<分析資料>

資本資産價格決定模型의 基本假定에 대한 再吟味

沈 昞 求

(서울大 經營大 敎授)

I. 序 論

現代資本市場理論의 발전과정에 있어서 資本資産의 均衡價格決定에 대한 一般模型의 수립과 이에 대한 實證的 檢證이 그 主流를 이루어 왔는 바, 資本資産價格決定模型(capital asset pricing model, CAPM)은 현대재무관리론 및 투자론에 있어서 가장 중요한 理論의 하나가 되고 있다.

이것은 危險이 있는 자산으로부터 기대되는 收益率과 危險의 測定및 收益率과 危險의 相互關係를 기초로 한 투자자들의 자산선택행동으로부터 자산의 균형가격이 결정되는 메카니즘을 정교하게 설명하고 있다.

이 模型은 1952년 Markowitz가 투자자의 자산선택행동원리에 관한 연구결과를 발표한 이래 Treynor(1961), Sharpe(1964), Lintner(1965), Mossin(1966)등의 학자들에 의한 연구가 집약되어 성립되었다.

대부분의 模型 또는 理論과 마찬가지로 자본자산가격결정모형 역시 그 모형의 導出過程 및 論理展開에 있어 몇 가지 基本假定을 前提로 하고 있는 바, 本稿에서는 이 模型의 假定을 고찰한 후 基本模型을 도출하고, 각 假定의 意味에 대해 理論的 또는 現實的인 側面에서 재고찰해 보고자 한다.

II. 資本資産價格決定模型의 基本假定

1. 效用函數에 대한 假定

資本資産價格決定模型의 중요한 假定의 하나는 투자자는 一定期末의 富의 期待效用을 極大化하고자 하는 危險回避者(risk-averter)라는 假定이다.

Markowitz는 투자자는 투자로부터의 富의 2次函數로 표시되는 效用을 극대화하고자 하며, 이 效用은 富의 증가에 따라 증가하나, 그 增加率은 富의 증가에 따라 減小한다고 하였다.[1]

즉, 2次效用函數의 일반식은

$$U(W)=a+bW+cW^2 \qquad (1)$$

과 같으며, 여기서 富 W대신 투자로부터의 收益率 x로 바꾸어 變形하여도 그 의미는 동일한 바, 式 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(x)=a+bx+cx^2 \qquad (2)$$

여기서 투자자는 $E[U(x)]$의 극대화를 추구하며,

$$U'(x)=b+2cx>0, \quad x>-\frac{b}{2c} \qquad (3)$$

$$U''(x)=2c<0, \qquad c<0 \qquad (4)$$

라는 것이다.

平均—分散基準에 의한 자본자산가격결정모형이 이와 같이 투자자의 效用函數로서 2次函數를 가정하고 있는 이유는 收益率의 平均과 分散만으로 投資者의 투자목적인 期待效用의 極大化를 설명할 수 있기 때문이다.

1) A. Markowitz, "The Utility of Wealth," Journal of Political Economy, (April, 1952), pp. 151-158.

이는 다음과 같이 설명될 수 있다.[2)]

개별주식 또는 개별포오트폴리오 k의 效用函數는 式 (5)와 같이 표시된다.

$$U_k=a+b\cdot X_k+cX_k^2 \tag{5}$$

n개의 주식 또는 포오트폴리오의 期待效用 EU_p는

$$\begin{aligned} EU_p&=\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot U_k \\ &=\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot(a+bX_k+cX_k^2) \\ &=a\sum_{k=1}^{n}P_k+b\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot X_k+c\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot X_k^2 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\sum_{k=1}^{n}P_k=1$, $\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot X_k=E(R_p)$이며

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}P_k\cdot X_k^2&=\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot[\{X_k-E(R_p)\}+E(R_p)]^2 \\ &=\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot[\{X_k-E(R_p)\}^2 \\ &\quad+2E(R_p)\cdot\{X_k-E(R_p)\}+E(R_p)^2] \\ &=\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot\{X_k-E(R_p)\}^2 \\ &\quad+2E(R_p)\cdot\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot\{X_k-E(R_p)\} \\ &\quad+E(R_p)^2\cdot\sum_{k=1}^{n}P_k \\ &=\sigma_p^2+E(R_p)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

따라서 式 (6)은

$$EU_p=a+b\cdot E(R_p)+c\cdot E(R_p)^2+c\sigma_p^2 \tag{8}$$

로 쓸 수 있다. 그런데 式 (4)에서 $c<0$이므로 $b>0$이라면 포오트폴리오의 期待效用 EU_p는 期待收益率 $E(R_p)$의 증가함수, 그 分散 σ_p^2의 감소함수로 나타낼 수 있는 것이다.

