Envy-Free Division과 Truth-Telling

남 익 현*

《目 次》

Ⅰ. 들어가며

본 글에서는 물건을 분배하는데 있어 발생할 수 있는 문제에 대해 다루어 보고자 한다. 우선 두 명의 사람이 하나의 물건을 분할하여 나누고자 하는 경우를 살펴보자. 분배의 대상이 객관적인 시장가치가 있는 경우 분배는 기본적으로 zero-sum game이 되어 합의가 이루어지기 힘들고 각자의 bargaining power에 의해 영향을 받을 것이다. 한 사람이 더 많이 차지하면 다른 사람의 몫이 줄어들기 때문에 서로 합의를 보기 힘들다. 예를 들어 둘이 함께 노력하여 얻은 100원을 어떻게 나눌 것인지에 대한 합의는 어렵고 각자 자신이 제공한 자원의 가치가 크다고 주장을 할 것이다.

하지만 해당 물건에 대해서 각자의 평가는 주관적인 경우를 상정하면 상호 이익이 되는 분할이 가능하여 진다. 가령 피자를 나누는데 있어 어떤 사람은 dough를 선호하고 어떤 사람은 topping을 좋아하는 경우를 생각해 보면 된다. 이와 같은 경우 모든 사람의 선호가 동일한 것이 아니라 각 부위별 선호도가 다르기 때문에 서로 좋아하는 부분으로 분할할 수 있는 가능성이 생기는 것이다. 분석의 편의상 분할의 대상이 되는 피자가 선형의 막대기 모양이라고 가정하자. 이러한 막대형 피자는 다양한 crust와 topping이 섞여 만들어졌다. 각 개인은 피자에 대해 0 이상의 효용을 느낀다. 즉 더 먹는다고 해서 효용이 감소되는 경우는 없다. 이런 경우 피자를 어떻게 나누는 것이 좋을지에 대해 생각해보자.

* 서울대학교 경영대학 교수

Ⅱ. 공정 분배

우선 다루고자 하는 것이 공정한 분배이다. 두 명이 하나의 물건을 나눌 때 각자가 느끼는 총효용의 1/2 이상을 차지하게 될 때 공정한 분배라고 정의하기로 하자. 시장가치가 동일한 물건에 대해서는 공정한 분배방안이 하나밖에 없을 것이다. 즉 100원을 두 사람으로 나눌 경우 50원씩을 가질 수 밖에 없기 때문이다. 하지만 개인적인 선호가 주관적일 경우 공정한 분배는 여러 가지 방안이 존재한다. 이러한 의미에서 공정한 분배를 수행하는 방법은 무수히 많다. 그 중 하나를 생각해보면 사람 1로 하여금 자신의 효용가치를 고려하여 총효용을 이등분하도록 피자를 나눈다. 그리고 사람 2로 하여금 둘 중 하나를 선택하게 한다. 그러면 사람 1은 자신의 총효용의 1/2를 갖게 되고 사람 2는 자신의 총효용의 1/2 이상을 갖게 된다. 따라서 이러한 분배는 공정 분배가 되는 것이다.

Ⅲ. envy-free 분배

한 걸음 더 나아가 분배를 하였을 때 다른 사람이 차지한 부분보다 자신이 차지한 부분의 효용이 더 클 때를 envy-free division이라고 하자. 이러한 효용의 크기를 비교할 때 당사자의 효용함수를 고려하여 사용한다. 상대방의 효용함수에 대해서는 알 수도 없고 알 필요도 없는 것이다. 3 인 사이에서 발생하는 이러한 envy-free division에 대해서 연구가 많이 되어 있다. 본 글에서는 강조점이 다르기 때문에 2인 사이의 envy-free division에 대해 간단하게 살펴보기로 하자.

