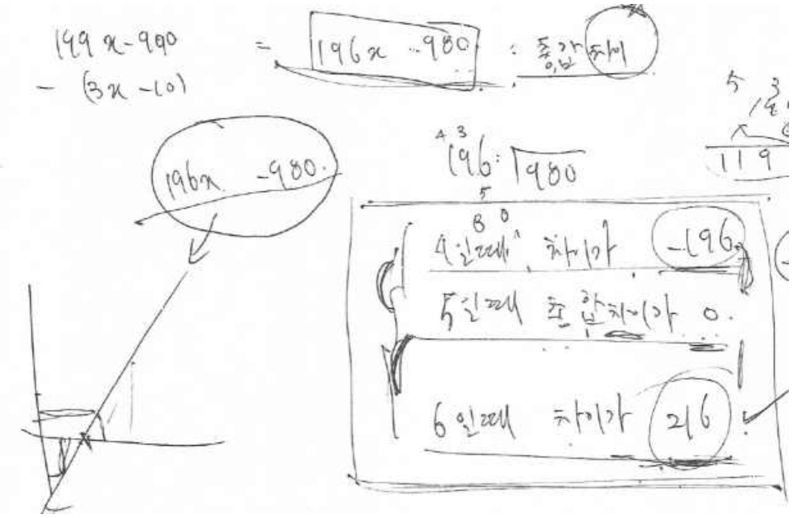


[그림 4-12] 용준이가 두 게임의 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

용준이는 두 게임의 일차함수의 그래프 $y=3x-10$, $y=199x-990$의 차인 ‘$y=196x-980$’의 그래프가 ‘차이의 평균값’을 나타내며 ‘총합의 차이’라는 객체를 생성하였다. 이후 용준이는 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5의 경우 총합의 차이가 0이며, (앞면이 나오는 횟수 : 뒷면이 나오는 횟수)=4:6의 경우 총합의 차이는 -196, 앞면이 나오는 횟수 : 뒷면이 나오는 횟수)=6:4의 경우 총합의 차이가 216이라는 계산결과를 도구로, 총합의 차이가 클 경우 즉, 점수의 분포가 클 경우 그 점수 안에 있을 확률이 크다는 이유로 앞면이 더 많이 나올 확률이 크다는 잘못된 결과물을 도출하게 된다.

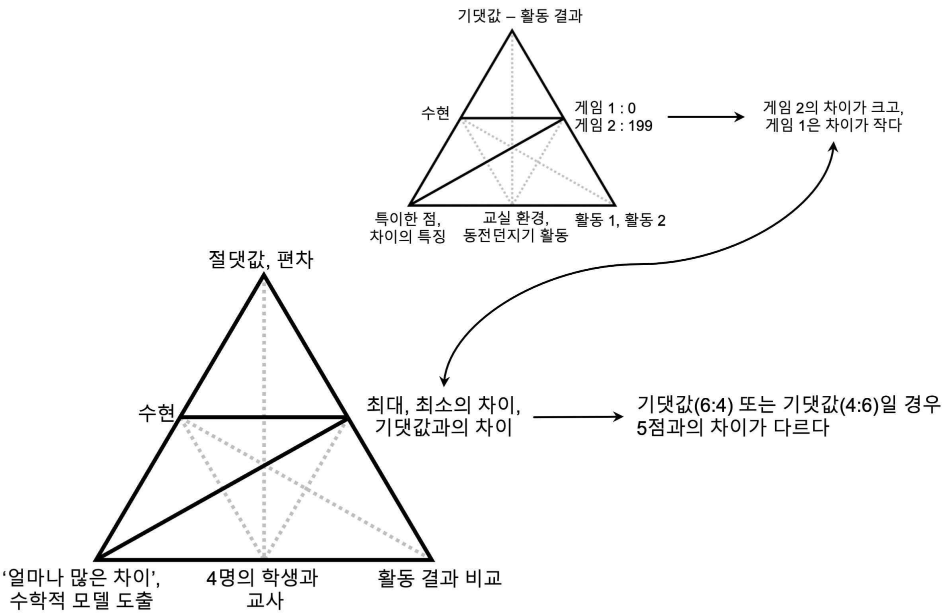
6번 문항에 대한 용준이의 활동지



② 규칙-생산 활동 및 맥락

6번 문항에서 용준이가 잘못된 설명에 이르게 된 이유는 용준이의 ‘A를 받을 확률’, ‘운이 좋을 확률’이라는 객체와 함께 게임 2가 A를 받기에 더 유리한 게임이라는 이유를 정당화하기 위한 맥락에서 기인한 결과물이다.

(2) 수현이의 MCFAS-3



[그림 4-13] 수현이가 두 게임의 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 MCFAS

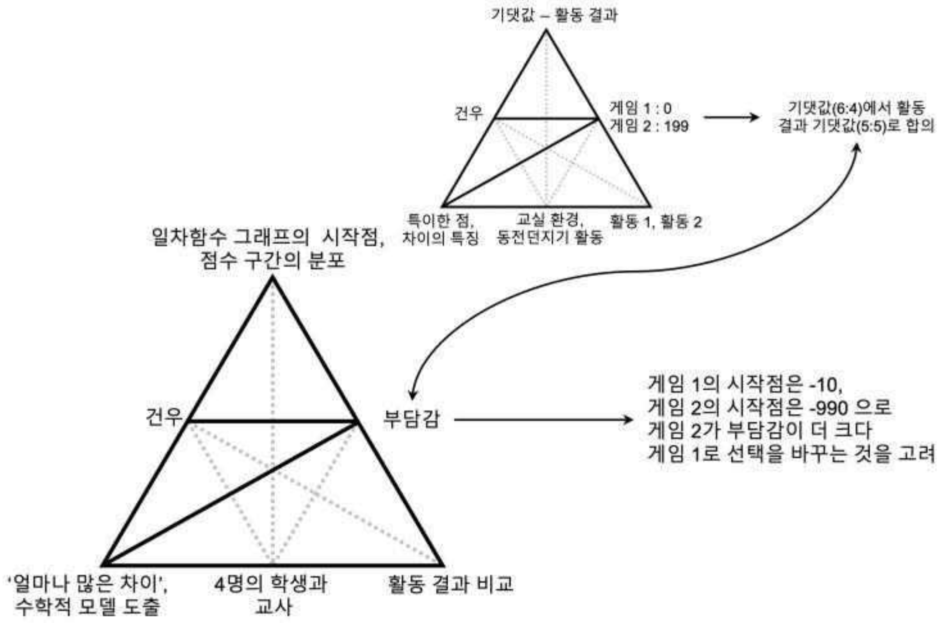
① 도구-생산 활동 및 객체 활동

수현이는 절댓값과 편차의 개념을 '최댓값과 최솟값의 차이', '기댓값과의 차이'라는 객체를 생성하는 도구로서, (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=6:4, 또는 4:6일 경우는 총점의 기댓값이 5점인 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5일 경우와의 점수 편차가 있다라는 결과물을 도출하였다. 수현이는 편차의 도구를 최댓값과 최솟값과의 차이와 기댓값과의 차이를 구분하지 않고 사용하고 있지만, 유일하게 범위가 아닌, 기댓값과의 차이라는 객체를 생성한 학생이다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

수현이는 인터뷰를 통해 이 수업 이전에 표준편차의 개념을 이미 학습하였다고 답하였다. 하지만 기댓값을 합의하기 전까지 편차의 개념을 통해 두 게임의 차이를 설명하지는 않았으며, 기댓값을 합의한 이후에도 편차를 일반적 용어처럼 사용하며 차이의 개념과 혼용하였다.

(3) 건우의 MCFAS-3



[그림 4-14] 건우가 두 게임의 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 MCFAS

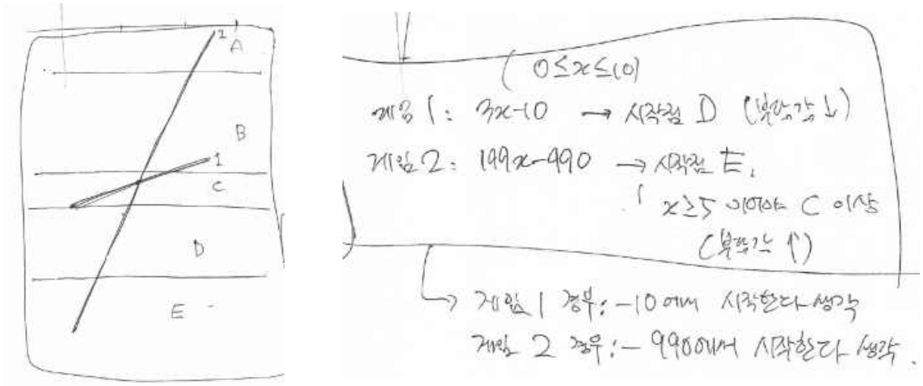
① 도구-생산 활동 및 객체 활동

건우는 2회차에서 가장 큰 변화를 보인 학생이다. 게임 2를 선택했지만, 게임 1과 게임 2의 총점에 관한 일차함수의 그래프를 한 좌표평면 위에 그려보는 도구-생산 활동을 통해서 게임 2의 그래프의 기울기가 매우 가파르다는 것을 확인하게 되었고, 게임 2를 선택하는 것이 게임 1를 선택하는 것에 비해 더 큰 부담감이 있다는 객체를 생성하였다. 5점 이상의 점수만을 고려하던 1회차와 비교하여, 각 게임의 최저점을 '시작점'이라는 객체를 통해 게임 2의 시작점이 −990으로 게임 1의 시작점인 −10에 비해 매우 낮다는 결과물을 도출하며, 게임 1으로 선택을 바꾸는 것을 고려하였다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

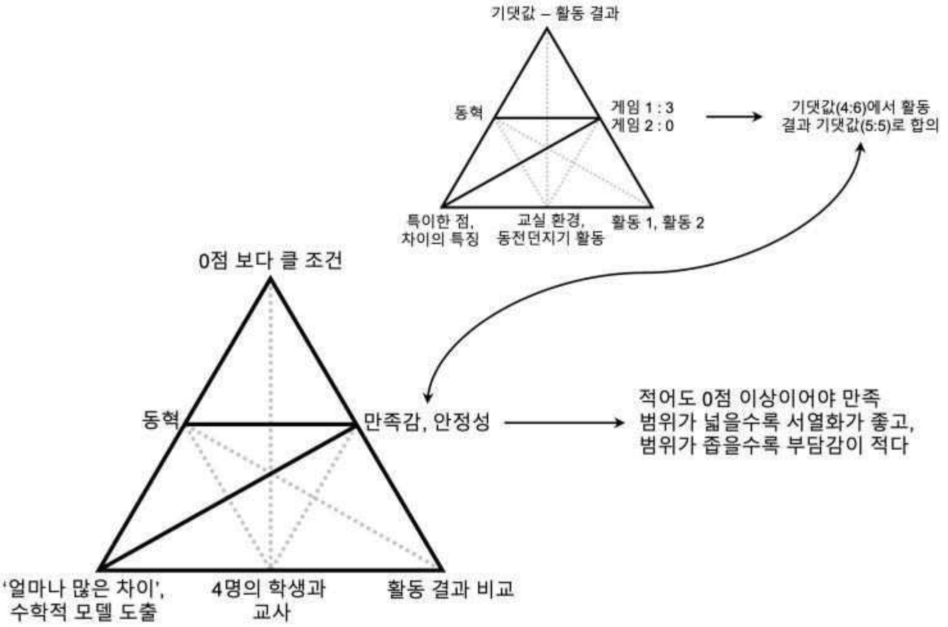
건우는 게임 2를 선택하였고, 과제 초반부터 5점 이상의 경우, 즉 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5 이상인 경우에만 초점

6번 문항에 대한 건우의 활동지



을 맞추어 게임 2를 선택하는 것이 더 유리하다는 정당화 과정을 거쳤다. 하지만 MCFAS-2와 같이 기댓값을 수학적으로 표현해보는 활동을 수행하지 못하였고, 이후 동전 던지기 활동 결과를 비교하고 친구들의 기댓값과 비교하는 과정을 통해 기댓값을 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5로 합의하게 되었다. 2회차에서 건우는 1회차에 생성했던 용준이의 일차함수 그래프의 객체를 활용하여 게임 1과 게임 2의 총점에 관한 일차함수 그래프를 한 좌표평면 상에 그려보는 도구-생산 활동을 수행할 수 있게 되었고, 자신의 도구를 통해 게임 2가 수학적으로 더욱 부담감이 있는 게임이라는 것을 정당화할 수 있었다. 이러한 맥락은 선택한 게임을 바꿀 것을 고려할 정도로 건우의 활동에 영향을 주었다.

(4) 동혁이의 MCFAS-3



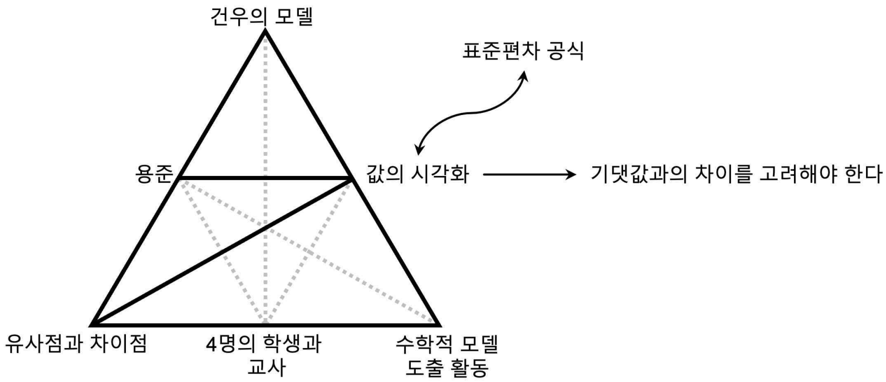
[그림 4-15] 동혁이가 두 게임의 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 MCFAS

동혁이는 게임 1을 선택하였고, 게임 1의 안정성이라는 객체를 정당화하기 위한 도구로서, 범위나 편차가 작다는 이유가 아니라 0점 보다 클 조건이라는 자신의 규칙-생산 활동을 통해 적어도 0점 이상은 되어야 만족감을 느낄 수 있다는 결과물을 도출하였다. 동혁이는 동전 던지기 활동과 기댓값을 합의하는 과정을 거쳐 결과적으로 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5로 합의하였지만, 다른 학생들과 계속 의견이 대립되었고, 완전히 동의하지 못한 것으로 보인다. 이후 두 게임의 다른 차이를 고려하고 수학적 모델을 만들어 보는 문항에서도 여전히 게임 1이 게임 2보다 더욱 안정적이라는 객체를 생성하는 데에 초점을 맞추어, 게임 1은 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=4:6이상의 경우가 0보다 크지만, 게임 2는 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=5:5이상의 경우에 0보다 크다는 두 게임의 차이를 설명하는 수학적 모델을 도출하였다.

2.2 다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 MCFAS-4

용준이와 수현이 그리고 동혁이는 모두 건우의 수학적 모델을 자신의 수학적 모델과 비교하는 활동을 통해, 유사점과 차이점을 발견하였다. 건우는 첫 번째 차시에서 기댓값을 수학적으로 표현하지 못했지만, 두 번째 차시에서 일차함수의 그래프 위에 학점의 구간을 시각화하는 모델을 통해 많은 학생의 동의를 얻는 모델을 도출할 수 있었다.

(1) 용준이의 MCFAS-4



[그림 4-16] 용준이가 다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

용준이는 건우의 모델과 자신의 모델의 유사점과 차이점을 수학적 표현을 사용하여 비교하였다. 유사점으로는 '함수를 이용해 값을 시각화'하는 방법으로 게임의 총합을 표현하였다는 점을 들었으며, 차이점으로는 건우는 '함수 자체의 기울기나 특성', '두 함수를 동일한 좌표평면' 상에 위치시키고 비교를 해서 게임 1의 한계에 대해 서술했지만, 자신은 '두 함수의 차이를 또 다른 하나의 함수로 표현'해 '앞면과 뒷면이 나오는 비율에 따라 총합의 차이가 달라지는 점을 고려'하였다고 표현하였다. 교사

의 모델과의 비교를 통해 기댓값은 상황에 따라 변화할 수 있지만 평균은 고정되어 있다는 사실을 알게 되었고, '기댓값과 평균이 같아지는 경우'가 보편적으로 타당한 기댓값이라는 결과물을 도출하였다. 또한 자신의 총합의 차이는 정규분포 곡선을 따르지 않지만 교사의 모델에서 동전을 던지는 게임은 '정규분포 곡선'을 따른다는 결과물을 도출하였다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

용준이는 두 일차함수의 그래프의 차이를 이용해 두 게임의 총합의 차를 그래프에 표현하고, (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)가 4:6인 경우 보다 6:4인 경우 총합의 차이가 더 크다는 계산 결과의 오류로 인해 자신이 선택한 게임이 더 유리하다는 주장을 더 강화하게 되었다. 하지만 건우의 모델과 자신의 모델의 차이점을 정확하게 설명하였으며, 교사의 모델과의 비교를 통해 두 게임이 모두 정규분포 곡선을 이룬다는 개념을 활용해 아래의 9번 문항에 대한 발화와 같이 또 다른 게임의 방식을 제안하기도 했다.

9번 문항에 대한 발화

용준 : FIFA 그런 것처럼 그 확률을 다 뚫으면 결국에는, 예를 들어서 앞면이 9개 나오고 뒷면이 1개 나올 확률이나 앞면이 1개 나오고 뒷면이 9개 나올 확률은 결국에는 같잖아. 근데 이 게임에서 말하는 거는 앞면이 무조건 9개 나오면 얘(앞면이 9번, 뒷면이 1번 나오는 경우를 가리키며)는 일단 무조건 게임 2로 가져갔을 때 A인데 얘(앞면이 9번, 뒷면이 1번 나오는 경우를 가리키며)는 무조건 E로 가는 거잖아. 근데 얘네 둘 결국 얘네들이 뚫은 확률은 같은 거니까 만약에 게임을 이런 식으로 하지 말고 여기 끝에 있는 애들이 더 적을수록 A를 딱 지정하면, 얘네들은 같은 환경을 뚫고 간 거니까 다 같이 A, A가 되고 A, A, B, B, C, C 이렇게 쭉 만나서(양손으로 정규분포 곡선을 그리면서) 결국에는 이 가운데 분포한 인원이 제일 많으니까 얘네가 E를 갖는 거지 만약에 이게 그냥 운으로만 되는 게임이면.

