

경로선택에서의 정보가치

서울대학교 경영학과 남 익현

Abstract

In this paper, we study the value of information in the traffic flow. When we know the number of cars planning to use a road and/or the number of cars currently using the road, we can take another route to our destination and thus save our time depending on the situation.

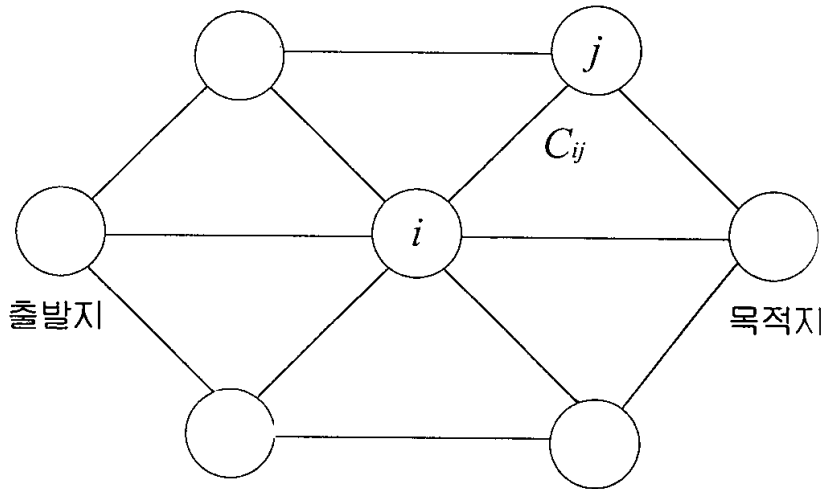
In deriving the value of information, we basically use the equilibrium concept in game theory. For some typical cases, we calculate the values added when we have the adequate information. And then the value of information should be compared with the cost for investing the facility which offers the information.

1. 서 론

목적지로 가기 위해 자동차를 타거나 운전해 가면서, 아마도 누구나 한번 쬐은 다음과 같은 생각을 했으리라 본다. 즉, 교통신호를 적절히 제어하면 교통문제가 어느 정도 완화될텐데 현재의 도로능력하에서 교통혼잡 개선을 위해 실제로 이러한 생각을 실행에 옮기기 위해서는, 우선적으로 해결해야 할 것이 어떠한 교통 제어시스템을 도입했을 때 들어가는 투자비용과 그로 인한 혜택(도로에서 허비하는 시간의 절감으로 줄어드는 비용)의 분석일 것이다. 비용의 경우 투자 대상에 따라 다양한 결과가 나타나므로 학문적 가치가 적다고 볼 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 비용과 혜택 중 혜택에 관한 분석을 시도한다. 보다 구체적으로는 확률적으로 변동하는 교통상황에 대한 정보가 즉각적으로 교통 자동제어시스템에 입력되도록 하거나 교통방송을 통해 여러 운전자에게 알려져 그에 대하여 즉시 반응할 수 있도록 할 때 교통혼잡을 상당히 줄일 수 있다. 평균적으로 최단시간이 걸리는 경로 상에서 어떤 교통사고로 심한 체증이 발생할 경우, 이를 교통방송을 통하여 파악하게 되면 이러한 정보를 통하여 다른 길로 우회함으로써 시간을 절감할 수 있다. 또한 인공위성을 통해 차 안에서 현재의 교통상황을 파악할 수 있는 시스템(Geographical Positioning System)이 현재 개발되어 시험중인데, 이것도 운전자로 하여금 최단경로를 선택할 수 있도록 도와줄 뿐더러 그렇게 함으로써 사회 전체적으로 교통혼잡을 줄일 수 있다. 이러한 혜택을 즉각적 정보(on-time information)의 가치라 정의하자. 이러한 즉각적 정보의 혜택은 교통체제에만 국한되는 것이 아니고 보다 일반적으로 동적 계획법을 이용하여 경영문제를 해결하려 할 때 정보가치로 확대할 수 있음에 독자들은 유념하기 바란다. 계량경영학에서 많이 다루어지는 최소경로문제를 가

지고 보다 구체적으로 설명해 보기로 하자.

