# Lead-time을 고려한 가격최적화

남 익 현*

《目 次》



## Ⅰ. 서 론

전통적으로 다루는 규범적 대기행렬모형에서는 고객의 도착률이 주어질 경우 투자비를 고려하여 적절한 처리율을 결정하고 이로 인해 고객의 평균대기시간을 일정수준으로 관리하고자 한다. 그런데 일상생활에서는 주어진 것으로 상정되는 도착률이 외부변수가 아니라 우리의 의사결정에 의해 간접적으로 결정되어지는 경우가 많다. 즉 고객의 평균대기시간이 길어질 경우 고객불만으로 인해 고객의 도착률이 감소되고 이차적으로 고객의 평균대기시간이 감소되어 결국 이러한 과정을 거쳐 균형점으로 수렴하게 될 것이다. 또한 서비스에 부과하는 가격에 따라서도 고객의 도착률이 영향을 받을 것이고 이 또한 고객의 평균대기시간에 영향을 줄 것이다. 본 논문에서는 이러한 관계에 대한 내용을 살펴보고자 한다.

고객의 대기시간이 중요하다는 것은 더 이상 강조할 수 없지만 실제로 한 제지업체의 경우 제품조달기간을 단축시켜 보다 많은 물량과 높은 가격을 얻어 수익 개선에 결정적인 역할을 하였다.

## Ⅱ. 모형

우선 모형에 사용되는 부호에 대해 정의하기로 하자. 일반적으로 대기행렬모형에서 사용되는 부호를 사용한다.

* 서울대학교 경영대학.

λ : 고객의 도착률

W : 조달기간, 고객 평균대기시간

μ : 처리율

p : 서비스 가격

π : 이익

서비스를 제공하는 데에는 별도의 변동비가 들지 않는 것으로 가정하자. 이 경우 우리는 이익함수인 $\pi = p\lambda$을 최대화하고자 한다. 그런데 앞서 언급한 경우와 같이 도착률($\lambda$)은 수요함수로부터 다음의 특성을 갖는다고 가정하자.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} < 0 , \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial W} < 0 .$$

이들 식이 의미하는 바는 고객의 도착률은 가격이 상승함에 따라 감소하며 고객의 평균대기시간이 길어짐에 따라 감소한다는 것을 뜻한다. 이러한 가정은 우리가 일반적으로 받아들일 수 있는 것이다.

그런데 추가적으로 고객의 도착과 처리가 지수분포에 따라 발생한다고 가정하고 서비스제공자가 하나라고 가정하면 다음과 같은 균형조건을 나타내는 관계식을 얻게 된다.

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda(p, W)}$$

이상의 내용을 요약하면 다음과 같은 최적화모형으로 표시할 수 있다.

$$Max_{\{W\}} p\lambda(p, W)$$

subject to

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda(p, W)}$$

이를 해석하여 보면 의사결정변수는 가격과 평균대기시간이지만 이들 둘 사이에 제약식으로 표시된 균형방정식을 만족하여야 하므로 실질적으로는 의사결정변수를 단일화할 수 있다. 우리는 평균대기시간을 단일화된 의사결정변수로 사용하기로 하였다.

## Ⅲ. 예제

보다 구체적인 답을 구하고자 선형모형을 살펴보기로 하자. 고객의 도착률 $\lambda$는 가격과 고객대기시간에 대해 선형적인 관계를 갖고 또한 상호 독립적으로 영향을 받는다고 하자. 이를 식으로 표시하여 보면 다음과 같다.

$$\lambda(p,W) = \mu - ap - bW$$

여기서 a, b는 양의 상수를 나타낸다. 분석의 편의상

$$\mu \le 3\sqrt{b}$$

를 가정한다.

물론 a, b는 안정상태를 위한 조건으로

$$\lambda(p,W) < \mu$$

을 만족시키는 범위 안에서만 의미가 있다. 우리는 a, b가 양의 상수로 가정하였으므로 당연히 성립하고 단지 $0 \le \lambda(p, W)$이 필요하게 된다. 이 경우에 있어 균형방정식을 구해보면

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda(p,W)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ap + bW} = W$$

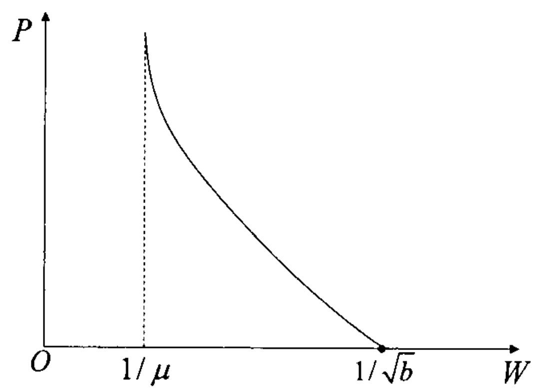
$$\Leftrightarrow bW^2 + apW - 1 = 0$$

위의 이차방정식을 풀어보면 고객대기시간과 가격의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$W = \frac{-ap + \sqrt{a^2 p^2 + 4b}}{2b}$$

또한 가격을 대기시간의 함수로 표시하면 다음을 구할 수 있다.

$$p = \frac{1 - bW^2}{aW}$$




〈그림 1〉

W의 정의역은 $p \geq 0$으로부터 $W \leq 1/\sqrt{b}$ 이고 다음의 식에서 $\frac{1}{\mu} \leq W$ 이므로 결론적으로 $1/\mu \leq W \leq 1/\sqrt{b}$ 이 된다.