우리의 피자 예를 살펴보자. 사람 1과 사람 2에게 각자 자신의 총효용을 이등분하는 점을 알려 달라고 한다. 제 3자가 두 사람으로부터 받은 2개의 점의 중간 점을 계산하여 피자를 자른다. 피자를 자른 뒤 각자 선택한 점보다 추가 피자가 있는 부분을 나누어 주면 두 사람 모두 자신의 총효용의 1/2 이상을 얻게 되고 또한 다른 사람이 차지한 부분의 효용은 자신의 기준에서 볼 때 총효용의 1/2 이하가 되기 때문에 envy-free division이 되는 것이다. 이러한 envy-free division은 물론 앞서 정의한 공정한 분배의 정의도 충족시킴을 알 수 있다.

여기서 생각해보아야 할 문제가 위에서 언급한 envy-free division 방식이 양 당사자에게 최상의 효용을 제공하는지 여부이다. 최상의 효용이라 함은 공정한 배분이 되면서 두 사람의 총효용이 최대화되는 경우를 말한다. 막대기 피자의 예에서 언급을 하면 여기서 제시한 envy-free division은 피자를 두 조각 내어 두 사람 모두 만족하도록 하나씩을 할당하는 것이다. 하지만

다른 방안은 crust와 topping이 섞여 있을 텐데 이를 여러 조각으로 나누어 crust를 좋아하는 사람에게는 crust 조각위주로 할당을 하고 topping을 좋아하는 사람에게는 topping이 들어간 조각들을 주면 양자의 효용을 더욱 증가시킬 수 있을 것이다. 이와 관련하여 중요한 것이 양 당사자가 자신의 선호도에 대한 정보를 제공하는 순서이다. 즉 사람 1이 자신의 효용의 이등분 점을 먼저 보고하고 이를 사람 2가 관찰할 경우 사람 2는 자신의 효용의 이등분점을 사람 1이 제시한 점에 극한적으로 인접한 점을 제시하여 자신의 효용을 극대화 시키고자 할 것이다. 따라서 먼저 정보를 제시하는 것이 아니라 두 사람이 제 3자에게 정보를 제시하고 상대방의 정보를 관찰하지 못하게 하는 것이 매우 중요하다. 따라서 양자의 효용을 극대화 하기 위해서는 양자가 자신들의 효용함수에 대해 정직하게 알린다는 전제가 매우 중요하다. 이렇듯 자신의 효용에 대해 정직하게 알릴 것인지가 현실적으로 매우 중요하며 분배의 실현가능성에 결정적인 역할을 한다고 할 수 있다.

Ⅳ. truth-telling

본 글에서 핵심적으로 다루고자 하는 내용은 자신의 총효용을 이등분하는 점에 대해 진실되게 알릴 것인지를 살펴보고자 한다. 지금까지 다룬 공정한 배분과 envy-free division 모두 당사자들이 솔직하게 자신의 효용에 대해 밝힌다는 전제하에 논리가 전개되었다. 따라서 과연 당사자들이 자신의 효용을 솔직히 밝히는 것이 유효한 가정인지를 확인할 필요가 있다. 우리가 확인하고자 하는 것은 당사자들이 truth-telling을 하는 것이 Nash 균형을 이루는지 여부이다. 여기서는 counter example을 통해 truth-telling이 Nash equilibrium이 아님을 보이고자 한다. 여기서 당사자들 사이에 상대방의 효용함수에 대해서는 서로 알지 못하고 자신의 효용함수만을 아는 비대칭정보 상황이 존재한다고 한다. 일단 상대방의 효용함수에 대해서는 분포만을 알 수 있다는 것으로 하자. 그리고 다른 가정하에서 truth-telling이 타당할 가능성에 대해 살펴보기로 하자.

〔예제〕

피자를 일차원 좌표로 표시하여 〔0,4〕로 나타내기로 하자. 두 사람의 당사자가 있는데 사람 1과 사람 2의 총효용을 이등분하는 점은 전체의 중간 부분에 해당하는 〔1,3〕에서 균일분포(uniform distribution)를 따른다고 가정하자. 사람 1의 좌표 t에서의 효용밀도함수를 $v_1(t)$