수현 : 점수로 따지는게 아니라? 근데 그렇게 생각해버리면 애들이 다 E를 안 받고 싶을 거 아니야? 근데 제일 많은 애들이 E를 받아 버리게 되는 거잖아.

용준 : 근데 어차피 A, B, C, D를 다 합쳐버리면 E보다 많을 테니까.

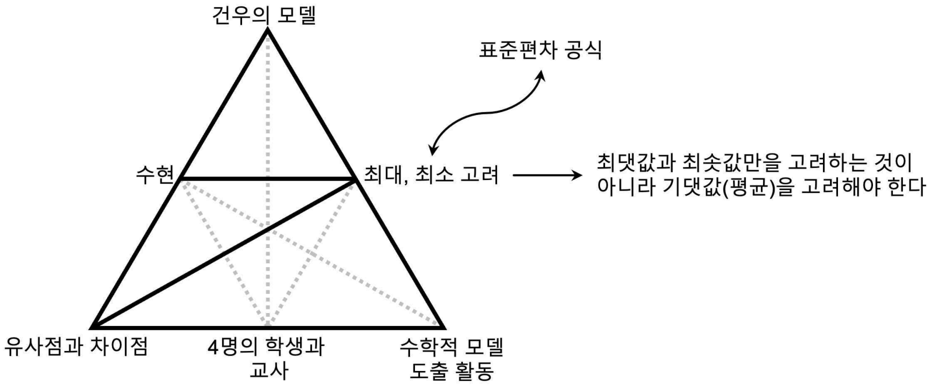
건우 : E가 확률이 더 높다고?

용준 : 여기 있으면 무조건 A란 말이야(정규분포 곡선의 우측 끝을 가리키며) 근데 여기 있으면 E라고(정규분포 곡선의 좌측 끝을 가리키며). 근데 결국 얘네 둘은 같은 확률을 뽑아서 이렇게 된 거잖아. 그니까 만약에 진짜 얘가 그냥 아예 운으로 할 거면 이렇게 게임을 세팅해서 쭉 해서 아까 이거 정규분포 이것처럼 이렇게 모아서 여기 있는 애들을 A로 주는 게 맞다 이거지.

동혁 : 점수를 따질 게 아니고 분포를 따지는 거다?

용준이는 네 명의 학생 중 유일하게 새로운 게임의 방식을 제안하였다. (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=9:1과 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=1:9의 경우 확률적으로는 같지만, 전자는 A학점을 후자는 E학점을 받는 것이 공평하지 않음을 교사가 제안한 모델과의 비교를 통해 도출하였다. 용준이의 새로운 게임에 대한 규칙-생산 활동은 이후 조건부 확률의 개념으로 확장학습을 가능하게 하는 맥락을 제공한다는 점에서 유의미한 활동이다. 네 학생 모두 인터뷰에서 가장 좋아하고 잘하는 과목을 체육으로 뽑았고, 용준이는 적절한 FIFA의 확률 예시를 통해 다른 학생들을 설득하는 과정을 거치면서 자신의 주장을 더욱 정당화할 수 있었다.

(2) 수현이의 MCFAS-4



[그림 4-17] 수현이가 다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 MCFAS

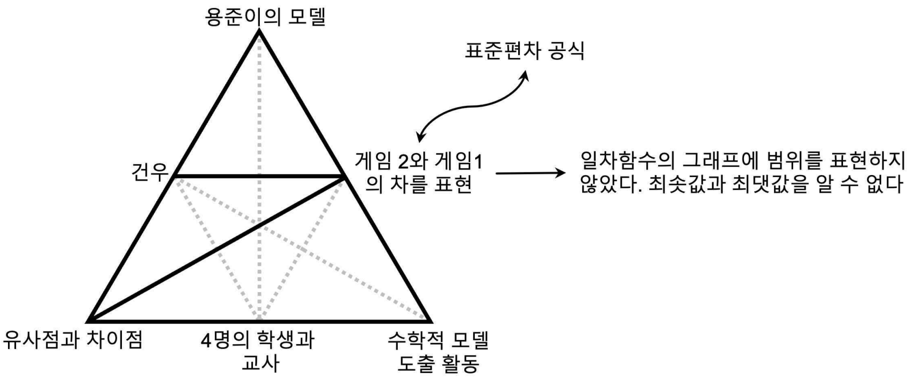
① 도구-생산 활동 및 객체 활동

수현이는 그래프로 표현된 건우의 모델을 '게임 1은 -10에서 $3a$만큼씩 더해가고, 게임 2는 -990에서 $199a$만큼씩 더해가는 모델'이라고 글로 설명하였다. 자신의 모델과의 유사점은 'a가 0, 10이 나올 경우 최대, 최소를 확인 할 수 있다'는 점을 들었으며, 차이점으로는 '그래프를 이용해 설명하였다'는 점을 들었다. 교사의 모델과의 비교를 통해 자신이 최댓값과 최솟값만을 고려하고 확률, 평균은 고려하지 않았다는 차이점을 발견하였고, 자신의 모델에 범위를 A학점에서 E학점까지 모두 나타낼 수 있도록 수정해야 한다는 결과물을 도출하였다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

수현이는 MCFAS-3을 통해 편차의 개념을 도구로서 자신의 모델을 수학적으로 표현하는 결과물을 도출하였다. 하지만 수현이가 편차의 개념을 차이의 개념과 혼용하여 사용하였다는 것을 MCFAS-4를 통해 명확히 알 수 있다. 수현이는 자신의 모델에 각 변량과 편차를 고려하지 않았다고 답했고, 교사의 모델과의 비교를 통해 편차의 개념을 올바르게 형성할 수 있게 되었다고 볼 수 있다.

(3) 건우의 MCFAS-4



[그림 4-18] 건우가 다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 MCFAS

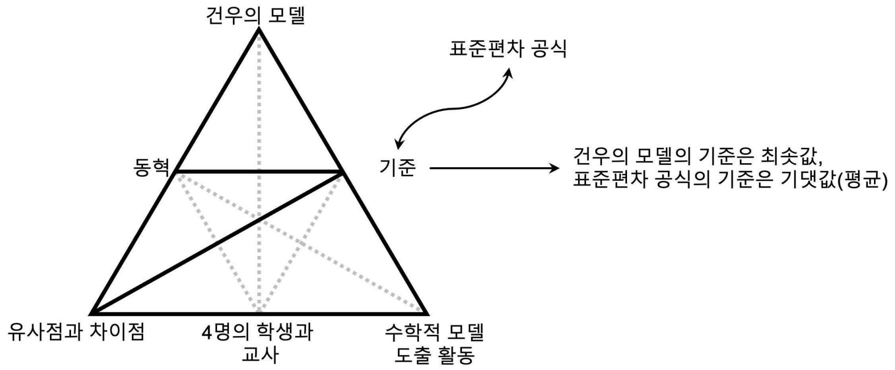
① 도구-생산 활동 및 객체 활동

건우는 자신과 같이 일차함수의 그래프를 수학적 모델을 도출한 용준이의 모델을 도구로 하여 자신의 모델과의 유사점과 차이점을 설명하였다. 유사점으로는 '어느 정도의 점수가 나올 수 있는지를 그래프로 표현' 했다는 점을 들었고, 차이점으로는 용준이의 그래프는 '게임 1과 게임 2의 각각의 범위를 나타내지 않았기 때문에 최솟값과 최댓값을 알 수가 없다'는 점을 들었다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

건우는 일차함수의 그래프를 도구로서 수학적 모델을 도출했고, 다른 학생들은 모두 건우의 수학적 모델과 자신의 모델을 비교하였다. 건우는 용준이의 그래프에는 최솟값과 최댓값이 표현되어 있지 않다는 점을 들어 차이점을 설명했는데, 이는 MCFAS-3에서 건우가 자신의 모델을 통해 최솟값의 차이가 크다는 것을 통해 선택을 바꿀 만큼 의미 있는 발견이었기 때문인 것으로 보인다. 하지만 1회차에는 5점 이상의 경우에 초점을 맞추었고, 2회차에는 시작점이라는 객체로 표현된 최솟값에 초점이 맞추어져, 기댓값을 중심으로 두 게임의 차이를 설명하지 못하였고, 교사의 표준편차 모델과 비교하는 활동 또한 수행하지 못하였다.

(4) 동혁이의 MCFAS-4



[그림 4-19] 동혁이가 다른 학생 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 MCFAS

① 도구-생산 활동 및 객체 활동

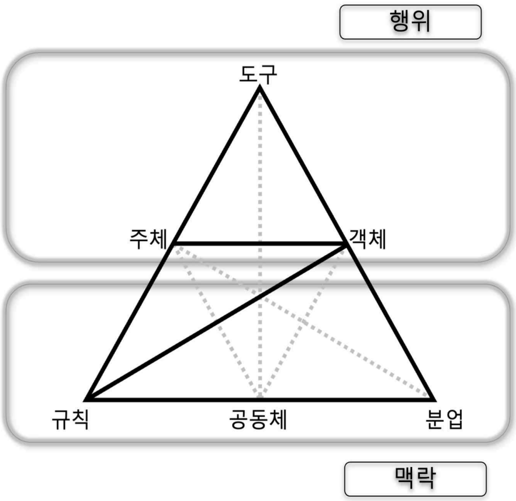
동혁이는 건우의 모델을 도구로 하여 ‘기준’이라는 객체를 생성함으로 자신의 모델과의 유사점 및 차이점을 설명하였다. 유사점으로는 ‘점수에 큰 차이가 있는지 고려’했다는 점과 ‘게임 1을 선택’하였다는 점을 들었으며, 차이점으로는 ‘기준을 다르게 설정’하였다는 점을 들었다. 교사의 표준편차 모델과의 비교를 통해서는 자신이 0을 기준으로 모델을 도출한 것과 비교하여 ‘누구나 인정할만한 기준이 필요’하다는 결과물을 도출하였다.

② 규칙-생산 활동 및 맥락

동혁이는 다른 학생들과의 모델 및 교사의 모델과의 비교를 통해서도 자신이 세운 기준인 0점 보다 클 확률에 대한 입장을 고수하였는데, 이는 동혁이가 게임 1을 선택한 이유를 정당화하려는 강한 동기를 가지고 있기 때문이다. 동혁이는 MCFAS-3에서와 같이 기댓값을 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=4:6으로 지속적으로 주장하고, 교사의 모델은 평균이라는 고정적인 기댓값으로 모델을 도출했다는 차이점을 들었다. 이는 기댓값이 상황에 따라 변할 수 있다는 것을 전제한 주장이지만, 동혁이의 모델 역시 기댓값을 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)=4:6에서 0:10사이로 고정하고 있는 것이다.

제 3 절 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위 및 맥락을 통한 수업 분석

학생들은 학습 활동에 참여하기 위해 자신의 도구와 객체를 생성하고, 다른 주체가 생성하는 도구와 객체, 그리고 다른 주체와의 사회적 상호작용을 통해 도구의 사용과 객체의 생성에 있어 점점 능숙해진다. 초반에 생성했던 기호나 수학적 표현은 상호작용을 통해 점점 정교화되고, 개인은 이를 변형하는 데에 능숙해진다. 제 2 장에서 이론적 논의를 통해 '수학 개념 형성 과정'을 '주체의 변환 과정'으로 보는 것이 적절하다는 것을 보였다. 이 절은 앞선 제 2 절의 상세한 분석을 바탕으로, 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에 초점을 맞춘 주체의 수학적 도구 사용이 능숙해지는 과정과, MCFAS의 맥락의 영역에 초점을 맞춘 주체 간 상호작용을 통해 수학 개념을 합의하는 과정을 통한 주체의 수학 개념 형성 과정이 어떠한지 분석해 보고자 한다.



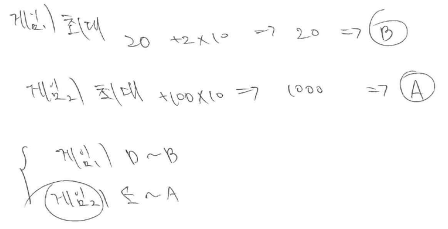
[그림 4-20] MCFAS의 행위 및 맥락

1. 주체의 행위 영역에서의 수학 개념 형성

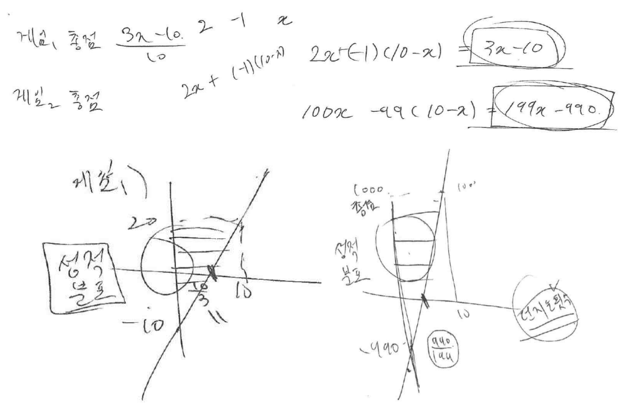
1.1 용준이의 행위 영역에서의 개념 형성

용준이는 수학 및 타 교과의 성적이 매우 우수한 학생이다. 자신의 생각을 말이나 수학적 표현을 통해 드러내는 데에 큰 어려움이 없으며, 이 연구의 학습 공동체인 네 명의 학생들 뿐 아니라 학급의 친구들 사이에서도 주도적으로 생각을 이끌어 가는 학생이다. 부모님이나 교사와의 대화에서도 자신의 의견을 논리적으로 말할 수 있으며, 옳고 그름보다 자신 혹은 타인의 감정을 더욱 중요하게 생각하는 학생이다. 용준이는 기댓값을 합의하는 과정에서 유의미한 객체인 '통계적 확률'을 생물학의 유전 단원과 경계 이동하기를 통해 생성하였고, 이를 통해 기댓값을 합의하는 과정에서 다양한 논의를 이끌었다. 네 학생 모두 1회차에 앞면이 나오는 횟수를 미지수로 두고 게임 1과 게임 2의 점수를 일차방정식으로 나타내는 도구-생산 활동을 하였지만, 용준이는 점수를 일차함수의 그래프를 활용하여 기하학적으로 표현하는 객체를 처음으로 생성하였고, 이후 두 게임의 차이를 비교하는 과정에서 다른 학생들의 도구-생산 활동에 영향을 주었다.

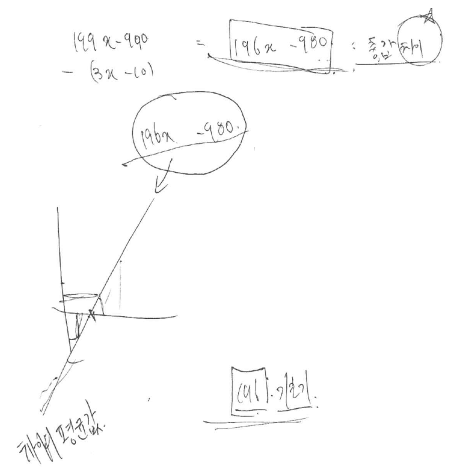
[그림 4-20]은 용준이가 수학적 표현을 정교화하는 도구-생산 및 객체 활동을 통해 수학 개념이 어떻게 형성되고 있는지를 요약한 것이다. 용준이의 활동의 동기는 A학점을 받는 것을 목표로 하는 것이며, 이러한 동기는 게임 1은 A학점을 받을 수 없으므로 게임 2를 선택하는 것으로 나타난다. 게임 2가 A학점을 받을 확률이 높다는 것을 정당화하기 위해 게임 1과 게임 2를 각각 일차함수의 그래프 '$y=3x-10$', '$y=199x-990$' ($x=$앞면이 나오는 횟수)로 표현하고, '성적분포의 범위'를 y축의 범위로 시각화하는 방법을 통해 두 게임이 차이를 설명한 바 있다. 그러나 이는 기댓값에 대한 개념을 형성하기 전에 총점이 0점 이상인 경우, 즉 y가 0이상인 경우만을 고려한 설명이었다. 기댓값의 개념을 형성한 이후 용준이의 일차함수의 그래프는 기댓값을 중심으로 설명

용준이의 수학적 도구 사용	도구 및 개념 형성 과정
	**최댓값, 최솟값** : 게임 1은 최고학점으로 B를 받을 수 있지만 게임 2는 최고학점으로 A를 받을 수 있다.

⇓

	**산포도, 범위** : 게임 1과 게임 2의 총점을 일차함수를 통해 나타내면, 게임 2가 받을 수 있는 성적분포가 게임 1이 받을 수 있는 성적분포보다 넓다는 것을 알 수 있다.

⇓

	**일차함수의 차,** **기울기, 기댓값,** **차이의 평균값** : 기댓값을 중심으로 총합의 차이가 다르다고 주장하였지만, 이후 표준편차 공식과의 비교를 통해 게임의 점수의 총합은 정규분포 곡선을 이룬다는 개념을 형성하였다.

[그림 4-21] 용준이의 행위 영역에서의 개념 형성

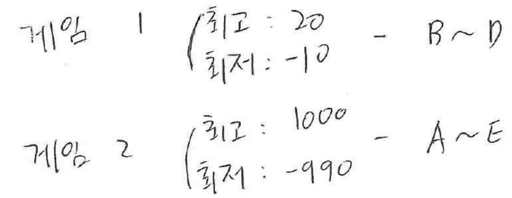
되었지만, 개념 형성 과정을 통해 일차함수의 그래프를 통해 두 게임의 차이를 설명하는 데 있어서 기댓값이 같은 지점인 (5,5)를 표현하는 도구의 사용은 여전히 미흡함을 볼 수 있다. 기댓값과 같은 기준이 없는 상태에서 두 그래프를 한 좌표평면 상에서 비교하는 데 어려움이 있었던 것으로 보인다. 용준이는 두 게임이 총합을 표현한 두 함수 및 두 함수의 차를 나타낸 새로운 함수인 '$196x-980$'의 기울기에 더욱 집중하였다. 이후 정규분포 곡선에서도 학점을 받을 수 있는 범위보다는 두 게임의 각각의 A학점을 받을 수 있는 확률에 더욱 초점을 맞춘 객체를 생성하였다.