2. 收益率의 確率分布에 관한 假定

투자로부터의 收益率이 하나의 確率變數(random variable)라면, 증권 또는 자산의 連續的인 價格變化에 따른 收益率은 어떤 確率分布를 이루게 될 것인 바, 자본자산가격결정모형에서는 收益率의 分布는 正規分布(normal distribution), 또는 가우스分布(Gaussian distribution)를 이룬다고 가정하고 있다.

投資로부터의 收益率을 하나의 확률변수로 볼 때 이것은 連續確率變數(continuous random variable)라 할 수 있으므로 收益率의 分布가 正規分布를 따를 경우, 收益率이 實現될 확률은 어떤 범위를 가지고 分布曲線上의 넓이로써 측정되는 바, 그 확률을 계산하는 密度函數의 式은 다음과 같다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad (-\infty<x<\infty) \tag{9}$$

x: 收益率

μ: 收益率分布의 平均

σ: 收益率分布의 標準偏差

그리고 正規分布의 特性函數는 다음과 같다.

$$\phi(t)=E(e^{i\mu t})=e^{i\mu t-1/2\sigma^2t^2} \tag{10}$$

$$\log_e \phi(t)=\log_e E(e^{i\mu t})=i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2 \tag{11}$$

i: $\sqrt{-1}$

t: 모든 實數

收益率이 正規分布를 따른다고 가정할 경우 다음과 같은 특징을 지닌다.

① 收益率分布曲線의 모양과 위치는 收益率의 平均(期待値)과 標準偏差에 의해서 결정된다.

② 收益率의 分布는 平均을 中心으로 좌우대칭인 종모양이다.

③ 收益率이 가지는 가능한 값의 범위는 $-\infty$와 $+\infty$ 사이이다.

자본자산가격결정모형에서 收益率의 分布를 正規分布로 假定한 것은 이 모형에서 投資意思決定의 基準으로 삼은 收益率의 平均·分散과 밀접한 관련을 가지고 있다. 즉 正規分布曲線의 모양과 위치는 收益率分布의 平均과 標準偏差라는 2개의 統計量에 의해서 결정되므로 이 模型에서 투자자의 의사결정기준으로 삼은 平均과 分散(標準偏差의 제곱)으로 收益率의 分布形態를 나타낼 수 있기 때문이다.

3. 資本市場의 完全性에 대한 假定

자본자산가격결정모형에서는 資本市場은 完全하다고 가정하고 있는데, 자본시장이 완전하기 위한 조건은 다음과 같다.

① 資本市場은 수많은 투자자로 구성되어 있어 개별투자자는 證券 또는 資産의 價格形成에 아무런 심각한 영향을 미치지 못하며, 다만 價格

2) W. Sharpe, Portfolio Theory and Capital Market, New York; McGraw-hill 1970, pp. 196-201.

順應者(price-taker)로서 형성된 가격을 그대로 받아들일 뿐이다.

② 去來費用 및 情報의 蒐集費用이 없으며, 모든 정보는 각 투자자에 대해 공평하고 신속하게 전달되며 無費用으로 활용가능하다. 또한 투자자의 市場參加와 脫退는 자유롭다.

③ 거래대상이 되는 증권 또는 자산은 同質的이고 標準化되어 있으며, 市場性이 있고, 무한히 分割可能하다.

④ 거래에 대한 稅金, 法的 規制등과 같은 市場不完全要因도 없다.

4. 投資者의 同質的 期待

모든 투자자는 각 증권 또는 자산으로부터 미래에 기대되는 收益率에 대해서 同質的인 期待(homogeneous expectation)를 한다는 것이다. 즉, 모든 투자자들은 각 증권 또는 자산의 期待收益率, 期待收益率의 分散 및 收益率間의 相關係數에 대해 동질적인 예측을 함으로써 이들은 모두 동일한 投資機會集合을 인지하게 된다는 가정이다.