로 표시하자. 현재 사람 1의 type은 좌표상에서 '1'로 표시되는데 이는 사람 1의 경우 피자의 〔0,1〕 부분과 〔1,4〕 부분이 동일한 효용을 제공한다는 것을 말한다. 즉 type이라 함은 당사자의 피자의 총효용을 이등분하는 위치를 나타내는 것이다. 사람 1은 사람 2의 type에 대해 알지 못하고 단지 사람 2의 type인 y가 U〔1,3〕, 즉 〔1,3〕에서 균일분포를 따른다는 것을 알고 있다. 우선 사람 2는 자신의 type에 대해 정직하게 밝힌다는 가정하에 사람 1이 정직하게 대응하는 것이 유리한지를 살펴보고자 한다. 우리는 type=1인 사람 1이 truth-telling인 경우와 자신의 type을 거짓으로 밝히는 경우를 비교하고자 한다. 두 가지 경우의 사람 1의 기대효용을 계산하여 보자. 거짓으로 자신의 type을 밝히는 경우에는 자신의 type을 $1+\alpha$로 밝힌다고 하자(단, $\alpha \geq 0$). 즉 자신의 선호도에 대해 $\alpha \geq 0$만큼 과장을 하는 것을 고려해보자. 사람 1과 사람 2가 피자를 나누는 방법은 앞에서 언급한 envy-free division의 방법에 따른다고 하자.

〔truth-telling case〕

$$U_1^T = \int_1^3 \{0.5 + \int_1^{\frac{1+y}{2}} v_1(t)dt\}0.5dy$$

〔non-truth-telling case〕

$$U_1^N = \int_1^{1+\alpha} \{0.5 - \int_1^{\frac{1+\alpha+y}{2}} v_1(t)dt\}0.5dy + \int_{1+\alpha}^3 \{0.5 + \int_1^{\frac{1+\alpha+y}{2}} v_1(t)dt\}0.5dy$$

$$= \int_1^{1+\alpha} \{0.5 - V_1(\frac{1+\alpha+y}{2}) + V_1(1)\}0.5dy + \int_{1+\alpha}^3 \{0.5 + V_1(\frac{1+\alpha+y}{2}) - V_1(1)\}0.5dy$$

여기서 구한 기대효용이 $\alpha=0$의 경우 truth-telling case와 동일해 지는 것을 확인할 수 있다. 솔직하게 type을 밝히지 않은 경우의 기대효용(U_1^N)을 α에 대해 미분을 하면

$$\frac{d}{d\alpha}U_1^N = \{0.5 - V_1(\frac{1+\alpha+1+\alpha}{2}) + V_1(1)\}0.5 + \int_1^{1+\alpha} \{-v_1(\frac{1+\alpha+y}{2})\}0.5 * 0.5dy$$

$$-\{0.5 + V_1(\frac{1+\alpha+1+\alpha}{2}) - V_1(1)\}0.5 + \int_{1+\alpha}^3 v_1(\frac{1+\alpha+y}{2})0.5 * 0.5dy$$

이 식에서 $V_1(1)=0.5$를 이용하면

$$\frac{d}{d\alpha}U_1^N = 0.5 - V_1(1+\alpha) + 0.25\{\int_{1+\alpha}^{3} v_1(\frac{1+\alpha+y}{2})dy - \int_{1}^{1+\alpha} v_1(\frac{1+\alpha+y}{2})dy\}$$

여기서 $\frac{1+\alpha+y}{2} = x$ 로 치환하여 정리하면

$$\frac{d}{d\alpha}U_1^N = 0.5 - 2V_1(1+\alpha) + 0.5\{V_1(2+\alpha/2) + V_1(1+\alpha/2)\}$$

$\alpha = 0$ 에서

$$\frac{d}{d\alpha}U_1^N = 0.5 - 2V_1(1) + 0.5\{V_1(2) + V_1(1)\} = -0.25 + 0.5V_1(2) \geq 0.$$

따라서 type = 1인 사람 1의 경우 솔직하게 자신의 type을 밝히는 경우, 즉 $\alpha = 0$ 이라고 하는 것보다 자신의 type을 과장하여 밝히는 것($\alpha \geq 0$)이 더 유리하다는 것을 알 수 있다.