< 그림 1 > 최소경로 문제



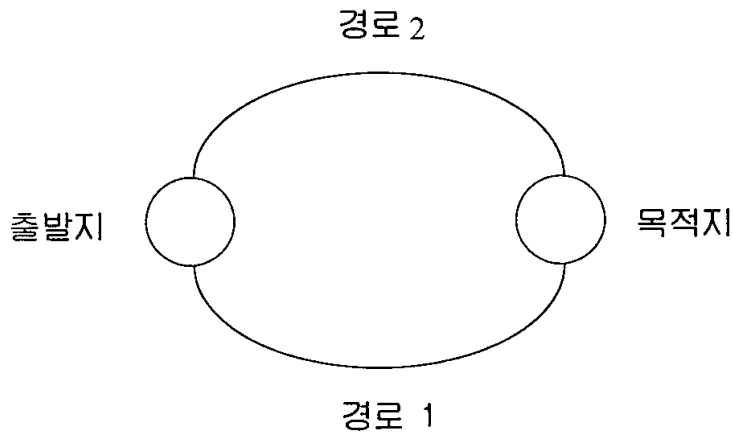
출발지로부터 목적지까지의 최단경로를 구하기 위해 동적계획법의 후방순차법(backward recursion)을 적용한다고 하자. 일반적으로 동적계획법을 통해 최단경로를 구할 때 근본적인 가정은 각 구간별 i 에서 j 까지의 소요시간 C_{ij} 가 확정적이라는 것이다. 실제로 C_{ij} 는 평균소요시간을 나타내는 것인데, 실제로 정확한 최단경로설정을 위해서는 그 시점에서 계산된 구간별 소요시간이 필요하다. 따라서 구간별 평균소요시간인 C_{ij} 를 이용하여 계산된 최단경로는 실제로 많은 경우에 있어서 최단경로가 되지 못한다. 현 시점에서의 교통상황을 고려하여 구간별 소요시간이 산정되고 이를 바탕으로 최단경로를 구하는 것이 보다 정확한 방법이 될 것이다. 본 논문이 의도하는 바는 간단한 최단경로문제

를 설정하여 계속 변화하는 구간별 소요시간에 대한 정보를 활용할 때 구간별 평균소요시간 C_{ij} 를 이용한 경우보다 사회적으로 얼마만큼의 시간절약이 가능한가를 보여 주는 것이다. 이는 단순히 교통망에서의 정보가치 뿐만 아니라 위에서 언급했듯이 확률적 요소를 포함한 동적계획법 모형에서 신속하게 입수된 정보의 가치를 나타내는 것으로 확대될 수 있다.

2. 사회 전체관점에서의 분석모형

본 논문에서 분석할 간단한 모형은 출발지에서 목적지까지 가는 가능한 경로가 두 가지(경로 1, 경로 2) 있는 경우인데, 이는 쉽게 M 경로가 있는 경우로 확대될 수 있다.

< 그림 2 > 두가지 경로의 문제



(1) 일인 경로선택

분석의 기초를 제공하기 위해 위의 출발지에서 목적지까지 가는 사람이 한 사람 존재하고, 그 사람의 입장에서 최단경로를 어떻게 정할 것인가를 살펴보

자. 경로 i ($i=1,2$) 에서 소요되는 시간을 확률변수 X_i 라 하자. X_i 의 평균값은 m_i 이고 $m_1 < m_2$ 가 성립한다고 하자.

① 즉각적 정보 부재시

X_i 에 대한 사전적(a priori) 확률 분포함수만을 알고 구체적인 X_i 의 실현치를 알지 못할 때에는 $m_1 < m_2$ 이므로 평균적으로 적은 시간이 걸리는 경로 1을 택할 것이다. 이 때 발생하는 평균소요시간은 m_1 이 된다.