5. 無危險資產의 存在

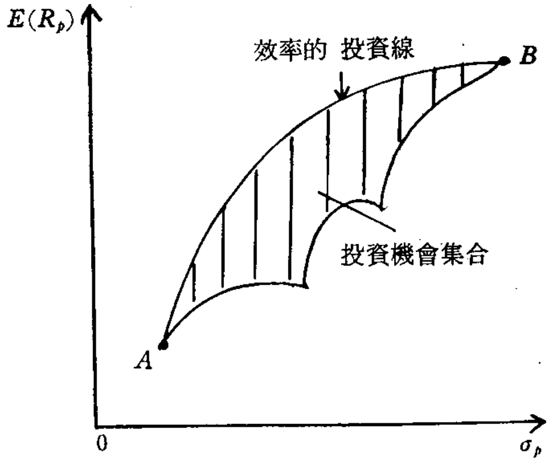
자본 자산 가격결정 모형에서는 無危險利子率(risk-free rate)로써 자유로이 차입—대출이 가능한 無危險資產(risk-free asset)이 존재한다고 가정하고 있다. 無危險資產의 利子率은 (+)의 값을 지니며, 그 分散은 0이다. 이 모형에서는 無危險利子率이 借入과 貸出時의 구별없이 동일하게 적용되며 또한 모든 투자자에 대해서도 동일하게 적용된다고 가정하고 있다.

III. 資本資產價格決定模型

1. 資本市場線

(1) 資本市場線의 導出

〈圖 1〉에서 사선부분은 위험있는 資產만을 투자대상으로 할 경우 투자자들이 투자할 수 있는 投資機會集合(opporturity set)을 나타낸 것으로서, 투자가능한 모든 포오트폴리오의 期待收益率과 그 標準偏差로 표시한 危險의 組合이다. 위험있는 자산으로써 포오트폴리오를 구성하면 어떤 포오트폴리오든 이 投資機會集合內의 한 포오트폴리오가 될 것이다.



〈圖 1〉 效率的 投資線

그러나, 理性的인 投資者는 支配原理(dominance principle)에 의해 동일한 위험수준에서는 기대수익율이 높은 포오트폴리오를 선택하며, 기대수익율이 동일한 포오트폴리오 중에서는 위험이 낮은 포오트폴리오를 선택하게 되므로, 위험있는 자산만을 투자대상으로 할 경우 投資機會集合內의 포오트폴리오중 반드시 $\widehat{AB}$上에 있는 포오트폴리오를 선택하게 된다. $\widehat{AB}$는 支配原理를 충족시키는 효율적인 포오트폴리오의 기대수익율과 위험의 조합인 最小分散投資機會集合(the minimum variance opportunity set)으로서, Markowitz의 效率的 投資線(efficient frontier)이다.

여기서 株式과 같은 위험자산뿐만 아니라 定期預金, 國債 등과 같은 無危險資產을 아울러 투자대상으로 할 경우 理性的인 投資者들이 선택하게 되는 포오트폴리오는 Markowitz의 效率的 投資線이 아닌 새로운 效率的 投資線인 資本市場線(capital market line)上에 있게 된다.

Markowitz의 效率的 投資線上의 포오트폴리오 i와 無危險資產으로 포오트폴리오를 구성할 경우 이것의 期待收益率 $E(R_p)$와 標準偏差로 표시한 危險은 다음과 같다.

$$E(R_p)=\alpha \cdot Rf+(1-\alpha)E(R_i) \qquad (12)$$

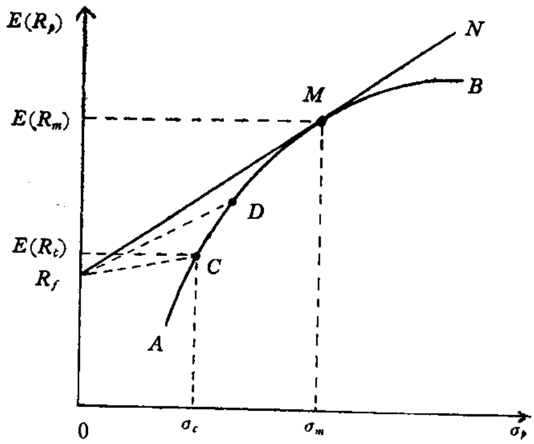
$$\sigma_p=\sqrt{\alpha^2\sigma_f^2+(1-\alpha)^2\sigma_i^2+2\alpha(1-\alpha)\sigma_{fi}}$$
$$=(1-\alpha)\sigma_i \qquad (13)$$

α: 무위험자산에 대한 投資比率

R_f: 무위험자산의 期待收益率(무위험이자율)