우선 위 식을 이용하여 안정상태를 위한 범위를 보다 구체적으로 구해보도록 하자.

$$0 \leq \lambda < \mu$$

$$\Leftrightarrow ap + bW \leq \mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \leq W$$

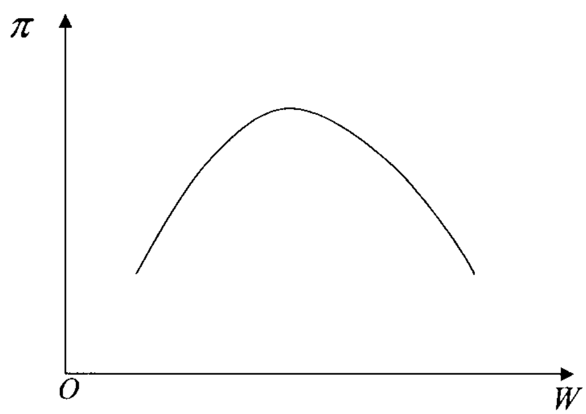
또한 위의 식을 이용하여 이익함수를 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\pi &= p\lambda \\
&= p(\mu - ap - bW) \\
&= \frac{1-bW^2}{aW}\left(\mu - a\frac{1-bW^2}{aW} - bW\right) \\
&= \frac{1-bW^2}{aW}\left(\mu - \frac{1}{W}\right) \\
&= \frac{-b\mu W}{a} + \frac{b}{a} + \frac{\mu}{aW} - \frac{1}{aW^2}\,.
\end{aligned}$$

이러한 이익함수를 W에 대해 미분을 하면

$$\frac{d\pi}{dW} = \frac{-b\mu}{a} - \frac{\mu}{aW^2} + \frac{2}{aW^3}\,.$$

이러한 일차미분함수의 개략적인 형태를 구해 보면 다음과 같다.



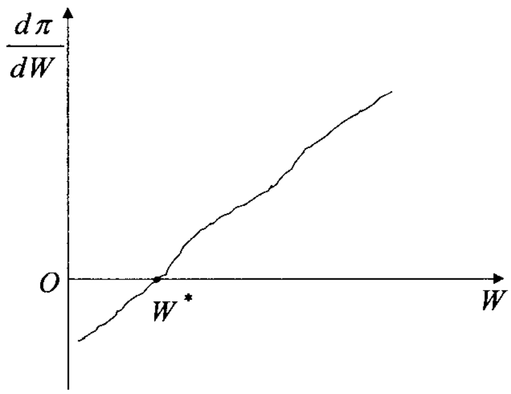

〈그림 2〉

우리는 $\mu \le 3\sqrt{b}$의 가정으로부터 $\frac{d^2\pi}{dW^2} = \frac{2\mu}{aW^3} - \frac{6}{aW^4} \le 0$을 구할 수 있고 따라서 이익함수는 W에 대해 오목함수가 된다.

따라서 일차미분함수를 0으로 하는 가격이 최적해가 된다.

$$\frac{d\pi}{dW} = 0$$

$$\Leftrightarrow b\mu W^3 + \mu W - 2 = 0$$




〈그림 3〉

위 방정식의 해를 $W^*$로 표시하면 우리는 최적 가격을 구할 수 있다.

$$p^* = \frac{1 - bW^{*2}}{aW^*}$$

## Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 대기행렬모형을 이용하여 이익최적화문제를 다루고자 하였다. 일반적인 대기행렬 모형에서는 최적의 서비스율을 결정하고자 한다. 최근 신속한 서비스 충족이 강조되면서 보다 빠른 서비스를 제공하는 것이 중요한 경쟁력의 원천 중 하나로 대두되어 왔다. 많은 경우 신속한 서비스를 제공하는 것을 무기로 삼아 보다 많은 고객을 확보하고자 하는 기업들이 많았다.

본 논문에서는 신속한 서비스를 제공할 때 이것이 중요한 경쟁력의 원천임에는 분명하지만 신속한 서비스에 따른 추가적인 영향을 고려하여야 한다는 것이다. 즉 일반적으로 고객의 수

요는 서비스시간이 신속해짐에 따라 늘어나고 가격이 오름에 따라 감소한다. 따라서 무조건적으로 신속한 서비스를 추구하여 일정한 서비스 시간을 약속할 경우 수요증가에 따른 대기시간 증가를 감당하기가 힘들 수가 있다. 즉 가격과의 관계도 고려하여 적절한 서비스시간을 구할 수 있다는 것이다. 그리하여 적절한 가격과 시간이 동시에 고려되어 이익을 최대화하는 모형을 다루고자 하였다.

## 참 고 문 헌

1. Kleinrock, Leonard, Queueing Systems, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
2. Martinich, Joseph S., Production and Operations Management, John Wiley & Sons, Inc., 1997.