② 즉각적 정보 활용시

경로상의 여러 가지 확률적 현상을 사후적으로 파악한 정보를 이용할 수 있는 경우에는 경로 i^* 를 택하는데, i^* 는 $X_{i^*} = \min \{ X_1, X_2 \}$ 을 만족시킨다. 따라서 경로상황에 대한 정보를 활용할 경우에 발생하는 최소평균 소요시간은 $E(X_1 \wedge X_2)$ 이다. 이 때 $X_1 \wedge X_2 = \min \{ X_1, X_2 \}$ 를 뜻한다.

이 때 $E(X_1 \wedge X_2) \leq E(X_1) = m_1$ 이므로, 일인경로선택의 경우에 있어서 즉각적 정보의 가치는 $m_1 - E(X_1 \wedge X_2)$ 가 된다. 일례로서 X_i 가 평균 m_i 인 지수분포를 따르고 ($m_1 < m_2$), X_1 과 X_2 이 서로 독립이라고 가정하자. 이 경우 기대 정보의 가치는

$$\begin{aligned} m_1 - \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} &= m_1 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

이 된다.

(2) 불특정 다수의 경로선택

이는 일인경로선택의 경우를 보다 현실화한 것으로, 출발지에서 목적지까지 가려고 하는 고객의 숫자가 확률변수 N 으로 표시되는 경우이다. 실제로 N 이 n 으로 실현될 확률을 $q(n)$ 으로 표시하자. 각 경로는 해당경로를 이용하는 고객의 숫자가 늘어감에 따라 교통체증에 의해 실제 소요시간의 기대값이 증가할 것이다. 경로 i 를 x 명의 고객이 이용할 때 걸리는 소요시간 혹은 그로 인한 기회비용을 $T_i(x)$ 로 표시하고, 그것이 연속함수라고 가정하자. 직관적으로 $T_i(x)$ 는 x 에 대하여 증가함수일 것이며, 볼록함수이며 이차 미분가능함수라고 가정한다. 또한 경로 i 를 이용할 때 발생하는 소요시간 비용 $T_i(x)$ 는 모든 이용자에게 동일하다고 가정한다. 대기행렬의 경우, 이는 볼록증가함수로서 교통혼잡도(traffic intensity)가 1일때 ∞ 의 값을 취한다.

① 즉각적 정보 부재시

불특정 다수가 경로선택을 할 경우 비록 $m_1 < m_2$ 이라고 하더라도 모든 고객이 경로 1을 택하는 것이 순수전략 Nash 균형 (Pure Strategy Nash Equilibrium)을 구성할 수 없음은 자명하다. 이 경우 혼합전략으로서 Nash 균형 (Mixed Strategy Nash Equilibrium)을 구성할 수 있는데, n 명의 고객이 있을 때 임의의 고객이 다음을 만족시키는 $P^*(n)$ 의 확률로 경로 1을 선택하고 $1 - P^*(n)$ 의 확률로 경로 2를 선택하는 것이다.

$$T_1(n P^*(n)) = T_2(n[1 - P^*(n)]) \quad (\text{식 ①})$$

경로선택을 위해 필요한 정보는 우선 몇 명이 이용할 것인지 (n), 각 경로별로 현재 몇 명이 이용하고 있는지로 크게 나눌 수 있다.

우선 두 가지 정보 모두가 없는 경우를 살펴보자. 이 경우에는 위 식에서의 $P^*(n)$ 은 n 과는 무관한 상수 P^* 로 대체되어야 한다. 그것은 n 에 대한 관찰을 할 수 없기 때문이다. 이 때 임의의 고객이 경로 1을 선택할 확률 P^* 가 혼합전략 Nash 균형을 이루기 위해서는 다음 식이 성립되어야 한다.

$$\sum_n T_1(n P^*)q(n) = \sum_n T_2(n[1 - P^*])q(n) \quad (\text{식 ②})$$

이 때 사회 전체적으로 기대되는 총 소요시간은

$$\sum_n \{ \sum_x [x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*) \} q(n) \quad (\text{식 ③})$$

이 식에서 $P_1(x | n, P^*)$ 는 n 과 P^* 가 주어졌을 때 n 명의 손님 중 x 명이 경로 1을 선택할 확률을 나타내는 것이다. 이는 시행횟수가 n , 성공확률이 P^* 인 이항분포를 나타내는 확률분포함수이다.