$E(R_i)$: 포오트폴리오 i의 期待收益率

σ_f: 무위험자산의 기대수익율의 標準偏差



〈圖 2〉 資本市場線의 導出

σ_i: 포오트폴리오 i의 기대수익율의 標準偏差

σ_{fi}: R_f, $E(R_i)$의 共分散(covariance)

예를 들어 〈圖 2〉에서 投資資金을 모두 위험자산으로 구성된 포오트폴리오 C에만 투자할 경우의 기대수익율과 그 표준편차는 $E(R_c)$, σ_c가 되며, 無危險資産에만 투자할 경우의 기대수익율과 그 標準偏差는 R_f, 0이다. Markowitz의 效率的 포오트폴리오 C와 無危險資産으로 포오트폴리오를 구성할 경우 이 포오트폴리오는 포오트폴리오 C와 無危險資産에 대한 투자비율에 따라 R_fC上에 있게 되며, 이것은 위험자산만으로 구성된 Markowitz의 效率的 投資線 AC上의 포오트폴리오보다 동일한 위험수준에서는 기대수익율이 높고, 동일한 기대수익율수준에서는 위험이 적다. 따라서 이상적인 투자자는 無危險資産에 대한 投資가 가능할 경우 R_fC上의 포오트폴리오를 택하게 된다.

마찬가지 방법으로 하여 투자자는 無危險資産과 效率的 投資線上의 C포오트폴리오보다는 無危險資産과 D포오트폴리오로써 포오트폴리오를 구성하려고 할 것이며, 나아가 無危險資産과 D포오트폴리오보다는, 無危險資産과 M포오트폴리오로써 포오트폴리오를 구성하려고 할 것이다.

그리하여 理性的인 投資者는 危險資産과 無危險資産에 투자할 때, 위험자산으로서는 포오트폴리오에만 투자하게 되는 바, 이를 市場포오트폴리오(market portfolio)라 한다.

투자자금을 전액 無危險資産에만 투자할 경우는 〈圖 2〉에서 R_f로 표시되며, 전액위험자산에만 투자할 경우는 M으로 표시되며, 兩者에 투자자금을 配分하여 투자할 경우는 $\overline{R_fM}$上의 한 점으로 표시된다. 여기서 無危險資産에 투자하여 그 收益率이 R_f라는 것은 R_f의 利子率로 대여해 준 것과 같은 의미이므로 $\overline{R_fM}$을 貸與포오트폴리오(lending portfolio)라고 한다. 그리고 투자자가 외부로부터 資金을 借入하여 자신의 保有資金以上의 자금으로써 위험있는 자산에만 투자할 때 R_f의 利子率로 借入—이 경우 無危險資産에 대한 投資比率 α는 0미만의 (−)값을 지님—하여 市場포오트폴리오에 투자하게 되는 바, 이때에는 $\overline{MN}$上에 표시되며 $\overline{MN}$을 借入포오트폴리오(borrowing portfolio)라고 한다. 그리하여 $\overline{R_fMN}$이 資本市場線이 된다.

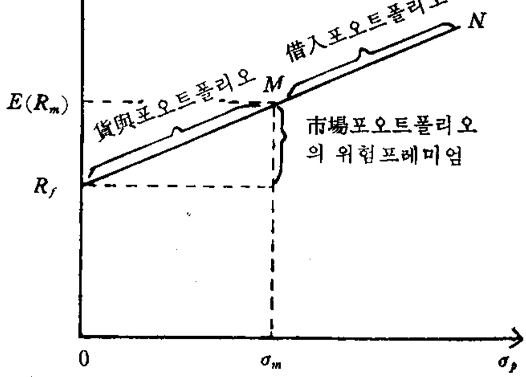
資本市場線은 위험있는 자산과 함께 무위험자산도 아울러 투자대상으로 고려할 경우 理性的인 投資者가 선택하게 되는 포오트폴리오의 期待收益率과 危險의 關係를 나타낸 것이다. 資本市場線을 나타내는 式은 다음과 같다.

$$E(R_p)=R_f+\frac{E(R_m)-R_f}{\sigma_m}\cdot\sigma_p \qquad (14)$$

$E(R_m)$: 市場 포오트폴리오의 期待收益率

σ_m : 市場 포오트폴리오의 期待收益率의 標準偏差

$E(R_m)-R_f$는 無危險資産에 대한 기대수익율을 초과하는 市場포오트폴리오에 대한 期待收益率로서 市場포오트폴리오의 위험프레미엄이며, 이것을 市場포오트폴리오의 危險인 σ_m으로 나눈 것이 資本市場線의 기울기이다.