교사의 모델과의 비교를 통해 기댓값을 중심으로 '앞면과 뒷면이 나오는 비율'이 정규분포 곡선을 이룬다는 개념을 형성하게 되었다. 자신이 선택한 게임을 정당화하는 것이 자신의 모델에서 '총합의 차이'를 통해 더 이상 설명할 수 없다는 것을 알게 되었다. 이후 용준이는 교사의 모델을 도구로, (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수) = 9:1 또는 1:9와 같은 경우가 6:4 또는 4:6의 경우보다 나오기 힘든 확률이라는 객체를 통해서 동전을 던져서 낮은 확률이 나오는 경우 A학점을, 기댓값으로 가까워질수록 E학점을 주는 다른 방식의 규칙을 제안하였다. 이는 게임 1과 게임 2의 차이를 고려한 모델은 아니다.

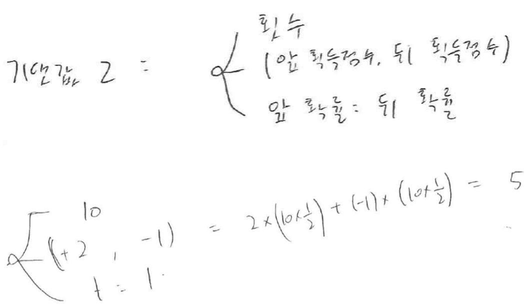
용준이는 다양한 말과 수학적 기호를 사용해 기댓값을 형성하는 과정을 통해 행위의 관점에서 기댓값의 개념을 형성하였다고 볼 수 있으나, 표준편차에 대해서는 유의미한 도구를 생성하지 못하였다. 일차함수의 그래프의 기울기나 성적분포의 범위에 대한 객체를 생성하였지만, 객체를 도구와 연결하여 기댓값을 중심으로 한 두 게임의 차이를 설명하는 도구-생산 활동은 수행하지 못하였기 때문에 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 표준편차의 개념을 형성하지 못한 것으로 보는 것이 적절하다.

1.2 수현이의 행위 영역에서의 개념 형성

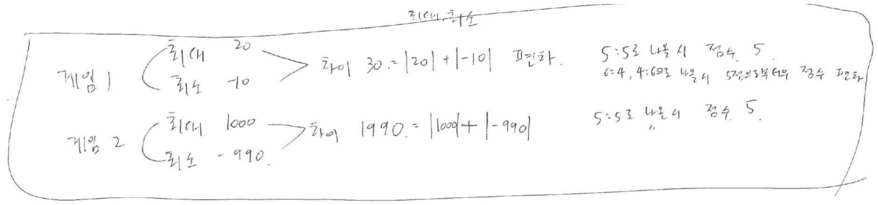
수현이는 인터뷰를 통해 기댓값과 표준편차를 선행하여 학습하였다고 말했다. 하지만 수현이가 표현한 수학적 기호인 ‘편차’는 최댓값과 최솟값의 차이를 의미하는 것으로, 편차의 수학적 정의와는 다르게 사용하였다. 이후 교사의 표준편차 모델과의 비교하는 활동을 통해 자신의 모델

<table>
<tr><th>수현이의 수학적 도구 사용</th><th>도구 및 개념 형성 과정</th></tr>
<tr><td>
</td><td>최고, 최저, 범위
: 게임 1과 게임 2의 최고점과 최저점을 자신만의 도식을 만들어 표현하고, 각 게임에서 받을 수 있는 학점의 범위를 나타내었다.</td></tr>
</table>

⇓

<table>
<tr><td>
</td><td>기댓값, 수학적 확률
: 게임 1과 게임 2의 기댓값을 수학적 확률을 통해 5점이라는 결과물을 이미 도출하고, 모든 경우의 수의 기댓값을 표현하는 자신만의 도식을 만들었다.</td></tr>
</table>

⇓

<table>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>최대, 최소, 범위, 편차
: 게임 1과 게임 2의 최댓값과 최솟값을 자신만의 도식을 만들어 표현하고, 최댓값과 최솟값의 차이, 즉 범위를 편차라는 수학적 기호로 표현하였다.</td></tr>
</table>

[그림 4-22] 수현이의 행위 영역에서의 개념 형성

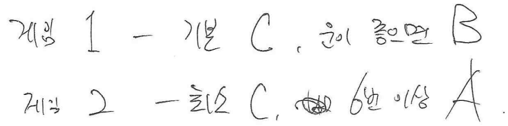
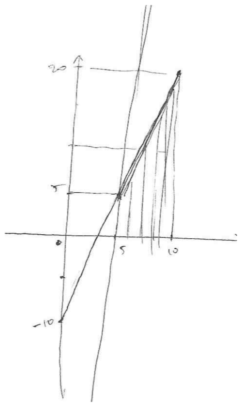
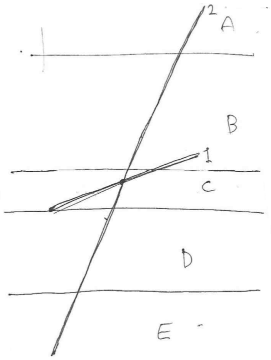
이 최댓값과 최솟값만을 고려하고 각 변량의 평균과의 차이를 고려하지 않았다는 것을 발견하고 자신의 수학적 표현을 정정하였다. 수학적 도구 사용이 능숙해짐에 따라 최저점, 최고점 및 최솟값, 최댓값만을 고려하여 두 게임의 차이가 범위에 있다는 것으로부터 기댓값과의 편차가 다르다는 두 게임의 차이를 발견하였고, 이를 수학적 기호 및 글로 표현하는 활동을 수행할 수 있었기 때문에 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 기댓값과 표준편차의 개념을 형성하였다고 보는 것이 적절하다. [그림 4-21]은 수현이가 수학적 표현을 정교화하는 도구-생산 및 객체 활동을 통해 수학 개념이 어떻게 형성되고 있는지를 요약한 것이다.

1.3 건우의 행위 영역에서의 개념 형성

건우는 수학 성적이 중상위권에 속하는 학생이다. 말수가 적고 초반 낯가림이 심한 편이며, 1회차 수업에서 기댓값을 단어 또는 수학적 기호로 표현하지 못하였다. 게임 2를 선택하였기에, 게임 2를 선택한 이유를 정당화하기 위해 기댓값을 시작점으로 두고, 두 게임 모두 최소 C학점을 받지만 게임 2가 최대 A학점을 받을 수 있는 게임임을 표현하였다.

1회차에서의 발화는 매우 적은 양을 차지했으며, MCFAS-1에서와 같이 '안정적'이라는 객체 또한 자신만의 확실한 개념을 가지고 발화하지 못하였다. 하지만 2회차에서 생성한 도구를 바탕으로 자신감을 얻고 많은 발화를 하기 시작하며, 다른 학생들의 도구 및 객체 또한 적극적으로 활용하는 모습을 보였다. 건우는 도구 사용에 있어서, 같은 게임 2를 선택한 용준이의 일차함수의 그래프, 생물의 유전 등과 같은 도구에 의해 많은 영향을 받았다는 것을 알 수 있다.

[그림 4-22]는 건우가 수학적 표현을 정교화하는 도구-생산 및 객체 활동을 통해 수학 개념이 어떻게 형성되고 있는지를 요약한 것이다. 건우는 MCFAS-2에서와 같이 기댓값을 수학적 기호로 표현하지 못하여 기댓값의 개념을 형성하지 못한 것으로 보일 수 있으나, 동전 던지기 활

건우의 수학적 도구 사용	도구 및 개념 형성 과정
	**추측 값** : 추측 값 5이상의 경우의 수만을 게임 2를 선택한 이유를 정당화하기 위한 도구로 사용하였으며, 기댓값을 수학적 기호로 표현하지 못하였다.
⇓	
	**일차함수의 그래프, 기울기, 범위** : 게임 1과 게임 2의 총점을 일차함수를 통해 나타내고, 이를 한 좌표평면상에 표현하였다. 5점 이상의 점수만 고려하던 이전의 도구 사용으로부터, 그래프를 통해 각각 −10점, −990점 이상의 경우의 수를 고려할 수 있게 되었다.
⇓	
	**최소 학점(시작점), 부담감** : 게임 1과 게임 2의 범위를 좌표평면상에 표현함으로써 게임 1의 최소 학점이 D, 게임 2의 최소 학점이 E임을 도구로 사용하여 게임 2가 부담감이 크다는 것을 고려할 수 있게 되었다.

[그림 4-23] 건우의 행위 영역에서의 개념 형성

동 및 친구들의 활동 결과와 자신의 활동 결과를 비교하는 과정을 통해 6:4또는 4:6은 기댓값으로 타당하지 않으며 5:5가 타당하다는 다양한

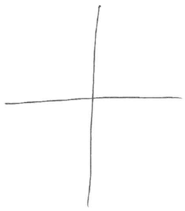
객체를 생성하였으며, 또한 과제의 초반에 게임 2가 유리한 앞면이 더 많이 나오는 경우의 수만을 고려하던 활동으로부터, 좌표평면 위에 게임 1과 게임 2의 기댓값을 함께 표현하고 이를 중심으로 최하점과 최고점을 고려하고 있는 것을 근거로 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 기댓값의 개념을 형성하였다고 보는 것이 적절하다.

1.4 동혁이의 행위 영역에서의 개념 형성

동혁이는 수학 성적이 중상위권에 속하는 학생이며, 수학을 잘하고자 하는 동기와 자신감이 큰 학생이다. 동혁이는 인터뷰에서 자신의 수학적 능력을 최하, 하, 중, 상, 최상의 기준으로 표현해보라는 질문에 최상에 가까운 상이라고 답하였다. 이는 다른 학생들이 상 이라고 답한 것과는 비교되는 답변이었다. 동혁이의 동기와 자신감은 수업 전반에 걸쳐 드러난다. 비교적 많은 양의 발화를 보였으며, 기댓값을 합의하는 과정에서도 세 학생들과 다른 자신의 생각을 계속해서 주장함으로써 다양한 상호작용을 유도하고 풍부한 객체를 생성할 수 있는 기회를 제공해주었다.

[그림 4-23]은 동혁이가 수학적 표현을 정교화하는 도구-생산 및 객체 활동을 통해 수학 개념이 어떻게 형성되고 있는지를 요약한 것이다. 기댓값을 단어 또는 수학적 기호로 표현하는 활동에서 앞면이 나온 횟수를 a, 뒷면이 나온 횟수를 b로 두고 일차식을 세웠으며, 때문에 게임의 총점을 그래프 위에 나타내지 못하였다. 이후 $b=10-a$를 도구로서 게임의 총점을 나타내는 일차식을 객체로 생성함으로써 이를 다시 자신의 주장을 정당화하기 위한 도구, 즉 두 게임은 0보다 클 조건이 서로 다르다는 것을 정당화하기 위한 도구로 사용하였다.

동혁이는 기댓값과 개념을 형성하기 위한 수학적 도구를 적절하게 상용하지 못했으며, 이에 따라 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 기댓값과 표준편차의 개념을 바르게 형성했다고 볼 수 없다.

동혁이의 수학적 도구 사용	도구 및 개념 형성 과정
a ⇒ 앞면 나온 횟수 b ⇒ 뒷면 나온 횟수 게임1 ⇒ $2a-b$ 게임 2 ⇒ $100a-99b$ a, b $a=1\sim10$ $b=10-a$ 	**미지수가 두 개인 일차식** : 기댓값을 수학적 기호로 표현하기 위해 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수를 각각 미지수로 두고 일차식을 세웠으며, 이를 그래프에 표현하지 못했다.

⇓

5:5로만 설명할 수 없으니 공식을 세웠을 때, 게임1 : $2a-(10-a)=3a-10$ 게임2 : $100a-99(10-a)=199a-990$ 0보다 클 조건 ⇒ 게임1: $a>3$ ⇒ 앞면이 3회보다 보다 많아야 0보다 큼 게임2 : $a>4$ ⇒ 앞면이 4회보다 많아야 0보다 큼. 5:5로 따졌을 때, 게임1은 4~10까지의 안정성 보장 → 60% 게임2는 5~10까지의 안정성 보장. → 50%	**미지수가 한 개인 일차식, 0보다 클 조건** : 기댓값에 합의하지 못하고, 지속적으로 4:6이 기댓값으로 정당하다는 주장을 하기 위해 주관적인 기준을 제시하며 기댓값과 표준편차의 개념을 형성하지 못하였다.

[그림 4-24] 동혁이의 행위 영역에서의 개념 형성

2. 주체의 맥락 영역에서의 수학 개념 형성

공동체 내에서 주체의 상호작용은 다양한 실천을 통해 관찰될 수 있는데, 수학적 토론은 공동체 내에서 서로의 생각을 듣고, 공유하며, 질문함으로써 수학적 이해의 공동 구성을 촉진하는 전략적이고 목적이 있는 실천이다(Lim et. al, 2020). 이 연구에서 네 학생은 개별 학습 활동의 주체이자, 상호작용의 주체가 되어 기댓값을 합의하고 표준편차의 모델을 비교하는 활동에 참여하였다. 기댓값을 합의하는 활동은 2회차 시작과 함께 1회차에서 동전 던지기 활동의 결과를 비교하는 과정을 통해 이루어졌으며, 표준편차의 모델을 비교하는 활동은 2회차 수업의 마지막에 이루어졌다. MCFAS의 맥락의 영역에서의 분석을 위해 수업 중 발화를 토대로 분석하며 개별로 이루어진 개별 면담의 내용을 근거로 더욱 구체화한다.

네 학생 중 수현이는 면담을 통해 기댓값과 표준편차의 개념을 선행하였다고 답하였지만, 네 학생 모두 기댓값과 표준편차라는 수학적 용어가 등장하기 전까지 이 과제가 해당 내용 영역에 대한 개념 형성을 목표로 하는 과제임을 인지하지 못하였다고 답했다. 네 학생은 평균의 개념은 모두 학습하였다고 답하였지만 게임을 선택하도록 하는 선택지를 주었고, 각자의 성향과 신념에 따라 게임을 선택하는 순간 그 게임을 선택한 이유를 지속적으로 정당화해야 하는 과제를 부여받게 됨으로 인해 두 게임의 총점의 평균이 모두 5점이라는 계산 결과보다는 자신의 게임이 유리한 방향에 더욱 초점을 맞추어 기댓값을 정의하는 것을 발견할 수 있었다.

또한 기댓값의 정의를 모른 채 합의하는 과정을 거쳐 공동체 안에서 보편적으로 타당한 기댓값을 정의하였으므로, 다양한 수학적 기호를 통해 기댓값을 표현하는 암묵적 합의가 이루어졌다. 예를 들어, 기댓값을 기대하는 총점인 ‘5’와 기대되는 ‘(앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)＝5 : 5’ 그리고 기대되는 ‘(앞면이 나올 확률) : (뒷면이 나올 확률)＝50 : 50’와 같이 용어를 혼용하였다. 또한 암묵적으로 앞면이 나오는 경

우와 뒷면이 나오는 경우를 표현하는 데 있어 순서를 지키는 규칙을 생성하였는데 예를 들어, 4:6은 (앞면이 나오는 횟수) : (뒷면이 나오는 횟수)를 의미하는 것이었다.

네 학생은 초반의 기댓값을 합의하는 상호작용을 통해서는 자신이 정한 기댓값(용준이와 건우는 6:4, 수현이는 5:5, 동혁이는 4:6)이 옳다고 주장하기 위해 ‘기댓값과 활동 결과의 차이’, ‘다수결’ 등의 근거를 들지만 공동체의 동의를 이끌어내지 못하였다.

교사 : 수학적으로 기댓값이라는 용어를 정의하려면 모두가 합의할 수 있는 결과가 도출돼야 해요. 그러면 보편적으로 타당한 기댓값을 같이 도출해볼까요?

동혁 : 제가 봤을 때, 4:6으로 했을 때 가장 차이가 많이 안났으니까(동혁이의 기댓값과 활동 결과의 차이) 4:6이 맞지 않을까?

용준 : 근데 차이를 보는 게 아니고 이 의견을 봐야지. 6:4가 더 많으니까 6:4로 해야 하지 않을까?

건우 : 다수결로?

수현 : 결국 던질 때의 확률은 무언가 장치를 해 놓지 않는 이상 어차피 5:5니까 기댓값으로는 확률에 맞게 둘 다 똑같이 해놓아야 되는 게 아닐까?

면담을 통해 네 학생은 모두 체육을 가장 좋아하는 과목으로 뽑았으며, 일주일에 세 번 이상 함께 축구를 한다고 답했다. ‘수업을 함께한 친구들과 평소 관계에서 주도적으로 행동하는지?’에 대한 면담 질문에 네 명의 학생은 모두 주도적으로 게임을 제안할 때도 있지만 서로의 의견을 존중하여 조율해 나간다고 답하였다. 이들은 수업 밖의 환경에서 서로에 대한 충분한 이해를 바탕으로 한 관계를 유지하고 있었다. 수현이와 용준이는 학급에서 수학 성적이 매우 우수한 학생에 속하며 기댓값을 합의하는 과정에서도 공동체 내에서 대부분의 발화를 차지하며 중심적인 역할을 수행하였다. 면담을 통해 네 학생은 서로의 수학 및 타 교과 성적을 알고 있었다는 사실을 확인할 수 있었고, 이들 사이에 성적을 중심으로 묵시적 위계가 형성된 것으로 보인다. 수현이가 기댓값이 5:5 라는

자신의 결과를 바탕으로 다양한 학생들의 의견에 반박하는 주장을 하였고 용준이 또한 그 의견에 동의하면서 건우 또한 기댓값을 5:5라고 주장하게 되었고, 기댓값을 합의하는 과정은 새로운 국면에 접어들었다.

동혁 : 동전의 앞면에 조금 더 그림이 많이 그려져 있으니까 앞면의 무게가 조금 더 나가니까 앞면이 바닥으로 향할 확률이 조금 더 높아져서 뒷면이 더 자주 나오지 않을까?

건우 : 그거의 차이가 그렇게...

수현 : 5:5를 6:4로 바꿀 정도의 차이가 나진 않지

건우 : 그 정도의 차이는 아니잖아

동혁 : 극소의 차이는 만들 수 있지 않아?