② 경로이용고객(N)에 대한 정보가 있을 경우

두 번째 경우로서, 경로를 몇 명이 이용할 것인지($N=n$)를 파악할 수 있고 이를 이용하여 혼합전략 Nash 균형을 이룰 수 있는 경우를 살펴보자. 이 때에는 $N=n$ 에서 혼합전략 Nash 균형을 구성하는 $P^*(n)$ 은 n 명의 고객중 각 개별 고객이 경로 1을 선택할 확률로서 (식 ①)을 만족시켜야 한다.

이 경우 사회 전체적으로 기대되는 총 소요시간은

$$\sum_n \{ \sum_x [x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*(n)) \} q(n)$$

(식 ④)

③ 총 고객숫자와 경로별 상태에 대한 정보가 있을 경우

마지막으로 고객의 숫자 $N=n$ 을 파악할 수 있고 또한 각 경로별 이용고객의 숫자를 알 수 있을 때에는 $P^*(n)$ 을 (식 ①)을 만족시키는 확률이라고 하면, 사회 전체적으로 기대되는 총 소요시간은

$$\begin{aligned} & \sum_n \{ n P^*(n) T_1(n P^*(n)) + n [1 - P^*(n)] T_2(n [1 - P^*(n)]) \} q(n) \\ & = \sum_n [n T_1(n P^*(n))] q(n) \end{aligned}$$

(식 ⑤)

이 식이 유도되는 근거는 다음과 같다. 사용고객의 숫자 $N=n$ 이 주어지므로 임의의 고객이 경로 1을 선택할 확률은 n 의 함수인 $P^*(n)$ 이 된다. 또한

각 경로별 상태, 즉 경로별 이용고객의 숫자를 알고 있을 경우에는 고객들이 양쪽 경로상의 혼잡이 균형상태가 되도록 선택할 것이므로 $P^*(n)$ 은 (식 ①)을 만족시켜야 한다. 그리고 경로 1에서의 균형기대 체증시간이 $T_1(n P^*(n))$ 이 되며, 여기에 경로 1의 이용자수 $n P^*(n)$ 을 곱하면 $n P^*(n) T_1(n P^*(n))$ 이 경로 1에서 발생하는 사회 전체의 기대 체증시간이다. 마찬가지로 경로 2에서는 n 대 체증시간이

$$n[1 - P^*(n)] T_2(n[1 - P^*(n)])$$

이 된다.

(3) 정보의 가치

여기서는 우선 두 가지 종류의 정보 중에서 경로상태에 대한 정보의 가치를 분석해 보자.

[정리-1]

경로선택 고객의 숫자 N 에 대한 정보가 주어지는 경우, 추가적으로 각 경로별 고객숫자(경로별 상태)에 대한 정보는 사회 전체적으로 체증시간을 줄인다.

[증명]

$h(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x) \equiv x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)$$

$$h'(x) = T_1(x) + x T_1'(x) - [T_2(n-x) + (n-x) T_2'(n-x)]$$

$\Rightarrow h'(x) = 0$ has a unique solution ($h'' > 0$)

$$h''(x) = 2 T_1'(x) + x T_1''(x) + 2 T_2'(n-x) + (n-x) T_2''(n-x) > 0$$

($\because T_i$: 볼록증가함수)

따라서 h 는 엄격 볼록함수(strictly convex function)이다. 이 때 Jensen의 부등식을 이용하면, $E[h(x) | N=n] > h(E[x | N=n])$ 이 성립된다.

$$E[h(x) | N=n] = \sum_x [x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*(n))$$

$$E[x | N=n] = n P^*(n)$$

그러므로,

$$\begin{aligned} \sum_x [x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*(n)) &> h(n P^*(n)) \\ &= n P^*(n) T_1(n P^*(n)) + (n - n P^*(n)) T_2(n - n P^*(n)) \\ &= n T_1(n P^*(n)) \quad (\because \text{식 ①}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_n \{ \sum_x [x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*(n)) \} q(n) \\ > \sum_n [n T_1(n P^*(n))] q(n) \end{aligned} \quad \square$$

위 정리의 증명에서 보았듯이 경로상태에 대한 정보의 가치는 [식 ④ - 식 ⑤]에 해당한다. 따라서 경로상태에 대한 정보를 제공해 주는 정보시스템을 도입하기 위해서는 투자의 단위시간당 비용이 정보도입에 따른 효과인 [식 ④ - 식 ⑤]보다 작아야 한다.