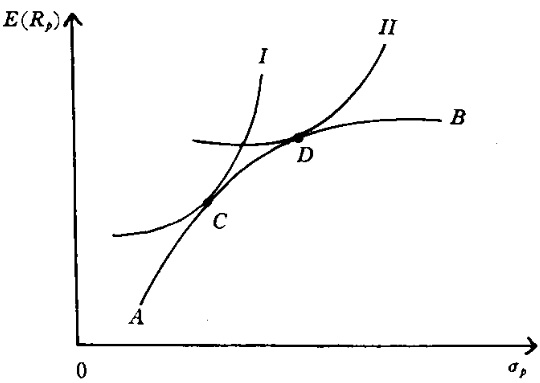


〈圖 3〉 資本市場線

(2) 市場포오트폴리오의 效率性

資本資産價格決定模型의 妥當性을 입증하기 위해서는 均衡狀態에서 市場포오트폴리오가 效率的 포오트폴리오여야 한다. 市場포오트폴리오의 效率性을 立證하는 한 가지 방법은 투자자들이 투자대상의 未來 期待收益率과 危險에 대해 同質的인 期待를 하고 있는 이상 그들의 개별적인 危險의 受容程度의 差異에도 불구하고 그들은 모두 同一한 最小分散投資機會集合을 가지게 될 것이라는 것을 입증하는 것이다.[3)]

비록 無危險資産이 없이 危險資産만을 투자대상으로 할 경우에도 각 투자자들은 개개인의 위험의 수용정도의 차이, 즉 개개인의 期待收益率과 危險의 無差別曲線의 차이에도 불구하고 모두가 效率的 포오트폴리오에 투자한다.



〈圖 4〉 투자자의 태도에 따른 포오트폴리오의 선택

〈圖 4〉에서 보면 투자자보다 위험의 증가에 따른 보상을 더 많이 요구하는 태도를 지닌 투자자 I은 효율적 포오트폴리오 C를 선택하고, 투자자 I에 비해 위험의 증가에 따른 보상을 다소 적게 요구하는 투자자 II는 효율적 포오트폴리오 D를 선택하게 된다. 그리하여 ① 각 투자자의 개별투자는 效率的이며, ② 市場은 단순히 이러한 개별투자의 총합이기 때문에 市場포오트폴리오는 반드시 效率的이다. 즉 이론상 모든 개별투자자가 투자대상으로부터 기대되는 收益率과 危險에 대해 同質的인 期待를 하고 있는 한 반드시 효율적 포오트폴리오가 된다. 이 市場포오트폴리오는 理性的인 투자자가 위험있는 資産에 투자할 때 반드시 투자하게 되는 포오트폴리오로서 위험이 있는 투자대상중 最適의 포오트폴리오, 즉 Markowitz의 效率的 投資線上에서의 最適의 포오트폴리오이다. 따라서 위험있는 자산으로서 시장포오트폴리오에 포함되지 않는 개별자산은 市場內에 存在할 수 없으며, 시장포오트폴리오를 구성하는 각 자산이 市場內의 모든 자산의 總市場價値에 대한 그 자산의 市場價値의 비율만큼 시장포오트폴리오에 포함될 때 비로소 市場은 均衡狀態를 유지한다.

만일 투자자의 同質的인 期待라는 假定이 없을 경우 市場포오트폴리오가 반드시 효율적이라고는 말할 수 없으며, 證券市場線의 導出도 불가능하다. 市場포오트폴리오의 效率性과 자본자산가격결정모형은 서로 分離될 수 없으며, 兩者는 어느 하나가 다른 하나 없이는 검증될 수 없는 結合假說(joint hypothesis)인 것이다.