건우 : 천 번 던져서 501:499

수현 : 그래도 결국 5:5

건우 : 그러니까 그렇게 하면 5:5

용준 : 4:6, 6:4 이런 거는 약간 개인적 감정이 들어가는 숫자다? 약간 내 결괏값이 어쨌든 이게 돼야 되니까

동혁 : 아니면 지금 네 명이서 동전 하나로 10번보다 많게 한 50번 정도 던져서 나오는 결과를 보고서 하는 건 어때?

수현 : 우리가 네 명이서 던졌을 때는 아직 값이 5:5쪽까지 정확히 수렴하게 안 나오는데 아까 말한 것처럼 몇 억 번인가? 사람들이 몇 천 명을 더 던져보라 하면 5:5에 아무튼 6:4나 4:6이나 이런 것 보다는 5:5에 조금 더 가깝게 들어갈 거 아니야. 그러니까 다른 사람들한테 설명하는 거니까 우리가 우리끼리 하는 건 의미가 없는 것 같아.

용준 : 그러니까 이게 계속 가다보면 4.몇, 5.몇 이렇게 나오겠지

수현 : 그렇게 되니까 결국 사람들이 생각하기에도 그냥 5:5가 맞는 거잖아

용준 : 응 그게 맞을 것 같긴 해

동혁 : 근데 거기서 또 조금 차이로 만약 4.5 : 5.5 그런 식으로 되어버리면?

수현 : 그래도 결국 5 : 5지

용준 : 그러니까 그 상태에서 또 진짜 한 무한대 번을 던지면 결국에는 그게 비율이 5 : 5로 간다는

총 75분 동안 이루어진 2회차 수업에서 기댓값을 합의하는 과정은 25분 동안 이어졌다. 동혁이는 자신이 선택한 게임 1과 수업 안의 상황에 초점을 맞추어 자신의 활동 결과와 다른 학생들의 기댓값을 비교하는 과정을 통해 기댓값 4:6 이 타당하다는 주장을 지속해 나갔다. 면담을 통해 1회차 수업에서 기댓값을 수학적으로 표현하지 못한 것에 대해 오랫동안 고민해 보았다고 답변했으며, 자신이 나머지 세 학생과 비교하여 수학 성적이 낮은 편에 속하기 때문에 더욱 수업에 적극적으로 참여하려고 노력했다고 답했다. 동혁이는 1회차 수업 이후 많은 고민을 통해 기댓값을 정의하는 것에 대한 자신만의 기준을 세운 것으로 보인다. 교사는 이러한 대립을 환기하기 위해 21분 시점에 처음으로 개입하였다. 교사의 개입으로 동혁이와 건우는 서로의 기댓값의 중간값인 5:5로 합의하는 것이 적절하다고 발화하였지만, 두 학생 모두 특정 상황에 대한 중간값을 합의한 것으로 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 맥락의 영역에서 기댓값의 개념을 형성하지 못하였다고 보는 것이 적절하다. 반면에 수현이와 용준이는 합의 과정을 통해 동전을 10번 던져서 나오는 수학적 확률의 기댓값과 통계적 확률의 기댓값이 모두 5:5로 수렴한다는 사실을 발견하였고, 수업 밖의 맥락에서도 보편적으로 타당한 기댓값을 도출하려는 시도를 하였다. 다음과 같은 발화를 바탕으로 수현이와 용준이는 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 맥락의 영역에서 기댓값의 개념을 형성하였다고 보는 것이 적절하다.

교사 : 동혁이가 주장한 4 : 6을 건우가 인정할 수 있어요? 던졌을 때 4 : 6이 나올 거라고 기대하고 게임 2를 선택했어요?

건우 : 아니요. 저희가 운이 조금이라도 좋을 거라고 가정하고 선택했어요.

교사 : 동혁이는 6:4가 나올 거라고 기대하고 게임 1을 선택했을까?

동혁 : 그랬으면 게임 2를 선택했겠죠

교사 : 지금 동혁이랑 건우 사이에는 서로 인정을 못하는 부분이 있어요. 그러면 우리가 모두가 합의할 수 있는 값을 기댓값으로 도출하기 위해서는 모두가 인정할 수 있는 값이어야겠죠?

건우 : 그럼 중간값인 5:5가 가장

동혁 : 5:5가 가장

수현 : 그러니까 5:5로 나오면 사람들이 수긍을 안하기 힘들잖아

용준 : 그냥 5:5가 가장 여기서 말하는 보편적으로 타당한가? 에서 현실에서 계속했을 때 많이 얻을 수 있는 값이라는 거지

수현 : 그리고 당장 봐도 게임 1, 2는 똑같이 5:5로 기댓값도 똑같고 받을 수 있는 성적도 똑같잖아...결국 5:5로 뜨면 이제 조금 더 극단적으로 가냐? 조금 더 안정적으로 가냐? 생각해서 우리가 뭐 동혁이랑 나는 게임 1을 불렀고, 건우랑 용준이는 게임 2를 부른 것처럼 나뉘지. 이게 선택을 하려면 그 두 선택지가 나름 공평해야 되는데 이게 4:6이나 6:4로 떠버린다는 걸 사람들이 수긍하고 있으면 한쪽으로 엄청 치우칠 거 아니야. 5:5로 갔을 때 극단적으로 가겠다, 안정적으로 가겠다 그걸 선택할 수 있는 여지를 주는 게 5:5라고 생각해.

용준 : 그리고 5:5로 뜨면 약간 게임 1을 선택한 사람도, 게임 2를 선택하는 사람도 선택에 아쉬움도 없고, 두 입장 다 수긍할 수가 있다는 그런 거지.

주체의 변환 과정에서 가장 두드러진 특징을 보인 학생은 건우와 용준이다. 건우는 다른 학생들과의 상호작용을 통해, 즉 다른 학생들의 발화 및 도구를 적극적으로 활용하는 주체의 변환을 이루었다. 제 2 절에서 최소단위를 중심으로 한 MCFAS 분석을 통해 건우가 표준편차 모델을 도출하는 MCFAS-3에서는 용준이가 MCFAS-1에서 도구로 사용한

일차함수의 그래프와 MCFAS-2에서 도구로 사용한 생물의 유전과 같은 도구의 영향을 받아 도구-생산 활동을 수행하였다는 분석을 하였는데, 이는 용준이의 면담을 통해서도 확인할 수 있었다. 용준이는 ‘자신이 선택한 게임을 정당화할 때 그 주장을 하는 데 있어서 주저한 부분이 있었다면 어떠한 이유 때문이었을까요?’에 대한 질문에 건우가 자신과 같은 일차함수의 그래프를 사용해 두 게임의 차이를 표현하였고, 다른 학생들이 건우의 모델을 좋은 모델이라고 선택하고 자신의 모델과 비교한 점이 마음에 걸리는 부분이라고 답하였다. 이에 용준이는 MCFAS-1에서 도구로 사용하였던 일차함수의 그래프로 자신의 주장을 더욱 발전시키기 위해 두 함수의 차이가 총합의 차이를 나타낸다는 객체를 생성하게 된 것이다.

이 절에서는 제 2 절에서 제시한 최소단위 중심 MCFAS와 주변 MCFAS를 통한 상세한 분석을 바탕으로, 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위 및 맥락의 영역에서 수학 개념이 형성되었는지를 확인해 보았다. 네 학생은 모두 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 수학적 도구를 사용하여 기댓값의 개념을 형성하였고, 용준이와 수현이는 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 맥락의 영역에서 기댓값의 개념을 형성하였지만 건우와 동혁이는 기댓값의 수학적 개념을 잘 형성하지 못한 것으로 보인다. 건우는 확률적 통계를 이해하고 수업 밖의 맥락에서도 기댓값을 이해한 것으로 보였으나, 이후 표준편차의 개념 형성 과정에서 기댓값을 도구로 사용하지 못하였으며, 동혁이는 수업 안의 맥락의 특수한 경우에 더욱 초점을 맞추어 기댓값을 다른 맥락에서 이해하지 못하였다. 건우와 동혁이에게는 기댓값에 대한 맥락적 이해를 지원할 수 있는 교수 방안을 마련할 필요가 있다.

MCFAS-3과 MCFAS-4는 기댓값을 중심으로 편차를 고려한 차이를 발견하는 것이 표준편차의 개념 형성을 위한 최소단위 학습 목표를 갖는다. 수현이는 혼용하던 편차의 정의를 교사의 표준편차 모델과 비교함으로써 기댓값과 최댓값, 최소값의 차이를 편차로 정의하였고, 이를 통해 두 게임의 차이를 설명하였다. 또한 건우는 기댓값을 교차점으로 하는

두 일차함수의 그래프를 한 좌표평면상에 나타내는 것을 통해 두 게임의 차이를 설명하였다. 수현이와 건우는 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 표준편차의 개념을 형성하였다고 볼 수 있다. 하지만 건우는 자신의 모델에서 기댓값이 아닌 최솟값에 더욱 초점을 맞춤으로써 기댓값을 중심으로 두 게임의 차이를 설명하지 못하였고, 교사의 표준편차 모델과 비교하는 활동 또한 수행하지 못하였기 때문에 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 맥락의 영역에서 표준편차의 개념을 형성하지 못하였다. 건우는 기댓값과 표준편차 모두 수학적 도구를 사용하여 개념을 형성한 것으로 보였으나 맥락적 이해가 부족한 분석 결과를 보였다. 학습자의 수학적 도구의 능숙한 사용에는 맥락적 이해가 동반되어야 할 것이다.

용준이는 두 일차함수의 그래프의 차이를 이용해 두 게임의 총합의 차를 그래프에 표현하였지만, 총합의 차이가 더 크다는 계산 결과의 오류로 인해 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 행위의 영역에서 표준편차의 개념을 형성하지 못하였다고 보는 것이 적절하지만, 건우의 모델과 자신의 모델의 차이점을 정확하게 설명하였으며, 교사의 모델과의 비교를 통해 두 게임이 모두 정규분포 곡선을 이룬다는 개념을 활용해 다른 게임의 방식을 제안하는 확장학습의 활동 체계를 구성하였다. 따라서 주체의 변환을 중심으로 한 MCFAS의 맥락의 영역에서 표준편차의 개념을 형성하였다고 보는 것이 적절하다.

제 4 절 MCFAS 확장 도식의 사례 및 MCFAS의 성질

제 2 절에서는 중심 MCFAS가 도구-생산 활동, 규칙-생산 활동, 객체 활동 등의 주변 MCFAS를 수반하며 이 과정을 통하여 수학 개념이 형성됨을 구체적으로 분석하였다. 제 3 절에서는 MCFAS의 행위의 영역에 초점을 맞춘 주체의 수학적 도구 사용이 능숙해지는 과정과 MCFAS의 맥락의 영역에 초점을 맞춘 주체 간 상호작용을 통해 수학 개념을 합

의하는 과정을 통한 주체의 수학 개념 형성 과정이 어떠한지 분석하였다. 이 절에서는 제 3 절의 행위 및 맥락의 영역에서의 종합적인 분석을 바탕으로 제 2 절에서 구체화한 각 활동 내용별 최소단위 중심 MCFAS를 확장하는 도식을 보이고자 한다. 이 절에서 보인 확장 도식은 연구자가 학습자별로 유의미하다고 보는 활동을 중심으로 구성한 것이며, 제안된 도식보다 더 많은 주변 MCFAS와의 관계성을 가지고 확장될 수 있으며, 경우에 따라 통합될 수도 있는 성격을 가짐을 밝힌다.

제 2 절에서 MCFAS-1에서 MCFAS-4로 개념이 형성되는 과정을 각 학습자별로 종합적으로 살펴보면 다음과 같다. MCFAS의 최소단위는 학습자가 활동을 통해 성취했으면 하는 학습 목표를 기반하여 설정되며, 그 결과물은 활동 내용을 잘 수행하였고 학습 목표를 잘 달성하였다고 판단할 수 있는 가늠좌가 된다. 따라서 MCFAS의 도식에서 결과물은 단방향 화살표로, 그 이외 제 3, 4 수준의 모순에 해당하는 MCFAS의 구성 요소와 또 다른 MCFAS의 구성 요소의 관계, MCFAS의 결과물과 또 다른 MCFAS의 구성 요소간의 관계 등은 모두 양방향 화살표로 표시하였다. 또한 실선 혹은 점선으로 표현된 MCFAS 삼각형 내의 구성 요소는 제 1, 2 수준의 모순을 바탕으로 상호작용을 하고 있으므로 양방향으로 영향을 주고받는 활동이라 할 수 있다.

[그림 4-25]에서 용준이는 MCFAS-1을 통해 일차함수의 그래프를 도구로 사용하여 운이 좋을 확률을 가정하여 게임 2를 선택하였으며, MCFAS-1의 객체와 결과물은 두 게임의 다른 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 활동인 MCFAS-3의 규칙을 비롯하여 객체 및 결과물과도 영향을 주고받았다. MCFAS-2에서는 자신이 예상한 기댓값과 다른 학생들이 예상한 기댓값에 대한 토론으로 합의된 기댓값을 도출하는 주변 활동을 통해 생성한 객체와 실제 활동 결과와 기댓값의 차이를 도출하는 주변 활동으로 생성된 객체가 각각 MCFAS-2의 규칙, 분업과 상호작용하였다. 그 결과 용준이는 게임 1과 게임 2의 기댓값이 서로 같으며 또 다른 방식으로 정당화가 필요하다는 결과물을 도출하였다. 용준이는 다양한 주변 활동을 통해 객체를 생성하며 수학 개념을 형성해 나

갔는데, 일차함수의 그래프를 비롯하여 통계적 확률, 수학적 확률 및 정규분포 곡선 등과 같은 다양한 수학적 도구는 생물의 유전이나 FIFA의 게임 배정 방식 등의 객체와 상호작용을 통해 MCFAS-2, 3, 4에서 더욱 정교화된 방식으로 활용될 수 있었다.

[그림 4-26]에서 수현이는 MCFAS-1을 통해 안정적인 게임 1을 선택하였으며 이 결과물은 MCFAS-3의 객체 및 규칙과 상호작용하는 과정을 통해 MCFAS-1에서 활용하였던 수학적 도구인 범위를 절댓값과 편차의 개념으로 정교화해 나갔다. 수현이는 활동 초반부터 게임 1과 게임 2의 기댓값이 같다는 결과물을 도출했으며, MCFAS-2에서 학생들이 토론을 통해 기댓값을 합의하는 과정에서 큰 역할을 수행하였다. 학생들은 모두 자신이 선택한 게임의 기댓값이 더 크다고 주장했지만, 수현이는 수학적 확률의 개념을 활용하여 자신만의 기댓값의 기호 등을 새롭게 생성함으로써 자신의 생각을 다른 학생들에게 효과적으로 표현하였다. MCFAS-3에서는 학생들 중 유일하게 최댓값과 최솟값의 차이가 아닌 기댓값과 최댓값 및 최솟값과의 차이를 절댓값 혹은 편차와 같은 수학적 기호로 나타내었다.

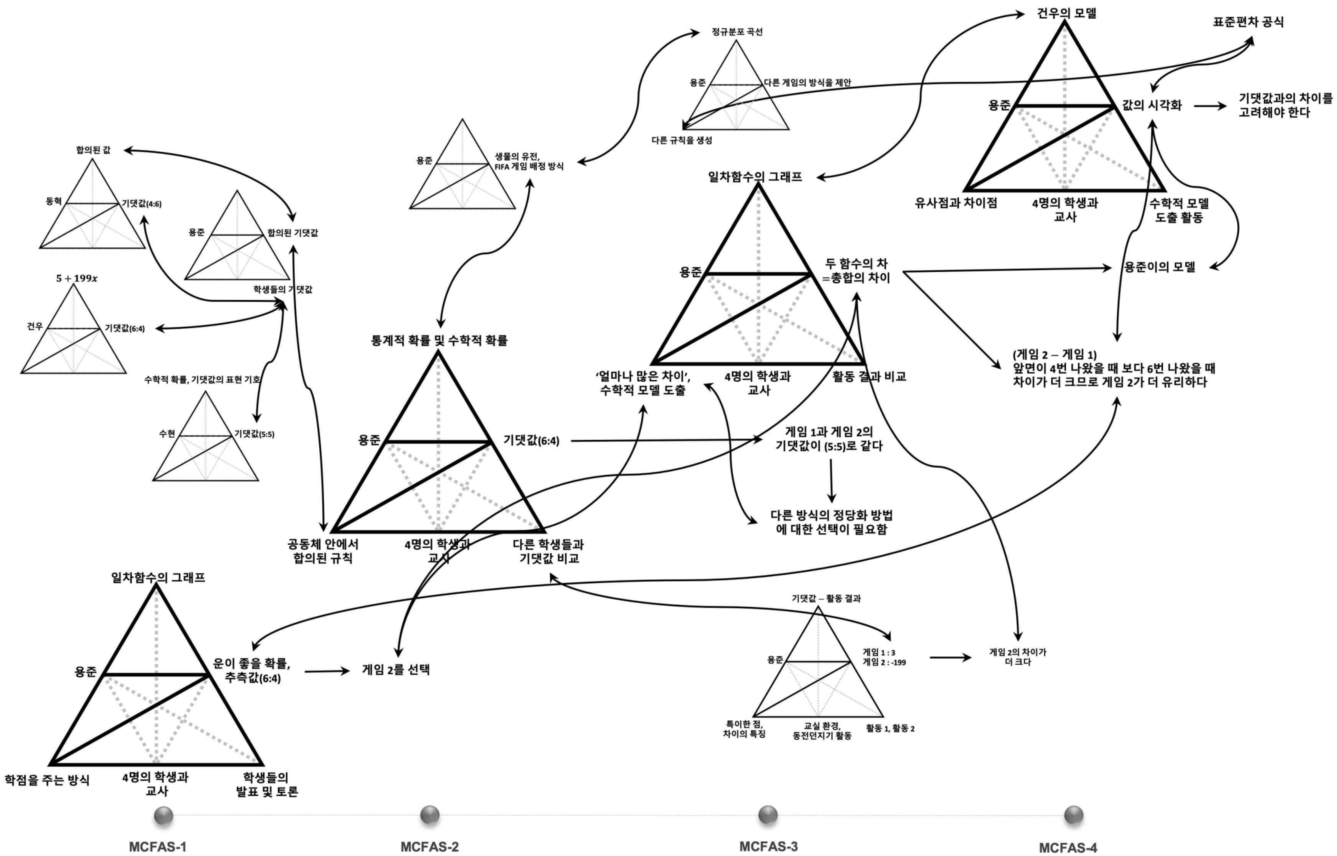
[그림 4-27]에서 건우는 MCFAS-1을 통해 안전하게 큰 점수를 획득할 수 있는 게임 2를 선택하였으며 이 결과물은 MCFAS-3의 객체 및 규칙과 상호작용하는 과정을 통해 안전한 것과 차이의 관계를 수학적으로 표현하기 위하여 일차함수의 그래프를 도구와 용준이가 생성한 생물의 유전 등의 객체를 활용하였다. MCFAS-2에서는 자신이 예상한 기댓값과 다른 학생들이 예상한 기댓값에 대한 토론을 통해 합의된 기댓값을 도출하는 주변 활동을 통해 생성한 객체와 실제 활동 결과와 기댓값의 차이를 도출하는 주변 활동으로 생성된 객체가 각각 MCFAS-2의 규칙과 분업과 상호작용하였다. 그 결과 건우는 게임 1과 게임 2의 기댓값이 서로 같으며 또 다른 방식으로 정당화가 필요하다는 결과물을 도출하였다. 이때 합의된 기댓값은 5번 문항을 수행하면서, 다른 학생들의 활동 결과와 자신의 활동 결과를 비교해 보고 보편적으로 타당한 기댓값을 함께 도출한 결과를 나타낸다. 건우는 MCFAS-3에서 용준이의 일차함수

그래프를 도구로 활용하여 그래프로 나타내는 모델을 도출하였다. 그래프로 가시화된 표현을 통해 게임 2가 게임 1에 비하여 부담감이 더 큰 게임이라는 객체를 생성하였고, 게임 1을 선택하는 것이 더 유리할 수도 있다는 결과물을 도출하였다.