지금까지는 각 경로상태를 파악함으로써 상태별 균형을 유도할 수 있을 경우 사회 전체적으로 어떠한 혜택을 누릴 수 있는지에 대해서 살펴보았다. 그러면 총 고객 수 N 에 대한 정보가 있는 경우와 그렇지 못한 경우에는 사회 전체적으로 어떠한 차이가 발생할 것인지를 알아보자.

[가정]

$$(식③) \geq (식④)$$

이 가정이 의미하는 바는 경로선택을 위한 총 고객 수 N 에 대한 정보가 있을 경우, 그렇지 못한 경우보다 사회 전체적으로 혜택이 있다는 것을 의미한다. 어떤 의미에서 이 가정은 분석결과로서 증명이 되어야 하지만, 본 논문에서는 증명의 난이성때문에 가정으로서 그대로 받아들이기로 한다. 그런데 이 가정은 상당한 타당성을 지니고 있으며 많은 경우에 성립한다. 그 몇 가지 경우를 예로 들면 다음과 같다.

[정리-2]

일반적으로 받아들여지는 시간비용함수를 나타내는 다음의 각 경우에 (식③) \geq (식④)가 성립한다.

i) $T_1(x) = T_2(x)$, 즉 각 경로에서의 체증시간 함수가 대칭적인 경우

- ii) $T_i(x) = a_i x$, 즉 각 경로에서의 체증시간 함수가 원점을 지나는 선형식인 경우
- iii) $T_i(x) = k_i x^2$ 인 경우
- iv) $T_i(x) = k_i x^m$, m 은 상수
- v) $q(n) = \frac{1}{\alpha} \forall n_j$, i. e. uniform distribution

[증명]

증명의 편의성을 위해 N 이 취할 수 있는 값이 $n_1 < n_2$, 두 가지라고 가정하자.

i) 대칭성에 의해 $P^* = P^*(n_i)$. 따라서 식 ③ = 식 ④.

ii) $P^* = P^*(n_i) = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$. 따라서, 식 ③ = 식 ④.

iii) $P^* = P^*(n_i) = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$. 따라서, 식 ③ = 식 ④.

iv), v) 유사한 방법으로 증명됨.

[보조정리]

$$\min_i \{ P^*(n_i) \} \leq P^* \leq \max_i \{ P^*(n_i) \}$$

증명은 생략하기로 한다.

위의 가정 하에서 총 고객수 N 에 대한 정보를 활용할 경우 그렇지 못한 경우보다 사회 전체적으로 식 ③ - 식 ④만큼 평균체증시간을 감소시킬 수 있다.

그런데 지금까지는 두 가지 종류의 정보를 활용할 수 있을 때 얼마나 사회적 비용(체증시간)을 절감할 수 있는지를 살펴 보았다. 이러한 사회 전체적 관점은 공공이익 전체를 고려해야 할 경우에 필요하다. 가령 사회 전체적 교통문제를 다루어야 하는 공공부서에서 교통상황정보를 제공해 주는 정보시스템 혹은 교통방송시스템을 도입하려고 한다고 하자. 이 때에는 그러한 시스템을 도입함으로써 사회전체 체증시간의 절감으로 인한 비용감소를 판단기준으로 사용하여야 할 것이다. 이와는 대조적으로 실제 경로를 이용하는 개인이 받는 혜택을 판단 기준으로 사용하여야 하는 경우가 있다. 다음에서는 그런 경우에 대하여 살펴보자.