보다 구체적인 경우를 살펴보기 위해 사람 1의 누적 효용함수를 다음과 같다고 하자.

$$V_1(x) = \begin{cases} 0.5x, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}, 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

이 경우

$$\frac{d}{d\alpha}U_1^N = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}$$

이 되고 이를 0으로 놓고 극대값이며 최대값을 구하면 $\alpha^* = \frac{4}{3}$ 이 되고 따라서 type = 0인 사람 1은 자신의 type이 7/3이라고 얘기하는 것이 기대효용으로 최적임을 알 수 있다.

이 예를 통해 우리는 envy-free division이 truth-telling constraints를 충족시키지 못함

을 알 수 있다. 현실적으로 envy-free division이 실현되기 위해서는 당사자들이 자신의 type에 대해 진실되게 밝힌다는 전제가 필요하다. 따라서 truth-telling constraints가 충족되지 못함은 envy-free division의 타당성을 크게 저해하는 것이다.

Ⅴ. 결론

주관적인 가치 판단의 대상이 존재하고 이를 분할하여 분배하고자 할 때 적용 가능한 기법으로 제시되는 것이 envy-free division이다. 이는 각자가 자신의 정당한 몫을 챙길뿐더러 상대방이 차지하는 것보다 자신이 차지하는 것의 효용이 크게 된다는 장점이 있다. 그런데 이러한 envy-free division의 현실적인 적용가능성이 높아지기 위해서는 넘어야 할 장애가 당사자들이 자신의 type을 정직하게 밝히는지 여부이다. 이 글에서 제시한 envy-free division mechanism에서는 당사자들이 자신의 효용 이등분점을 정직하게 알려준다는 전제 하에 유효한 것이었다. 하지만 앞의 예에서도 밝힌 바와 같이 truth-telling constraints는 일반적으로 충족되지 않았다. 이 글에서 다룬 내용에 추가적으로 연구할 과제로 우리가 다룬 것은 envy-free division의 하나의 방식이다. 즉 두 사람이 자신의 총효용을 이등분하는 점을 제시하고 제시된 두 점의 중간을 기준으로 분할하는 것을 다루었다. 이러한 방식 이외의 다양한 envy-free division이 존재할 것인데 일반적인 envy-free division에 대해서도 truth-telling constraints가 충족되지 않을 것인지는 더 생각해 보아야 할 문제이다. 가령 양당사자의 효용을 이등분하는 점의 중간을 기준으로 분할하기로 하였는데 중간이 아니라 어느 정도의 비율로 나눌 것인지에 대한 합의도 게임의 시작을 위해서는 선결되어야 할 것이다.

그리고 우리의 예에서는 상대방의 효용 이등분점에 대한 분포를 알고 있다고 가정하고 기대효용함수를 이용하여 문제를 풀었다. 그런데 현실적으로 분배를 하고 해당 대상에 대한 가치가 주관적일 경우 이러한 분포를 모르는 경우도 많이 발생할 것이다. 즉 상대방의 효용함수에 대한 분포를 안다는 것이 지나치게 엄격한 가정일 수 있다. 이런 경우에는 내 자신의 효용 이등분점에 대해 경우에 따라 과장하였다가 오히려 반대편의 조각을 분배 받아 손해를 볼 수도 있다. 이러한 위험을 고려할 경우 자신의 효용 이등분점에 대해 솔직하게 밝히는 것이 유리할 수도 있을 것이다. 따라서 어떤 경우에는 truth-telling constraints가 충족되면서 envy-free division을 이행할 수 있게 된다. 즉 자신이 거짓으로 효용을 알려주었을 때 돌아올 수 있는 손해를 고려하고 상대방에 대한 정보가 전혀 없을 경우 정직하게 효용을 알리는 것이 유리할 수 있는 것이다. 이러한 경우에는 risk-averse 등의 개념을 고려하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Julius B. Barbanel and Steven J. Brams, Cake Division with Minimal Cuts: Envy-Free Procedures for 3 Persons, 4 Persons, and Beyond, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, Oct. 2001.
2. jean Tirole, The Theory of Industrial Organization, MIT Press, 1988.