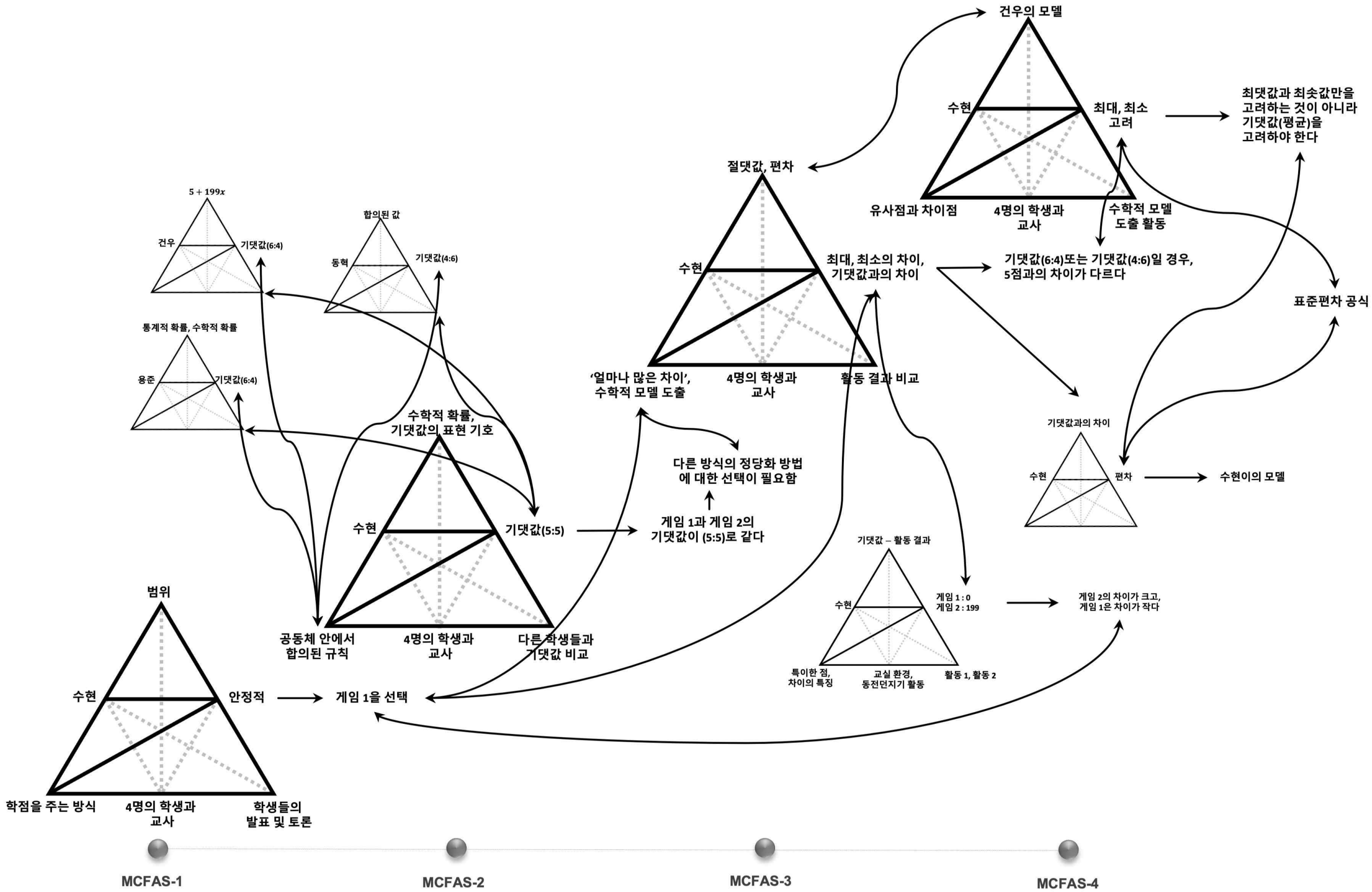
[그림 4-28]에서 동혁이는 MCFAS-1, 2, 3을 통해 안정적이라는 객체를 생성함으로써 게임 1을 선택하였다. 이를 정당화하기 위해 −10점, 0점 보다 클 조건 등의 도구를 사용하였지만, 수학적으로 유의미한 객체는 아니었다. 실제로 동혁이의 동전던지기 활동 결과에서 게임 1이 게임 2보다 높은 점수가 나왔고, 이 결과는 자신의 주장을 강화하는 방식으로 작용하였다. MCFAS-2에서 학생들은 자신의 활동 결괏값을 제시하고 토론의 과정을 거쳐 합의된 기댓값을 도출하는 활동을 하였지만, 동혁이는 MCFAS-4에서도 여전히 두 게임의 차이를 설명하는 수학적 표현이 아닌 게임 1이 더 유리하다는 주장을 뒷받침해 줄 수 있는 수학적 표현을 생성해나갔다. 이로써 동혁이는 확장 도식에서는 다양한 주변 활동이나 화살표가 표시되지 못하였다.

용준이와 건우의 확장 도식에서는 수현이와 동혁이의 확장 도식에 비해 많은 화살표와 주변 MCFAS가 표현된 것을 볼 수 있는데, 이는 용준이와 건우가 수학 개념을 형성하는 과정에서 다른 학생들의 영향을 더 많이 받았으며, 그 과정에서 자신의 이전 활동을 수정하고 보완하는 활동을 지속한 결과임을 보여준다. 제 2, 3 절의 연구 결과를 통해 건우는 기댓값과 표준편차의 개념을 잘 형성하였다고 판단하기 어렵지만 다양한 상호작용을 보임으로써 MCFAS-3을 통해 다른 학생들이 MCFAS-4에서 자신의 모델과 비교 대상으로 꼽은 모델을 도출할 수 있었다. 반면에 수현이는 기댓값과 표준편차의 개념을 잘 형성하였다고 판단할 수 있지만 다른 학생들의 활동에 영향을 받거나 자신의 활동을 수정, 보완하기보다는 활동 초반부터 활동을 통해 성취하기를 바라는 수학 개념에 가까운 객체들을 생성하고 있었다는 것을 알 수 있다. 또한 용준이는 가장 활발한 객체 생성 활동을 보인 학생이었으며 동혁이는 유의미한 객체를 많이 생성하지 못한 학생이었다. 각 학습자별 MCFAS의 확장 도식 사례

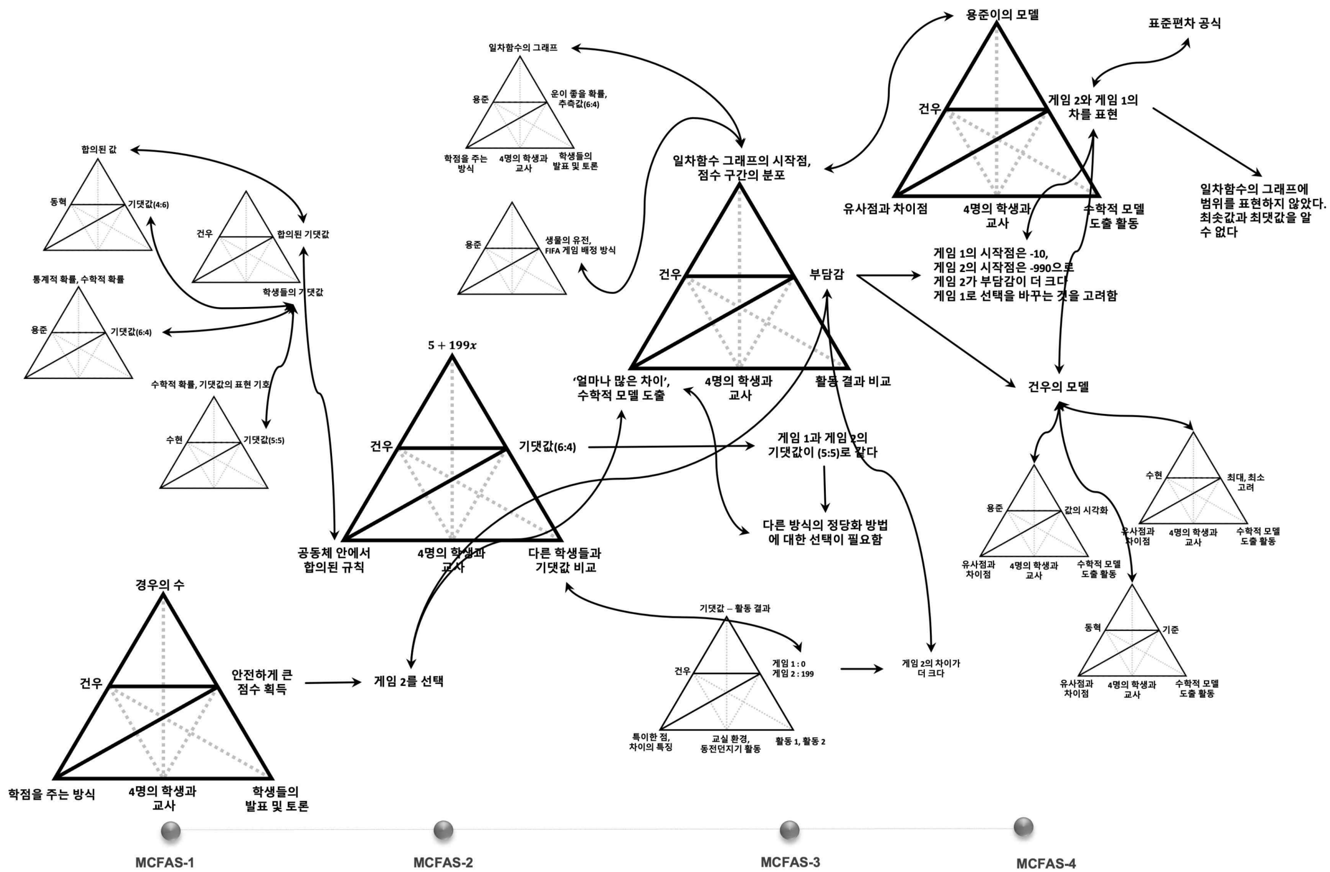
는 [그림 4-25] ~ [그림 4-28]과 같다.



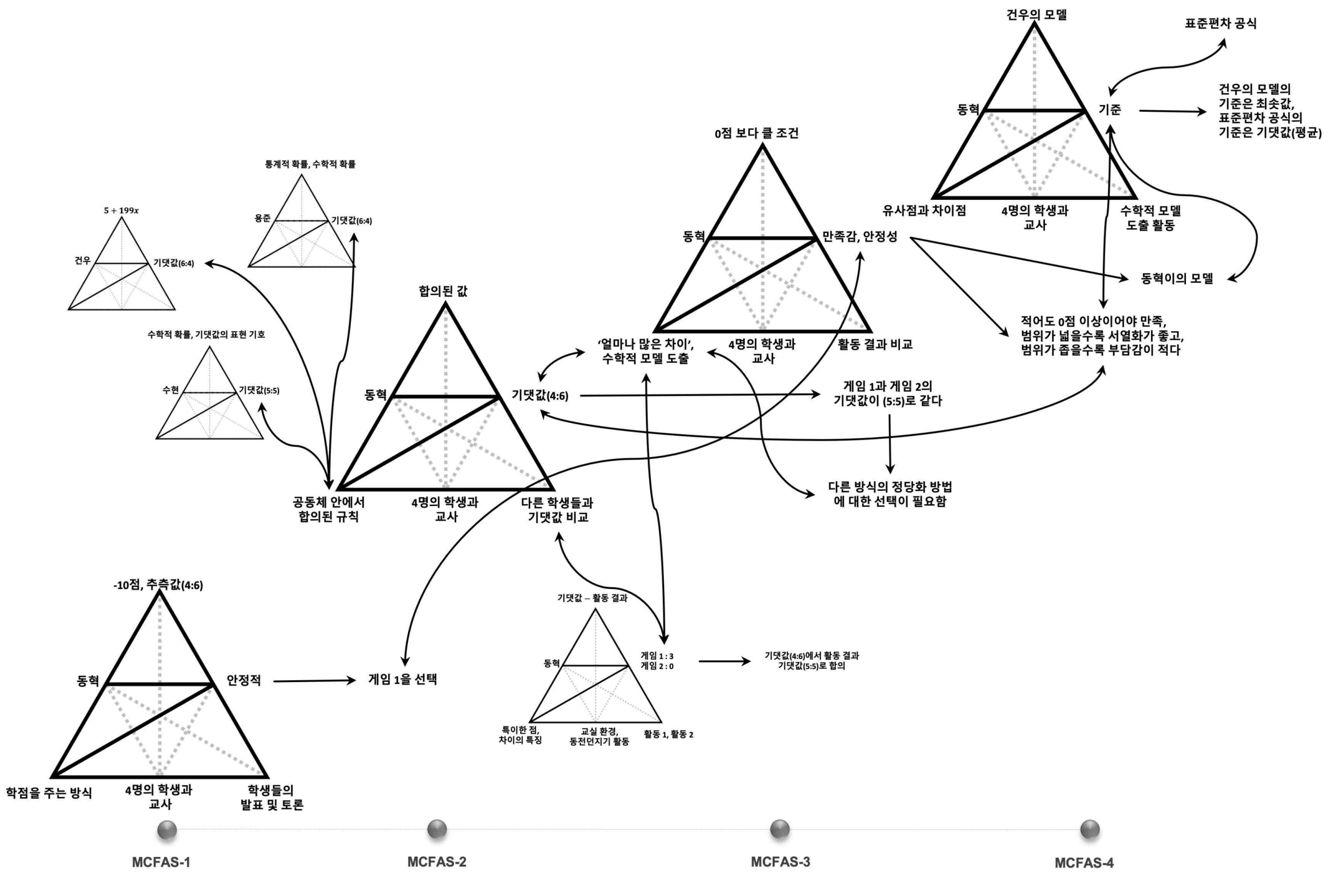
[그림 4-25] 용준이의 MCFAS 확장



[그림 4-26] 수현이의 MCFAS 확장



[그림 4-27] 건우의 MCFAS 확장



[그림 4-28] 동혁이의 MCFAS 확장

이 연구에서는 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 활동 체계가 어떠한 맥락과 특성을 가지는지 이론적 논의를 거쳐 밝히고, 이를 기반한 분석 방법을 제안하고 실제 교수·학습 상황에 대한 사례연구를 바탕으로 활동이론이 수학 개념 형성 과정을 설명할 수 있는 가능성을 확인하였다. 이 연구는 다양한 맥락에 있는 학습 주체의 수학 개념 형성 과정을 관찰하고 확인할 수 있는 구체적이며 가시화된 개념적 틀을 제공한다는 점에서 의의를 가진다. MCFAS는 수학 개념이 어떻게 형성될 수 있는지를 예측하는 도구가 아닌, 수학 개념 형성 활동 체계를 구성하는 일련의 기본 성질을 나타내는 개념적 틀이다. 연구 결과를 통해 MCFAS 삼각형의 구조적인 틀과 삼각형의 각 노드를 구성하는 요소인 주체, 객체, 도구, 공동체, 분업 그리고 규칙의 개념적 성질을 도출할 수 있었으며, 또한 도구-생산 활동, 객체 활동, 규칙-생산 활동의 주변 MCFAS를 통해 이를 구체적으로 분석하고, 행위의 영역에 해당하는 주체-도구-객체 및 맥락의 영역에 해당하는 규칙, 공동체, 분업을 통해 종합적으로 분석할 수 있었다. 이 결과를 바탕으로 학습자별 MCFAS의 확장 도식을 제시하였으며, 이는 가시화된 활동 체계 삼각형을 통해 수학 개념이 어떠한 영향을 주고받으며 형성되는지 관찰할 수 있게 해주었다. 이상의 연구 결과를 통해 수학 교수·학습 환경에 MCFAS가 활용될 수 있도록 하는 MCFAS의 네 가지 기본적인 성질을 다음과 같이 도출하면 다음과 같다.

단위 : 통합성, 확장 가능성

MCFAS는 학습 목표가 되는 수학 개념 형성을 위한 가장 단순한 단위를 최소단위 활동 목표로 보고 이를 축소 또는 왜곡하지 않는 기준을 결과물을 통해 잡아갈 수 있는 단위적 성질을 가진다. 즉, 객체의 결과물과 활동의 동기 및 목표가 일치할 때 이를 MCFAS의 최소단위 활동으로, 일치하지 않을 때 이를 활동이 아닌 행위로 간주할 수 있을 것이다. 최소단위 MCFAS 교수·학습 활동의 목표나 분석의 목적에 따라 더 작은 단위로 분해될 수 있으며 통합될 수도 있다. 이는 교사나 연구자로

하여금 학습자에게 요구되는 활동의 목표나 수업 혹은 연구의 분석의 목적에 따라 최소단위 활동 목표를 설정하고 통합하거나 다른 개념으로 확장할 수 있게 한다.