3. 개인 관점에서의 분석모형

각 개인 관점에서 경로선정과 관련하여 얻는 정보의 가치를 판단하여야 하는 경우가 있다. 가령 위성을 통하여 경로별 상태(교통상황)에 대한 정보를 자동차 안에서 운전중 모니터를 통해 파악할 수 있는 시스템이 개발 중이다. 어떤 개인이 이러한 정보시스템의 구입을 고려할 때, 그는 그 시스템을 사용할 때 절감할 수 있는 교통체증비용과 구입비용을 비교할 것이다. 즉, 사회 전체적 절감

효과가 아닌 개인별 절감효과가 기준이 될 것이다.

식 ③과 식 ④에서 알 수 있듯이 사회 전체적인 총 체증비용은 $N=n$ 인 경우 $x T_1(x) + (n-x) T_2(n-x)$ 에 대한 기대값으로 표시된다. 그러나 개인별

체증비용은 $\frac{x}{n} T_1(x) + \frac{n-x}{n} T_2(n-x)$ 의 기대값이 될 것이다.

N 에 관한 정보와 경로상태에 관한 정보를 모두 얻을 수 없을 때, 각 개인별 기대체증비용은

$$\sum_n \{ \sum_x [\frac{x}{n} T_1(x) + \frac{n-x}{n} T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*) \} q(n) \quad (\text{식 ⑥})$$

이 된다.

경로상태에 대한 파악이 불가능하고 N 에 관한 정보만이 활용가능할 때, 개인별 기대체증비용은

$$\sum_n \{ \sum_x [\frac{x}{n} T_1(x) + \frac{n-x}{n} T_2(n-x)] P_1(x | n, P^*(n)) \} q(n) \quad (\text{식 ⑦})$$

이 되며,

N 과 경로상태에 대한 모든 정보가 존재할 때에는 개인별 기대체증비용이

$$\sum_n T_1(n P^*(n)) q(n) \quad (\text{식 ⑧})$$

으로 표시될 수 있다.

앞에서 다룬 사회 전체적 기대체증비용에서와 같이 식 ⑦ - 식 ⑥은 경로선택 고객숫자 N 에 대한 정보를 활용할 때 발생하는 기대체증비용 절감효과이다. 또한 식 ⑧ - 식 ⑦은 추가적으로 경로상태에 대한 정보를 갖는 경우 발생하는 기대체증비용 절감분을 나타낸다.

4. 예 제

간단한 예제를 통해 경로상태에 대한 정보를 활용할 때 절감되는 체증비용을 계산하여 보도록 하자.

$$T_1(x) = x^2, \quad T_2(x) = 2x^2,$$

$$q(n) = \frac{1}{2} \quad (n=1,2).$$

이 경우 $P^* = P^*(1) = P^*(2) = 2 - \sqrt{2}$ 이 계산됨을 확인하기 바란다.

식 ④의 값은 2.94 가 되며 식 ⑤의 값은 1.54 가 된다. 따라서 경로상태에 대한 정보를 활용할 경우 사회 전체적으로 1.4 만큼 기대체증비용을 절감할 수 있게 된다.

또한 식 ⑦의 값은 1.72 , 식 ⑧의 값은 0.86 이 되어 개인적으로는 0.86 만큼 기대체증비용의 절감효과를 누릴 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

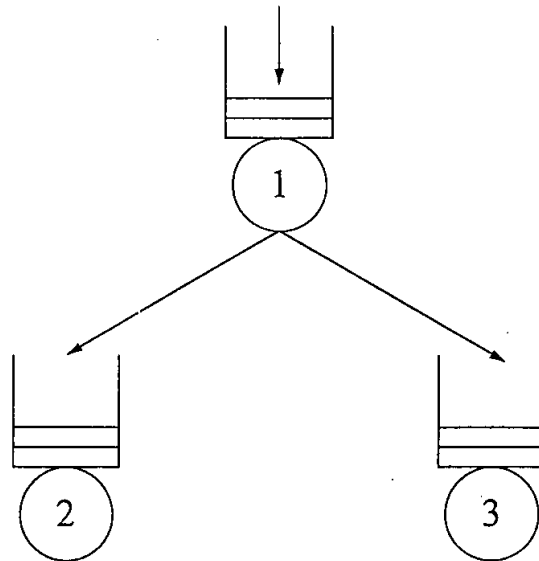
본 논문에서는 출발지에서 목적지로 가는 여러 개의 경로가 있을 때 총 이용고객 숫자와 경로별 이용고객 숫자에 대한 정보를 활용함으로써 얼마만큼의 기대체증비용을 절감할 수 있는지에 대하여 살펴보았다. 그리고 기대체증비용의 절감을 사회 전체적 관점과 각 개인관점으로 나누어 분석하였다.