이 연구에서는 기댓값과 표준편차의 개념을 형성하는 활동을 각각 두 가지 최소단위 MCFAS로 구성하였다. 게임을 선택한 이유를 정당화하는 활동(MCFAS-1), 기댓값을 단어 또는 수학적 기호로 나타내고, 두 게임의 기댓값이 같다는 결과물을 도출하는 활동(MCFAS-2), 두 게임의 다른 차이를 발견하고, 그 차이를 수학적으로 표현하는 모델을 도출하는 활동(MCFAS-3), 다른 학생의 모델 및 교사의 모델과 자신의 모델을 비교하는 활동(MCFAS-4)은 과제의 특성 및 연구가 분석하고자 하는 학습 목표에 따라 정의한 최소단위 중심 MCFAS였다. [그림 4-25] ~ [그림 4-28]에서는 이러한 최소단위 중심 MCFAS를 연결하고 주변 MCFAS로 확장한 도식을 보였다. 이 도식은 연구자가 구분한 최소단위 중심 MCFAS가 학습자의 행위 및 맥락의 영역에 따라 통합하거나 분해하는 것이 분석에 더욱 유의미한 활동이 될 수도 있다는 것을 보여준다.

제 2 절과 제 3 절에서 동혁이는 MCFAS-3, 4를 통해 기댓값의 개념을 맥락의 영역에서 형성하지 못하였고, 표준편차의 개념을 행위 및 맥락의 영역에서 형성하지 못한 것을 확인하였다. [그림 4-28]을 보면, 동혁이는 다른 학생들에 비해 주변 MCFAS의 수가 적고 또한 MCFAS-2에서 생성한 객체인 기댓값(4:6)은 이후 MCFAS에도 지속적으로 영향을 주고 있는 것을 확인할 수가 있다. 이는 MCFAS-2에서 개념의 확장이 이루어지지 못하였으며 따라서 이후 활동에서도 유의미한 MCFAS를 형성하지 못하였다는 것을 보여준다. 동혁이와 같은 학생들에게는 기댓값의 개념을 형성할 수 있도록 MCFAS-1이나 MCFAS-2와 같은 중심 MCFAS를 더 작은 최소단위 활동으로 분해하여 제공함으로써 더욱 풍부한 주변 MCFAS를 형성할 수 있도록 할 필요가 있다.

중심 MCFAS는 수업 및 과제의 성격이나 분석의 목적에 따라 통합되거나 분해될 수 있으며, MCFAS에 저장된 학습자의 수학 개념 형성 활동에 대한 정보는 다른 내용 영역의 개념이나 타 교과의 개념을 형성하

는 활동에 관한 정보를 제공해 줄 수 있을 것이다.

객체 지향성 : 객체성, 매개성

MCFAS는 객체 지향성을 가진다. 즉, MCFAS는 주체와 객체의 관계를 통해 설명 가능한 객체성과 주체, 도구, 객체의 관계를 통해 설명 가능한 매개성을 가진다. 이는 활동 체계의 주요한 특성이며 MCFAS에서도 핵심이 되는 성질이 된다. 활동이론에서 주체의 욕구는 추상적이거나 고립적으로 존재하지 않으며, 객체에 연결됨으로써 구체적 동기로 드러난다. 동전을 던지는 두 가지 방법의 게임을 선택하고 선택한 이유를 정당화하는 과정에서 학생의 욕구는 맥락에 따라 그것이 A학점을 받기 위함일 수도, 자신의 선택이 옳다는 것을 교사나 다른 학생들에게 증명하고 싶은 욕구 일수도, 그저 안전한 학점을 받고자 하는 욕구일 수도 때로는 직관적인 선택이었을 수도 있다. 하지만 실제 문제 해결 과정에서 학생의 다양한 욕구는 주어진 문항에 집중하여 질문에 목적에 맞는 객체를 생성해 냄으로써 드러날 수 있었으며, 이는 개념 형성으로 이어진다. [그림 4-25] ~ [그림 4-28]의 도식에서 대부분의 화살표는 객체와 객체, 객체와 도구와 같이 객체를 매개로 연결되는데, 이러한 객체 활동을 통해 수학 개념 형성이 일어나고 있음을 확인할 수 있다.

활동이론에서 주체는 도구나 방법 등을 매개하여 객체로 연결된다. MCFAS에서 또한 모든 주체는 수학적 또는 비수학적 표현이라는 도구를 통해 객체를 생성하며, 생성된 객체는 다시 동시다발적으로 도구의 자리에 앉기도 한다. 학생이 게임 2를 선택한 이유에 운, 운이 좋다, 운이 좋을 확률 등의 객체를 생성할 때, 운은 감정을 도구로 하여 생성된 객체이지만 동시다발적으로 확률과 함께 운이 좋다는 객체의 도구로 이동하기도 한다. [그림 4-27] 건우의 MCFAS의 확장을 예로 들면, 건우는 MCFAS-3에서 용준이의 MCFAS-1의 도구를 자신의 도구로 활용하는 동시에 용준이의 주변 MCFAS의 객체인 생물의 유전을 도구로 활용하며, MCFAS-3에서 생성된 객체를 MCFAS-4에서 용준이의 모델과 자신의 모델을 비교하는 활동의 도구로 활용하고 있는 것을 확인할 수 있

다. 이 활동은 거의 동시다발적으로 이루어졌으며, MCFAS를 통해 분석하지 않으면 영향을 주고받은 관계를 확인하기 어렵다. 이는 학습 활동을 미시적으로 분석하는 데에서 오는 어려움이기도 하지만 활동이론의 역동성을 바탕으로 수학 개념 형성 과정을 가장 유기적으로 설명할 수 있는 장점이기도 하다.

학생들은 주장을 정당화하기에 의미 있다고 생각하는 주요한 객체를 중심으로 자신의 생각을 정교화하고자 노력했다. 학습자가 초기에 객체한 객체는 도구의 사용이 능숙해지면서 점차 정교한 방향으로 변화하며, 이 과정에서 학습자는 모순을 해결하면서 자신이 생성한 객체를 정당화하고자 한다. 예를 들어 게임 1이 안정적이라고 말한 근거들 즉, 존재하는 원소들을 안정적이라는 실존의 세계로 빼고 넣는 과정을 통해 객체는 재개념화가 된다. 또한 MCFAS에서의 객체는 자연스럽고 직관적인 사고방식으로 인해 친숙한 개념 통해 생성되고 확장된다. 수학적 맥락을 최대한 배제하도록 설계된 수업을 통해 학생들이 생성하는 객체는 수학 개념 형성 과정의 분석 대상이 되는 수학적 기호나 말이 아니다. 교사의 관점에서 이름이 없는 개념일 수도 있고, 무의미한 개념일 수도 있지만, 과제를 해결하는 동안 학생들이 자연스럽고 직관적으로 생성하는 객체가 된다. 이것이 이 연구에서 수업을 통해 수학적 개념 형성 과정을 관찰하고자 하는 이유이다. 학생들은 다양한 환경과의 상호작용을 통해 객체와 객체 사이들을 이동하고 재개념화하는 과정을 통해 단순한 수학적 부호, 기호, 상징만이 아닌, 그것을 조작하는 방법에 대한 정보, 학생의 생각 및 표현 방식 그리고 정의적인 요인까지도 포함하는 객체를 재생성해 낼 수 있었다.

맥락성

MCFAS는 맥락성을 가진다. 활동이론은 인간 활동에 대한 분석을 위, 아래 그리고 안과 밖으로 확장시키며, 그 분석의 방향을 이동하면서 두 방향을 연결하기 위해 노력한다. MCFAS에서 수학 개념을 형성한다는 뜻은 미시적, 행위적 관점에서 뿐만 아니라, 거시적, 맥락적 관점에서의

개념을 형성한다는 것이다. 1회차에서 매우 적은 양의 발화를 보인 건우는 용준이의 일차함수의 그래프, 생물의 유전 등과 같은 도구에 의해 많은 영향을 받아 2회차에서 다양한 객체를 생성하게 되었다. 표면적으로는 건우보다 수학 성적이 높은 용준이의 도구-생산 활동에 의해 건우가 영향을 받은 것으로 보이나 MCFAS의 구성 요소를 통해 구체적으로 분석하게 되면 더욱 다양한 맥락을 볼 수 있다. 용준이는 선택한 게임을 정당화할 때 그 주장을 하는 데 있어서 주저한 부분이 있는지와 관련된 질문에 건우가 자신과 같은 일차함수의 그래프를 사용해 두 게임의 차이를 표현하였고, 다른 학생들이 건우의 모델을 좋은 모델이라고 선택하고 각자의 모델과 비교한 점이 마음에 걸리는 부분이라고 답하였다. 용준이는 MCFAS-1에서부터 도구로 사용하였던 일차함수의 그래프로 자신의 주장을 더욱 발전시키기 위해 두 함수의 차이가 총합의 차이를 나타낸다는 객체를 생성하였는데, 이는 표준편차 모델을 도출하는 데 있어서 적절하지 못한 도구-생산 활동이었으며, 이 과정에서 계산의 오류 또한 드러났다. 용준이의 활동은 행위의 영역에서는 적절하지 못한 도구-생산 활동 및 계산의 오류를 보였으나, 맥락의 영역에서 그 원인을 더욱 풍부하게 바라볼 수 있었다. MCFAS의 객체 지향성은 맥락성 안에서 생태학적 현상으로서의 활동을 통해 더욱 풍부하게 설명될 수 있는 것이다.

변형 가능성

마지막으로 MCFAS는 구성 요소의 변형 가능성을 가진다. MCFAS는 수학 개념 형성 활동을 구성하는 요소들 간의 관계와 개인적, 사회문화적인 변화를 추적 관찰할 수 있게 한다. 다양한 형태로 구성된 MCFAS는 그 자체로 연구의 대상이 되기도 하며 수학 개념 형성 과정의 분석을 위한 방법론이기도 하다. 다양한 맥락의 주체, 학습 공동체, 내용 영역, 교수학적 지원, 학습 도구 및 학습 환경 등은 모두 MCFAS를 구성하고 있다. 한 가지 요소의 변화가 전체의 변화와 연결되어 있다는 체계의 특성은 MCFAS의 구성을 변형하고 이 결과를 입증하는 연구가 지속되어야 하는 동기이자 목적이 될 것이다.

이상의 MCFAS의 기본 성질을 MCFAS의 개념적 틀의 구성적 측면에서 보면, 통합성, 확장 가능성 및 변형 가능성은 MCFAS의 구조적 틀에 관한 성질이며, 객체성, 매개성 및 맥락성은 MCFAS의 수학 개념적 성질이라 할 수 있다.

제 5 장 요약 및 제언

이 연구에서는 수학 개념 형성의 관점에서 활동 체계를 개발하고 그 활동 체계를 통한 분석 방법을 제안하는 문헌 연구와 개발된 활동 체계의 개념적 틀의 분석 방법을 적용해 수업을 분석한 질적 사례연구를 수행하였다. 인간 활동을 다양한 맥락에서 설명 가능한 활동이론을 기반하여 활동 체계로 수학 개념 형성 활동을 설명할 수 있는 가능성을 확인하기 위하여 두 가지 연구 질문에 답하였다. 첫째, 수학 개념 형성의 관점에서 활동이론의 구성 요소는 어떠한 맥락과 특성을 가지며, 이를 기반으로 한 활동 체계는 어떻게 정의될 수 있는가? 둘째, 수학 개념 형성 활동은 수학 개념 형성 활동 체계를 통해 어떻게 분석될 수 있는가? 셋째, 분석 결과를 통해 도출된 수학 개념 형성 활동 체계의 성질은 무엇인가?

첫 번째 연구 질문에 답하기 위하여 수행한 문헌 연구는 다음과 같다. 먼저 활동 체계의 구성 요소를 수학 개념 형성의 관점에서 구체화하기 위한 목적으로 활동이론의 전개 방향을 고찰하고, Vygotsky와 Leont'ev로부터 Engeström에 이르는 마르크스주의, 변증법적인 철학적 흐름과 Peirce에서 Popper로 이어지는 기호학, Mead에서 Trevarthen으로 이어지는 상징적 상호작용론의 철학적 흐름의 논의를 통해 MCFAS의 구성 요소가 가질 수 있는 특성을 식별하였다. 이후 식별된 구성 요소의 특성을 수학 개념 형성의 관점에서 더욱 구체화하기 위해 구성주의의 관점을 바탕으로 한 수학 개념 형성 이론을 검토하였다. 구체적으로 급진적 구성주의자들과 사회적 구성주의자들의 다양한 관점을 검토하고, 구성주의자들이 서로의 관점을 첨예하게 비판하고 방어하는 과정이 결국 수학 지식의 구성에 있어 개인의 인지 발달을 위한 노력과 사회적 상호작용이 모두 조화를 이룰 필요가 있다는 방향성을 통해 수학 개념 형성 과정을 활동이론의 분석틀을 통해 분석해야 하는 필요성을 엿보았다. 다음으로 Vygotsky와 Berger의 개념 형성 발달 이론을 비교하여 일반적 개념과

수학적 개념의 차이점을 식별하며, 구상화 이론에 대한 Sfard와 Confrey의 관점의 차이를 통해 수학적 객체의 특성을 검토하였다.

위와 같은 이론적 논의에 더하여 제 2 장에서는 마르크스주의, Badiou의 존재론 등의 철학적 관점을 바탕으로 MCFAS의 구성 요소로써 객체 및 도구를 정의하고, 상호주관성, Badiou의 주관성의 개념 및 행위주체성의 관점을 바탕으로 주체를 정의하였다. 이 연구에서 객체는 '수학 개념을 형성하기 위해 생성하는 수학적 또는 비수학적 표현, 발화, 행동, 감정 등'을 의미하며 '객체를 생성하기 위해 사용하고 조작하는 모델이나 다른 개념'를 도구라 정의하였다. 또한 주체를 '수업 안, 과제의 맥락 안에 있는 학습자인 동시에 수업 밖, 개인의 사회문화적 맥락 안에 있는 학습자'라고 정의하고 '주체의 변환 과정'을 '수학 개념 형성 과정'으로 간주할 수 있는 근거를 마련하였다.

첫 번째 연구 질문에 대한 최종적인 답을 위해 MCFAS 및 MCFAS의 주체, 객체, 도구를 포함하여 공동체, 분업, 규칙의 구성 요소를 정의하고, 이를 토대로 MCFAS의 개념적 틀을 제안하였다. MCFAS는 '학습자가 성취하기를 바라는 수학 학습 목표를 중심으로 주체, 도구, 객체, 규칙, 공동체, 분업의 구성 요소들이 상호작용을 통해 수학 개념을 형성하는 전 과정을 최소단위로 하는 활동 체계'로, 공동체는 '수업 공간의 공동체(수업 공간에 있는 친구들과의 관계, 수업 교사와의 관계, 교실 환경 등)와 수업 밖 공간에서 공동체(교우관계, 집안에서의 관계, 가정 환경 등)', 분업은 '수업 안·밖에서의 묵시적 위계를 기반으로 한 학습자가 놓인 상황이나 과제의 맥락을 통해 맡겨진 역할', 규칙은 '과제에서 드러난 명시적 규칙 및 수업 안에서 일어난 암묵적 합의와 수업 밖의 환경으로부터 기인한 규칙 생성'으로 정의하였다.

활동이론을 수학 교실 맥락에서 교수·학습을 위한 분석틀로 채택한 연구는 매우 부족하며(Batiibwe, 2019) 더욱이 수학 개념 형성 활동을 분석 대상으로 하는 연구는 거의 없다. 주체, 도구, 객체, 공동체, 분업, 규칙을 수학 개념 형성의 관점에서 구체화하는 개념적 틀인 MCFAS를 구성하고 이를 통해 수학 교실을 활동이론의 접근 방식을 통해 관찰함으로

써 해당 수학 개념의 형성 과정에 대한 분석 외에도 다양한 접근 방식과 도구를 사용하여 다양한 수학 개념이나 수학 교수·학습 상황을 수용할 수 있도록 하는 또 다른 시각을 제공해 줄 수 있을 것이다.

두 번째 연구 질문에 답하기 위하여 수행한 연구는 다음과 같다. 우선 MCFAS의 개념적 틀을 기반하여 학생의 수학 개념 형성 과정을 구체적으로 분석하기 위해 첫째, 수업 안에서 과제의 상황적 맥락을 바탕으로, 활동 체계의 구성 요소 사이의 상호작용 및 주변 활동을 바라보는 미시적 관점 및 수업 밖의 개인의 사회문화적 맥락을 바탕으로 활동 체계의 구성 요소 사이의 상호작용 및 주변 활동을 바라보는 거시적 관점을 넘나들며 분석하기 위해 중심 도구-생산 활동, 객체 활동 그리고 규칙-생산 활동을 중심으로 구체적으로 분석하는 방법과, 둘째, MCFAS의 행위 및 맥락의 영역을 종합적으로 분석하기 위한 방법을 마련하였다.

이후 MCFAS의 개념적 틀에 기반한 분석 방법을 통해 실제 수업 사례를 상세하게 분석하는 질적 사례연구를 수행하였다. 수업 분석은 다음과 같이 이루어졌다. 먼저 학습 목표를 중심으로 네 가지의 최소단위 중심 MCFAS를 네 명의 학생별로 총 열여섯 가지의 최소단위 중심 MCFAS를 구성하고, 이를 도구-생산 활동 및 객체 활동, 규칙-생산 활동 및 맥락으로 나누어 활동을 구체적으로 분석하였다. 이를 보다 종합적으로 분석하기 위하여 주체의 변환을 중심으로 하여, MCFAS의 행위(주체, 객체, 도구)의 영역 및 맥락(공동체, 분업, 규칙)의 영역을 통해 학습자의 개념 형성 과정을 확인하였다.

마지막으로 세 번째 연구 질문에 답하기 위해 수행한 연구는 다음과 같다. 먼저 학습자별로 네 가지 중심 MCFAS 및 주변 MCFAS로의 확장 도식의 사례를 제시하였다. 이는 제 4 장 제 2 절에서 중심 MCFAS와 주변 MCFAS를 통한 수학 개념 형성 활동에 관한 구체적인 분석 결과 및 제 4 장 제 3 절에서 MCFAS의 행위의 영역에 초점을 맞춘 주체의 수학적 도구 사용이 능숙해지는 과정과 MCFAS의 맥락의 영역에 초점을 맞춘 주체 간 상호작용을 통해 수학 개념을 합의하는 과정을 통한 주체의 수학 개념 형성 과정을 분석한 결과를 종합하여 제시한 결과이

다. 확장 도식 사례를 통해 학생들이 수학 개념을 형성하는 과정에서 다른 학생들의 영향을 더 많이 받거나 자신의 이전 활동을 수정하고 보완하는 활동을 활발하게 할수록 즉, 유의미한 객체 생성 활동을 많이 할수록 더 많은 MCFAS들이 화살표로 연결될 수 있다는 것을 발견할 수 있었다. 이때 학생들은 자신의 중심 및 주변 MCFAS뿐 아니라 다른 학생들의 중심 및 주변 MCFAS와도 영향을 주고받으며 수학 개념을 형성한다는 것을 알 수 있었다. 또한 수업 중 학생의 발화의 양이나 활동지의 내용이 많다고 해서 유의미한 객체를 더 많이 생성하거나 다른 학생의 활동에 영향을 주는 수학적 활동을 하였다고 볼 수는 없다는 결과를 도출할 수 있었다.

이상의 연구 결과를 바탕으로 최종적으로 MCFAS의 대표적인 네 가지 성질인 단위(통합성, 확장 가능성), 객체 지향성(객체성, 매개성), 맥락성 그리고 변형 가능성을 도출하였다. MCFAS의 개념적 틀의 구성적 측면에서 보면, 통합성, 확장 가능성 및 변형 가능성은 MCFAS의 구조적 틀에 관한 성질이며, 객체성, 매개성 및 맥락성은 MCFAS의 개념적 성질이라 할 수 있다.

최근 수학교육으로의 테크놀로지의 적용과 함께 교육에서의 활동이론의 적용 범위가 점차 넓어지고 있다(Kwong & Churchill, 2023; Batiibwe, 2019). 인류는 전례 없던 팬데믹의 상처를 안게 되었지만, 기술과 인류애를 통해 이를 치유하고, 그 반석 위에 새로운 형태의 문명의 시대를 세워나가고 있는 것이다. 언택트 시대로부터 온택트 시대로의 변화는 우리에게 더 이상 낯선 미래의 이야기가 아니다. 교육계 또한 팬데믹의 초기에는 학력 격차, 교육 시스템의 부족 등의 다양한 문제점을 발견하고 진단하는 연구들이 쏟아졌으며(Onyema, et al., 2020; Schleicher, 2020), 이제는 무엇을 가르쳐야 하며, 어떻게 가르쳐야 하는지 등에 대한 고민을 지속하고 있다(Zhao & Watterston, 2021; Daniel, 2020). 학교 교육은 온라인, 원격 교육 등을 지원하는 전략을 개발하는 것을 넘어서, 그 어느 때보다 빠른 속도로 교수·학습 방법에 대한 새로운 대안 또한 학교로 받아들이며 크게 변화하고 있다. 팬데믹은 특히 학교 교육에 큰 혼란

을 주었지만, 이전의 수많은 연구자들로부터 제안된 학습자 중심의 교수·학습 방법이 이를 계기로 전에 없던 다양한 기회를 얻게 된 것이다. MCFAS는 학습 활동의 행위와 맥락으로서 도구 및 사회문화적 환경을 수용하는 개념적 틀을 제공함으로써 학교 수학교육에서 급변하는 사회적 환경 및 테크놀로지의 적용 등을 비롯한 다양한 학습 환경의 변화를 그 체계로 수용하고 그 기준을 마련해 나갈 수 있는 방법을 제공해줄 수 있을 것이다. 이를 통해 학습자의 수학 개념 형성 과정을 다양한 측면에서 이해하고 이에 따른 교수·학습을 지원할 수 있는 방법 또한 제공해 줄 수 있을 것이다.

이 연구의 수업 사례는 중등학교 확률과 통계 영역과 관련한 경우만을 보여주므로, 더욱 풍부한 맥락의 사례연구를 통해 MCFAS의 개념적 틀과 성질을 보완해 나갈 수 있는 지속적인 후속 연구가 필요할 것이다. 또한 수학 개념 형성과 관련한 새로운 시각에 기반한 발전적 연구를 통해 수학 교사에게 학생들의 수학의 감춰진 경계들을 발견하고 학생들의 개념 형성 과정을 관찰할 수 있는 보다 실천적인 방안을 제공하고, 학생들에게는 그동안 학교 수학에서 소외되었던 그들의 수학에 힘을 실어줄 수 있기를 바란다.

참 고 문 헌

강영란, 김진환(2014). 소집단 활동체계와 초등영재의 소수와 합성수 개념 형성 사이의 관계 분석. **학교수학, 16**(3), 613-631.

김남수, 황세영(2013). 우리나라 수업 전문성 신장 활동의 탐색: 문화역사활동이론의 관점에서. **한국교원교육연구, 30**(4), 163-188.

김동렬(2022). CHAT 를 활용한 초등 예비교사들의 광합성 실험활동 체계 분석. **교육논총, 42**, 19-36.

김명숙, 최운실(2021). 마을공동체 미디어 활동가들의 활동체계와 확장학습 경험 연구. **평생교육학연구, 27**, 199-229.

문성재(2020). **포괄적 유물론에 기반한 수학 교수-학습 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

박연정, 조일현(2014). 학습관리시스템의 대시보드 설계를 위한 학습자 중심 요구분석: 분석과 설계 도구로서 활동이론의 적용. **교육공학연구, 30**(2), 221-258.

방정숙(2001). 사회수학적 규범과 수학교실문화. **수학교육학연구, 11**(2), 273-289.

방정숙(2004). 초등수학교실문화의 개선: 사회수학적 규범과 수학적 관행. **수학교육학연구, 14**(3), 283-304.

송진웅, 정용재(2006). Peirce 의 귀추법에 관한 이론적 고찰을 통한 과학교육적 함의 탐색. **한국과학교육학회지, 26**(6), 703-722.

유연주(1999). **사회적 구성주의 수학교육론 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

윤창국, 박상옥(2012). 문화역사적 활동이론의 이론적 발전과 평생교육연구에 주는 시사점. **평생교육학연구, 18**(3), 113-139.

이경화(1999). 수학교육과 구성주의. **수학교육학연구, 9**(1), 51-80.

이현명, 심영택, 김남균, 김민조(2019). 활동체계이론에 기반한 A 대학 연구자 학습공동체 활동 사례 연구. **학교와 수업 연구, 4**(1), 1-24.

이형상(2018). Engestrom의 활동 이론에 근거한 지리지식의 협력적 창출 분석. **한국지리환경교육학회지, 26**(3), 73-90.

임해미(2007). **프로젝트기반 수학수업에 대한 사례연구.** 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

정용재(2004). **연결주의적 관점의 개념학습 방안으로서 '전형적 인식 상황(TPS)'의 변화.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

정용재(2014). '탐구공동체'의 과학 교육적 함의에 대한 이론적 고찰 : '과학 교실 탐구공동체'를 향해서. **Journal of the Korean Association for Science Education, 34**(3), 303-319.

정진수, 이응주(2013). 문화-역사적 활동 이론 (CHAT: Cultural-Historical Activity Theory) 에 기초한 생명과학 수업 활동 분석. **생물교육, 41**(3), 446-458.

조성민, 노선숙(1999). 수학 교수-학습에서의 구성주의적 관점. **교육과학연구, 30**, 105-123.

편지윤(2019). 청소년 독자의 읽기 활동체제 분석. **독서연구, 51,** 169-210.

홍진곤(1999). 수학적 인식에서 '활동'이 갖는 의미에 대한 고찰. **수학교육학연구** 9(1), 151-165.

Aspers, P., & Corte, U. (2019). What is qualitative in qualitative research. *Qualitative sociology, 42,* 139-160.

Badiou, A. (2007). *Being and event*. London: Continuum.

Badiou, A. (2009). *Logics of worlds*. London: Continuum.

Badiou, A. (2018). 일시적 존재론. (박정태 역). 서울 : 이학사. (원저 2013년 출판)

Badiou, A., & Engelmann, P.(2015). 알랭 바디우, 공산주의 복원을 말하다. (김태옥 역). 서울 : 숨쉬는책공장. (원저 2012년 출판)

Barab, S., & Kirshner, D. (2001). Guest editors' introduction: Rethinking methodology in the learning sciences. *The Journal of the Learning Sciences, 10*, 5 - 15.

Barab, S., Schatz, S., & Scheckler, R. (2004). Using activity theory to conceptualize online community and using online community to conceptualize activity theory. *Mind, Culture, and Activity, 11*(1), 25-47.

Bartolini Bussi, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In *Proceedings of the fifteenth annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 1-16).

Batiibwe, M. S. K. (2019). Using Cultural Historical Activity Theory to understand how emerging technologies can mediate teaching and learning in a mathematics classroom: a review of literature. *Research and practice in technology enhanced learning*, 14(1), 12.

Beatty, I. D., & Feldman, A. (2012). Viewing teacher transformation through the lens of cultural-historical activity theory (CHAT). *Educational As Change, 16*(2), 283-300.

Ben-Zvi, D. (2006, July). Scaffolding students' informal inference and argumentation. *In Proceedings of the seventh International conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6).

Berger, M. (2004). Heaps, complexes and concepts (part 1). For the *Learning of Mathematics, 24*(2), 2-6.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham: Springer.

Brown, T. (2020). *A contemporary theory of mathematics education research*. Springer.

Burnard, P., & Younker, B. A. (2008). Investigating children's musical interactions within the activities systems of group composing and arranging: An application of Engeström's Activity Theory. *International Journal of Educational Research, 47*(1), 60-74.

Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational researcher, 28*(2), 4-15.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education, 23*(1), 2-33.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher, 19*(6), 2-10.

Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator, 15*(3), 6-11.

Confrey, J. (1994). A theory of intellectual development. *For the learning of mathematics, 14*(3), 2-8.

Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. *For the learning of mathematics, 15*(1), 38-48.

Confrey, J., & Costa, S. (1996). A critique of the selection of“Mathematical objects” as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International journal of computers for mathematical learning, 1*(2), 139-168.

Daniel, S. J. (2020). Education and the COVID-19 pandemic. *Prospects, 49*(1), 91-96.

David T. Conley & Elizabeth M. French(2014). Student Ownership of Learning as a Key Component of College. *American*

Behavioral Scientist. 58(8), 1018 - 1034.

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 2*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Davydov, V. V., & Radzikhovskii, L. A. (1985). Vygotsky's theory and the activity-oriented approach in psychology. *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives*, 35-65.

De Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.

De Freitas, E., Sinclair, N., & Coles, A. (Eds.). (2017). *What is a mathematical concept?*. Cambridge University Press.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2011). *The Sage handbook of qualitative research*. sage.

Derrida, J. (1993). Le problème de la genèse dans la philosophie de Husserl. *Revue de Métaphysique et de Morale, 98*(1), 279.

Dick, W. (1991). An instructional designer's view of constructivism. *Educational technology, 31*(5), 41-44.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. *Epistemological foundations of mathematical experience*, 160-202.

Drodge, E. N., & Reid, D. A. (2000). Embodied cognition and the mathematical emotional orientation. *Mathematical thinking and learning, 2*(4), 249-267.

Engeström, Y. (2008). *From teams to knots: Activity-theoretical studies of collaboration and learning at work*. Cambridge University Press.

Engeström, Y. (2009). *The future of activity theory: A rough draft*. Learning and expanding with activity theory, 303-328.

Engeström, Y. (1994). *Training for change: New approach to instruction and learning in working life*. Geneva: International Labour Office.

Engeström, Y. (2011). From design experiments to formative interventions. *Theory & psychology, 21*(5), 598-628.

Engeström, Y. (2014). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Cambridge University Press.

Engeström, Y., Engeström, R. & Kärkkäinen, M. (1995). Polycontextuality and boundary crossing in expert cognition: Learning and problem solving in complex work activities. *Learning and Instruction, 5*, 319 - 336.

Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R. L. (Eds.). (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge University Press.

Engeström, Y. & Sannino, A. (2011). Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts: A methodological framework. *Journal of Organizational Change Management, 24*(3), 368-387.

Engeström, Y., Sannino, A., & Virkkunen, J. (2014). On the methodological demands of formative interventions. *Mind, Culture and Activity, 21*(2), 118 - 128.

Ernest, P. (1994). Social constructivism and the psychology of mathematics education. *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematical education,* 62-71.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Routledge.

Feldman, A., & Weiss, T. (2010). Understanding change in teachers' ways of being through collaborative action research: A cultural - historical activity theory analysis. *Educational action research, 18*(1), 29-55.

Fichtner, B. (1985). Learning and learning activity. In E. Bol, J. P. P. Haenen & M. Wolters(Eds.), *Education for cognitive development*. Den Haag: SVO/SOO (pp. 47 - 62).

Florian, B., Glahn, C., Drachsler, H., Specht, M., & Fabregat Gesa, R. (2011). Activity-based learner-models for learner monitoring and recommendations in Moodle. In *Towards Ubiquitous Learning: 6th European Conference of Technology Enhanced Learning, EC-TEL 2011, Palermo, Italy, September 20-23, 2011. Proceedings 6* (pp. 111-124). Springer Berlin Heidelberg.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics. 12*, 133-150.

Gallagher, S., & Lindgren, R. (2015). Enactive metaphors: Learning through full-body engagement. *Educational Psychology Review, 27*, 391-404.

Gergen, K. J. (1995). Social construction and the educational process. *Constructivism in education, 17*, 39.

Gould, H., Murray, D., & Sanfratello, A. (2012). *Mathematical modelling handbook*. Bedford: The Consortium for Mathematics and Its Applications.

Grootenboer, P., Edwards-Groves, C., & Choy, S. (2017). Practice theory and education: Diversity and contestation (pp. 1-21). Springer Singapore.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). E*ffective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches.* Jossey-Bass.

Hannafin, M. J., & Land, S. M. (1997). The foundations and assumptions of technology-enhanced student-centered learning environments. *Instructional science, 25*, 167-202.

Hashim, N. H., & Jones, M. L. (2007). Activity theory: A framework for qualitative analysis.

Hasu, M. & Engeström, Y. (2000). Measurement in action: An activity-theoretical perspective on producer-user interaction. *International Journal of Human-Computer Studies, 53*(1), 61 - 90.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn?. *Educational psychology review, 16*, 235-266.

Hsueh, Y. (1997). *Jean Piaget, spontaneous development and constructivist teaching*. Unpublished doctoral dissertation, Harvard University.

Hutto, D. D., Kirchhoff, M. D., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: Rethinking educational design in mathematics. *Educational Psychology Review, 27*, 371-389.

Ilyenkov, E. V. (1982). *The dialectics of the abstract and the concrete in Marx's "Capital."* Moscow: Progress.

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm?. *Educational technology research and development, 39*, 5-14.

Kärkkäinen, M. (1996). Comparative analysis of planning trajectories in Finnish and American teaching teams. *Nordisk Pedagogik, 16*, 167 - 190.

Kalof, L., & Dan, A. (2008). *EBOOK: Essentials of Social Research*. McGraw-Hill Education (UK).

Kaptelinin, V., & Nardi, B. A. (1997). Activity theory: Basic concepts and applications. In *CHI'97 extended abstracts on human* *factors in computing systems* (pp. 158-159).

Kaptelinin, V., & Nardi, B. A. (2006). *Activity theory in a nutshell*. In V. Kaptelinin & B. A. Nardi (Eds.), Acting with technology: Activity theory and interaction design (pp.29-72). Cambridge: MIT Press.

King, G., Keohane, R. O., & Verba, S. (2021). *Designing social inquiry: Scientific inference in qualitative research*. Princeton university press.

Kirschner, P. A., Sweller, J. & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75 - 86.

Krajcik, J. S., & Blumenfeld, P. C. (2006). *Project-based learning*. na.

Kuutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. In B. A. Nardi (Ed.), *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction* (pp.17-44). Cambridge, MA: The MIT Press.

Kwong, C. Y. C., & Churchill, D. (2023). Applying the activity theory framework to analyse the use of ePortfolios in an international baccalaureate middle years programme sciences classroom: A longitudinal multiple-case study. *Computers & Education*, 104792.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.

Land, S., & Jonassen, D. (2012). *Theoretical foundations of learning environments*. Routledge.

Larvor, B. P. (2019). Book Review: What is a Mathematical Concept?

edited by Elizabeth de Freitas, Nathalie Sinclair, and Alf Coles. *Journal of Humanistic Mathematics, 9*(2), 309-322.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. (1991). Situating learning in communities of practice.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality. Prentice Hall*, Englewood Cliffs.

Liaw, S. S., & Huang, H. M. (2016). Investigating learner attitudes toward e-books as learning tools: based on the activity theory approach. *Interactive Learning Environments, 24*(3), 625-643.

Liszka, J. J. (2019). 퍼스 기호학의 이해. (이윤희 역). 서울 : HUINE. (원저 1996년 출판).

Lim, W., Lee, J. E., Tyson, K., Kim, H. J., & Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussions: Follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 377-398.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM, 51*(6), 869-884.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Marx, K. (1909). *Capital.* Vol. 1. London: William Glaisher.

Marx, K. (2007). 정치경제학 비판 요강 Ⅰ. (김호균 역). 서울 : 그린비. (원저 1941년 출판)

Mathews, D., & Clark, J. (2003). *Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the Central Limit Theorem.* Unpublished paper.

Merrill, M. D. (1991). Constructivism and instructional design.

Educational technology, 31(5), 45-53.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from" Case Study Research in Education."*. Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104.

McClain, K., & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. J*ournal for research in mathematics education, 32*(3), 236-266.

McNicholl, J. (2013). Relational agency and teacher development: a CHAT analysis of a collaborative professional inquiry project with biology teachers. *European Journal of Teacher Education, 36*(2), 218-232.

Mead, G. H. (1934). *Mind, self, and society*. Chicago: The University of Chicago Press.