경로별 상태에 대한 정보의 유무가 결정적 역할을 하는데, 그 효과를 요약해보면 다음과 같다. 경로별 상태에 대한 정보가 없는 경우 P^* 혹은 $P^*(n)$ (균형을 이루기 위하여 경로 1을 선택할 확률)이 정해져 평균적으로는 경로 1을 nP^* 혹은 $nP^*(n)$ 의 고객이 이용하지만, 실제로 경로 1에 찾아오는 고객의 수는 확률변수이다. 독자들은 한 예로서 총 가용고객 n 중에서 경로 1을 이용하는 고객이 x 일 확률을 이항분포로 파악하여 $\binom{n}{x} P^{*x} (1 - P^*)^{n-x}$ 로 하는

경우를 상정해 보기 바란다.

그러나 경로 상태(경로별 이용고객 숫자)에 대한 정보를 수시로 얻을 수 있는 경우 n 의 고객을 양쪽 경로에 적절히 배분하여 양 경로에서의 체증시간비용이 같도록, 즉 $T_1(nP^*(n)) = T_2(n[1 - P^*(n)])$ 이 성립되도록 경로 선택이 이루어질 것이다. 따라서 경로상태에 대한 정보의 유무에 따라 개인의 경로선택 행태가 다르게 되는데, 그것이 어떠한 효과를 나타내는지에 대해서는 이미 살펴보았다.

지금까지는 독자의 이해를 돕기 위하여 교통문제에 비유하여 논리를 전개하였다. 하지만, 생산 혹은 통신망 분석에 있어서, 어떤 업무 처리를 위한 방법이 여러 가지 있고, 처리자를 대기행렬상의 서비스 제공자로 파악할 경우 대기행렬 네트워크로 파악할 수 있는데, 이 경우에도 본 논문의 논리가 적용될 수 있다.



고객이 1번 대기행렬에 도착하여 서비스를 마친 뒤, 추가공정은 2번 혹은 3번 대기행렬에서 이루어져도 되는 경우를 생각해 보자. 만약 2번과 3번의 상태(대기고객 수)를 알지 못할 경우 적절한 확률 P^* 를 계산하여 정적 routing(static routing)을 실행하게 될 것이다. 이러한 P^* 가 Nash 균형을 위한 것에 비유할 수 있다. 그러나 만약 2번과 3번에서의 상태변수(대기행렬별 대기고객 수)가 항상 관찰가능하다면, 고객을 2번과 3번에 균등하게 배분함으로써 2번과 3번의 서비스능력을 보다 효과적으로 발휘시킬 수 있다. 이러한 개념은 경

로 상태에 대한 즉시정보 (on-time information)에 비유된다고 말할 수 있다.

결론적으로, 상황에 대한 정보를 항시 제공함으로써 고객들의 특정 행동을 유도하고, 그렇게 함으로써 사회 전체적 혹은 개인별 체증비용을 절감할 수 있다는 사실을 보인 것에 본 논문의 의의가 있다고 할 수 있다. 이러한 결과는 공공서비스로서의 즉시정보의 가치, 개개인에 대한 즉시정보의 가치를 보여 줌으로써 정보시스템에 대한 투자안 평가시 중요한 역할을 하게 될 것이다.

參考 文獻

1. D. Gross and C. M. Harris, *Fundamentals of Queuing Theory*, John Wiley and Sons, 1985.
2. S. M. Ross, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, 1983.
3. H. A. Taha, *Operations Research: An Introduction*, 5th ed., Macmillan Publishing Co., 1992.
4. J. Tirole, *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, 1988.