Medin, D. L., & Smith, E. E. (1984). Concepts and concept formation. *Annual review of psychology, 35*(1), 113-138.

McKenney, S., & Reeves, T. C. (2021). Educational design research: portraying, conducting, and enhancing productive scholarship. *Medical Education, 55*(1), 82-92.

Milner-Bolotin, M. (2001). *The Effects of topic choice in Project-Based instruction on Undergraduate physical Science Students' Interest Ownership and Motivation*, The University of Texas at Austin: 207.

Nardi, B. A. (1996). Activity theory and human-computer interaction. *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction, 436*, 7-16.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 159-174.

Nussbaumer, D. (2012). An overview of cultural historical activity theory (CHAT) use in classroom research 2000 to 2009. *Educational review, 64*(1), 37-55.

Onyema, E. M., Eucheria, N. C., Obafemi, F. A., Sen, S., Atonye, F. G., Sharma, A., & Alsayed, A. O. (2020). Impact of Coronavirus pandemic on education. *Journal of Education and Practice, 11*(13), 108-121.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 259-282.

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 27-46.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence. Basic Book*, New York.

Piaget, J. (1964). *Development and learning. In R. E. Ripple & V. N. Rockcastle (Eds.),* Piaget rediscovered: Report of the conference on cognitive studies and curriculum development. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Popper, K. R. (1972). *Objective knowledge: An evolutionary approach.* Oxford: Clarendon Press.

Popper, K. R. & Eccles, J. C. (1977). *The self and its brain*. Berlin: Springer.

Potari, D. (2013). The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective. *ZDM, 45*, 507-519.

Puonti, A. (2004). *Learning to work together: Collaboration between authorities in economic-crime investigation.* Vantaa: National Bureau of Investigation.

Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 189-194.

Rogoff, B. E., & Lave, J. E. (1984). *Everyday cognition: Its development in social context*. Harvard University Press.

Roth, W. M. (2009). *Activity, Subjectification, and Personality.*

Roth, W. M. (2020). Activity theory in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education,* 20-23.

Roth, W. M. (2012). Cultural-historical activity theory: Vygotsky's forgotten and suppressed legacy and its implication for mathematics education. *Mathematics Education Research Journal, 24*, 87-104.

Rouse, J. (2007). Practice theory. *In Philosophy of anthropology and sociology*. North-Holland.

Saussure, F. M. (2011). *Course in general linguistics.* Columbia University Press (pp. 59 - 71).

Schleicher, A. (2020). The Impact of COVID-19 on Education: Insights from" Education at a Glance 2020". OECD Publishing.

Schmittau, J. (1993). Vygotskian Scientific Concepts: Implications for Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 15*, 29-39.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Interaction or intersubjectivity? A reply to Lerman. J*ournal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 191-209.

Sinclair, N., & Jablonka, E. (2022). Mathematics Learning: Structured Ways of Moving With. *In The Palgrave Handbook of*

Embodiment and Learning (pp. 419-435). Cham: Springer International Publishing.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* sage.

Stallworth-Stevens, H. (1995). *Varying high school mathematics students' verbal interactions to test Vygotsky's theory of concept formation*. University of San Francisco.

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for research in mathematics education, 25*(6), 711-733.

Stone, L. D., Underwood, C., & Hotchkiss, J. (2012). The relational habitus: Intersubjective processes in learning settings. *Human Development, 55*(2), 65-91.

Trevarthen, C. & Hubley, P. (1978). Secondary intersubjectivity: Confidence, confiding and acts of meaning in the first year. In A. Lock (Ed.), *Action, gesture and symbol: The emergence of language.* London: Academic Press (pp. 183 - 230).

Trust, T. (2017). Using cultural historical activity theory to examine how teachers seek and share knowledge in a peer-to-peer professional development network. *Australasian Journal of Educational Technology, 33*(1), 98-113.

Uden, L. (2007). Activity theory for designing mobile learning. *International Journal of Mobile Learning and Organisation, 1*(1), 81-102.

Vinner, S. (2020). Concept development in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education,* 123-127.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational studies in mathematics, 26*, 275-298.

Von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese, 80*, 121-140.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 3-17.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E. Souberman. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Cambridge Massachusetts: MIT Press.

Waycott, J., Jones, A., & Scanlon, E. (2005). PDAs as lifelong learning tools: an activity theory based analysis. *Learning, Media and Technology, 30*(2), 107-130.

Wenger, E. (2011). Communities of practice: A brief introduction.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Williams, J. S., Wake, G. D., & Boreham, N. C. (2001). School or college mathematics and workplace practice: An activity theory perspective. *Research in mathematics education, 3*(1), 69-83.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education, 27*(4), 458-477.

Zhao, Y., & Watterston, J. (2021). The changes we need: Education post COVID-19. *Journal of Educational Change, 22*(1), 3-12.

Zurita, G., & Nussbaum, M. (2007). A conceptual framework based on activity theory for mobile CSCL. *British Journal of Educational Technology, 38*(2), 211-235.

부 록 1

-활동지-

[1 회차]

시험 대신 동전 던지기를 해요!

선생님은 시험 대신 학생들에게 게임을 할 수 있는 선택권을 주기로 하였습니다! 각 학생은 동전을 열 번 던지는 두 가지 게임 중 하나를 선택할 수 있습니다.

앞면 뒷면

게임 1	게임 2
동전을 열 번 던집니다. 앞면이 나오면 2점을 얻고, 뒷면이 나오면 1점을 잃습니다.	동전을 열 번 던집니다. 앞면이 나오면 100점을 얻고, 뒷면이 나오면 99점을 잃습니다.

당신의 성적은 게임을 통해 얻은 최종 점수에 따라 다음과 같이 결정됩니다:

- -10점 보다 낮으면 E를 받습니다.
- -10점에서 0점이면 D를 받습니다.
- 1점에서 10점이면 C를 받습니다.
- 11점에서 99점이면 B를 받습니다.
- 100점 이상이면 A를 받습니다.

Leading Question

게임 1과 게임 2 중에서 어떤 게임을 고르겠습니까? 그 이유는 무엇입니까? 밝혀준 이유를 정당화해보세요.

1. 게임에 영향을 주는 요인에는 어떤 것이 있을까요?

2. 1.에서 말한 게임에 영향을 주는 요인 중 어떤 요인을 통제하면(가정하면) 당신의 생각을 수학적으로 정당화하기 좋을까요?

3. 당신이 통제한(가정한) 요인을 고려하여 누군가가 게임 1과 게임 2를 할 때 동전을 열 번을 던져 얻을 수 있다고 생각하는 점수를 각각 추측해 보세요. 그렇게 생각한 이유를 적어주세요.

3-1. 이제 3.의 두 추측 값을 비교하세요. 이 두 게임에 대해 어떤 결정을 내릴 수 있습니까?

4. 우리는 3번에서 추측해본 가장 적절한 추측 값을 **기댓값**이라는 용어로 정의하려고 합니다. 앞에 해결한 문제들을 바탕으로 기댓값을 정의해 보세요. 단어 또는 수학적 기호로 나타내 봅시다. 수학적 기호로 표현하기 어렵다면 2. 또는 3.으로 돌아가 통제한(가정한) 요인을 변화시켜 더 적절한 추측 값을 다시 찾아보는 것도 좋겠지요?

4-1. 게임 1에서 동전을 열 번 던졌을 때 점수의 기댓값은 얼마입니까? 게임 2에서 동전을 열 번 던졌을 때 점수의 기댓값은 얼마입니까? 자신이 정의한 기댓값을 바탕으로 계산해 보세요.

4-2. 그렇다면 게임 1과 게임 2의 기댓값을 통해 당신이 게임을 선택한 이유를 정당화할 수 있을까요? 그 이유를 밝혀주세요.

활동 1. 게임 1을 직접 해보세요! 동전을 열 번 던지고 아래표에 결과를 채우세요. 맨 아래 줄에 결과를 합산하세요.

던지는 횟수	앞면 또는 뒷면	점수
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
총		

활동 1-1. 게임 1의 기댓값이 질문 3의 결과와 일치합니까? 일치하지 않는다면, 그 이유를 설명하세요.

활동 2. 게임 2를 직접 해보세요! 동전을 열 번 던지고 아래표에 결과를 채우세요. 맨 아래 줄에 결과를 합산하세요.

던지는 횟수	앞면 또는 뒷면	점수
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
총		

활동 2-1. 게임 2의 기댓값이 질문 4의 결과와 일치합니까? 일치하지 않는다면, 그 이유를 설명하세요.

활동 2-2. 게임 1을 했을 때와 같은 점수를 얻었습니까? 그렇다면 이유를 설명하고 그렇지 않다면 게임 1과 게임 2는 무엇이 다른 지 설명하세요.

[2 회차]

5. 4.에서 당신이 정의하고 구했던 게임 1과 게임 2의 기댓값과 활동 1과 활동 2를 통해 실제로 동전을 던져서 나온 점수는 얼마나 큰 차이가 있습니까? 다른 친구들의 결과는 어땠는지 그 결과를 종합해 비교해봅시다.

	나의 기댓값	나의 활동결과	차이
게임 1			
게임 2			

	( )의 기댓값	( )의 활동결과	차이
게임 1			
게임 2			

	( )의 기댓값	( )의 활동결과	차이
게임 1			
게임 2			

	( )의 기댓값	( )의 활동결과	차이
게임 1			
게임 2			

5-1. 나의 기댓값과 친구들의 기댓값이 그 차이를 설명하는 데 보편적으로 타당한가요? 그렇지 않다면 보편적으로 타당한 기댓값을 함께 도출해보세요.

5-2. 합의된 기댓값을 통해 당신이 게임을 선택한 이유를 정당화할 수 있을까요?

당신은 여전히 기댓값을 통해 당신이 선택한 게임의 이유를 정당화하기 힘들다는 것을 알게 되었습니다. 그렇다면 당신의 선택을 정당화할 다른 방법을 찾아야 하겠죠? 힌트를 드리겠습니다. 게임 1과 게임 2의 차이를 고려해 봅시다.

6. 게임 1보다 게임 2에 얼마나 많은 차이가 있는지를 고려하는 수학적 모델을 만들 수 있습니까? 모델에 반드시 포함해야 하는 것이 있습니까?

6-1. 친구들이 만든 모델을 비교하세요. 다른 친구들의 모델은 당신의 모델과 어떤 유사점 및 차이점이 있습니까?

친구의 모델 하나를 적어주세요.	
유사점	차이점

6-2. 가장 적합한 모델을 정해주세요.

7. 선생님이 고려한 모델은 **표준편차**입니다. 표준편차의 공식을 인터넷에서 찾아보세요. 당신의 모델과 어떤 유사점과 차이점을 가지고 있습니까? 당신의 모델은 이미 그 자체로 훌륭합니다. 그럼에도 불구하고 당신의 모델에 더 수정해야 할 사항이 있습니까?

8. 이제 당신이 게임 1 또는 게임 2를 선택한 이유를 당신의 모델을 통해 수학적으로 정당화할 수 있습니까?

9. 당신의 선택이 더욱 유리한 결과를 낳기 위해서 선생님께 어떠한 제안을 할 수 있을까요? 그 이유는 무엇인가요?

부 록 2

-반구조화된 면담지-

[수업 안, 과제의 상황적 맥락]

1. 나는 이 수업을 받기 전에 기댓값과 표준편차에 대하여 학습한 경험이 있나요?

2. 나는 내가 선택한 게임을 정당화할 때, 그 주장을 하는 데 있어서 주저한 부분이 있었나요? 있었다면 어떠한 이유 때문이었을까요?

3. 수업 중 나의 의견이 받아들여지지 않았을 때가 있었나요? 어떤 기분이었고, 어떻게 행동했나요?

[수업 밖, 학습자의 사회·문화적 맥락]

4. 부모님은 나의 이야기를 잘 들어주나요?

5. 다른 사람에게 자신의 주장이 받아들여지지 않을 때, 혹은 다른 사람이 자신의 선택이 옳지 않다고 말할 때 어떠한 태도를 취하나요?

6. 내가 옳다고 생각하거나 꼭 이루고 싶은 일에 대하여 부모님 혹은 친구들을 설득하기 위해 어떤 노력을 해보았나요?

7. 낯설거나 어색한 환경에서 나는 어떻게 행동하나요?

8. 친밀한 가족들 혹은 친구들 간의 관계에서 주로 어떤 성격인가요?

9. 학교에서 선생님들께 나는 어떤 학생인가요? 어떤 학생이었으면 좋을 것 같나요?

10. 나는 수업을 함께한 친구들과 평소에 어떤 관계를 유지하고 있나요? 그 친구들 사이에서 주도적으로 행동하나요? 아니면 수동적으로 친구들의

의견을 따르나요?

11. 내가 가장 좋아하는 과목은 무엇인가요? 그리고 내가 가장 잘 할 수 있는 것은 무엇이라고 생각하나요?

12. 나의 수학 능력은 최상, 상, 중, 하, 최하 중 어디에 속한다고 생각하나요?

Abstract

Investigating students' mathematical concept formation based on Activity Theory

: Focusing on the features and cases of the 'Mathematical Concept Formation Activity System'

Park Soomin

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

Activity Theory is a theory that views learning and the development of consciousness as the result of activity-centered social interactions. It goes beyond the perspective that focuses solely on individual cognitive development and provides a theoretical framework for understanding and analyzing learning in various contexts, such as society, culture, and communities.

This study is motivated by the desire to explore the possibility of explaining the process of mathematical concept formation through an

activity system based on activity theory, which can account for human activities in various contexts. To achieve this, the study aims to develop an activity system from the viewpoint of mathematical concept formation, propose an analysis method, and derive the features of the mathematical concept formation activity system through the analysis of class cases based on these.

To achieve the research objectives, the study formulated three research questions and provided answers to them. First, what are the contexts and features of the components of activity theory from the viewpoint of mathematical concept formation, and how can a mathematical concept formation activity system be defined based on these components and features? Second, how can mathematical concept formation activities be analyzed through the mathematical concept formation activity system? Third, what are the features of the mathematical concept formation activity system derived from the analysis results?

The development research of Activity Theory is not only the subject of study but also a general research methodology. This study consists of two parts, in line with the nature of research on Activity Theory development. Firstly, it constructs a conceptual framework of the activity system by defining the features of the activity system and its components from the viewpoint of mathematical concept formation through literature research. It also proposes an analysis method. Secondly, it conducts a qualitative case study that analyzes specific and comprehensive actual-class cases using the proposed analysis method.

To answer the first research question, this study examined theories that align with the components of activity theory from the perspective of mathematical concept formation and derived their contexts and characteristics. Based on this, the study defined the MCFAS(Mathematical Concept Formation Activity System). The key findings of the study are as follows: the study conceptualized the components of the activity system in accordance with the features of mathematical concept formation. Using these components, the study constructed the conceptual framework of the MCFAS, which serves as a tool to expand the analysis of mathematical concept formation activities from both up-down and outward-inward perspectives. The conceptual framework distinguishes perspectives of analysis into micro perspectives, which include the learning space and time within the classroom, situational context of tasks, and macro perspectives, which encompass the learning space and time outside the classroom and the individual's socio-cultural context. It demonstrates the potential for diverse networking of these perspectives.

To answer the second research question, this study proposed an analysis method for the defined mathematical concept formation activity system (MCFAS) and used it to analyze mathematical concept formation activities in a case of a class targeting 9th-grade middle school students. The key findings of the study are as follows: Based on the learning objectives of the instructional tasks, the study constructed 16 central MCFASs and analyzed each central MCFAS in concrete terms by considering neighbor MCFASs such as tool-producing activities, object activities, and rule-producing activities as the units of analysis.To more comprehensively analyze the process of mathematical concept formation through the MCFAS, the study focused on the domains of action and context within the conceptual framework of the MCFAS. This study examined how mathematical concepts are formed by observing the process of developing proficiency in using mathematical tools and the process of reaching a consensus on mathematical concepts through interactions among individuals.

To answer the third research question, this study proposed an extended diagram of the mathematical concept formation activity system based on the analysis results and derived four features of the MCFAS. The key findings of the study are as follows: The activity system in activity theory is not a highly predictive theory but a set of fundamental principles that constitute a general conceptual framework. Through the results of this research, a series of principles that make up the MCFAS, which can be applied to the mathematics teaching and learning environment, were derived by modifying and enhancing the basic principles of the activity theory model.

First, MCFAS exhibits a unit feature. MCFAS sets the simplest unit as the minimum unit activity goal for mathematical concept formation, as determined by the researcher, and establishes criteria to avoid reducing or distorting it based on the outcomes. The minimum unit MCFAS can be further decomposed into smaller units or integrated, depending on the objectives of instruction or analysis, while retaining integrability and potential for expansion. Second, the MCFAS exhibits object-orientedness. The objects created by students may appear meaningless from the teacher's perspective, but objects that students naturally and intuitively generate while solving tasks become part of mathematical concepts. Through interaction with various environments, students move between objects and reconceptualize them, thereby reproducing objects that encompass not only simple mathematical symbols and symbolic representations but also information on how to manipulate them, students' thinking and expression styles, and even affective factors. Third, the MCFAS exhibits contextuality. Activity theory strives to connect various

directions as it shifts the focus of analysis towards human activity. Forming mathematical concepts within the MCFAS means forming concepts not only from a micro, behavioral perspective but also from a macro, contextual perspective. The object-orientedness of the MCFAS can be explained through ecological phenomena within the context. Lastly, the MCFAS exhibits adaptability. MCFAS enables the tracking and observation of dynamic relationships between components and individual, sociocultural changes. The changes in one component are connected to changes in the whole, and this feature serves as a motivation and necessity for ongoing research to explore the transformation of MCFAS's composition and validate its outcomes.

The conceptual framework and analysis method proposed through this study have the potential to provide a way to accommodate the changes in diverse learning environments, including the rapidly changing social environment and the application of technology in school mathematics education. They offer the possibility of establishing criteria to adapt to these changes and continue to progress. By providing a conceptual framework that embraces tools and sociocultural environments as domains of action and context of learning activities, it can enable a comprehensive understanding of learners' mathematical concept formation processes from various perspectives and provide methods to support teaching and learning accordingly.

keywords : activity theory, mathematical concept formation activity system, activity theory, object, tool, constructivism

Student Number : 2017-31482