2. 證券市場線

만일 效率的 投資線 $\widehat{AMB}$上의 위험자산 i에 자금의 α비율을 투자하고, 市場포오트폴리오에 $(1-\alpha)$의 비율만큼 투자할 경우, 이 포오트폴리오의 期待收益率과 標準偏差는 다음과 같이 표시된다.

$$E(R_p)=\alpha E(R_i)+(1-\alpha)E(R_m) \tag{15}$$

$$\sigma_p=\sqrt{\alpha^2\cdot\sigma_i^2+(1-\alpha)^2\sigma_m^2+2\alpha(1-\alpha)\sigma_{im}} \tag{16}$$

$E(R_i)$: 위험자산 i의 기대수익율

$E(R_m)$: 市場포오트폴리오의 기대수익율

σ_i: 위험자산 i의 기대수익율의 표준편차

σ_m: 市場포오트폴리오의 기대수익율의 표준편차

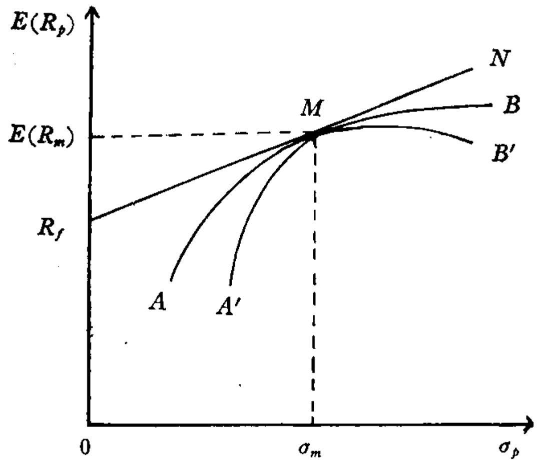
σ_{im}: 위험자산 i와 市場포오트폴리오의 共分散

이 포오트폴리오는 〈圖 5〉에서 $A'MB'$上에 표시된다.

위험자산 i에 대한 투자비율 α의 변화에 따른 포오트폴리오의 기대수익율과 표준편차의 변화는 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{dE(R_p)}{d\alpha}=E(R_i)-E(R_m) \tag{17}$$

3) T.E. Copeland & J.F. Weston, Financial Theory and Corporate Policy, Addison-Wesley Publishing Company, 1979. pp. 161-162.



〈圖 5〉 證券市場線의 導出

$$\frac{d\sigma_p}{d\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\alpha^2\sigma_i^2+(1-\alpha)^2\sigma_m^2+2\alpha(1-\alpha)\sigma_{im}}\cdot$$
$$(2\alpha\sigma_i^2-2\sigma_m^2+2\alpha\sigma_m^2+2\sigma_{im}-4\alpha\sigma_{im}) \qquad (18)$$

$A'MB'$上의 각점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p}=\frac{dE(R_p)}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\sigma_p} \qquad (19)$$

로 표시되며, 이것은 위험의 변화에 대한 기대수익율의 변화의 비율을 의미한다. 그런데 市場포오트폴리오에는 위험자산 i가 그의 시장자체의 비율만큼 포함되어 있으므로 위式에서의 α는 위험자산 i에 초과투자된 것으로, 이것은 개별위험자산 i에 대한 초과수요이다. 그러나 균형상태에서는 개별위험자산에 대한 초과수요는 0이어야 하며, $\alpha=0$인 M점에서의 $A'MB'$의 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$\left.\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p}\right|_{\alpha=0}=\frac{E(R_i)-E(R_m)}{(\sigma_{im}-\sigma_m^2)/\sigma_m} \qquad (20)$$

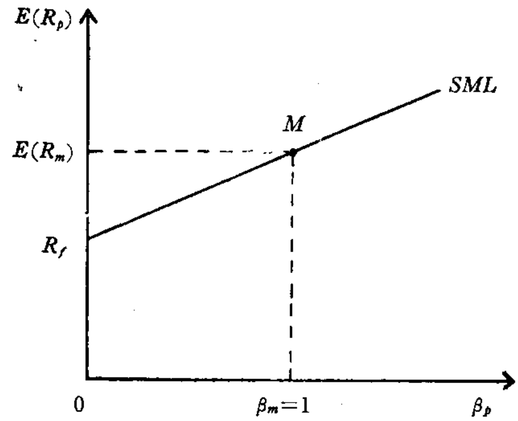
M점에서의 $A'MB'$의 기울기는 바로 資本市場線 R_fMN의 기울기와 같으므로 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{E(R_i)-E(R_m)}{(\sigma_{im}-\sigma_m)^2/\sigma_m}=\frac{E(R_m)-R_f}{\sigma_m} \qquad (21)$$

이를 $E(R_i)$에 대해서 정리하면 다음 式을 얻는다.

$$E(R_i)=R_f+\{E(R_m)-R_f\}\cdot\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad (22)$$

이 式이 資本資産價格決定模型의 핵심인 證券市場線(security market line)을 나타내는 식이며 이를 다음과 나타낼 수 있다.



〈圖 6〉 證券市場線

$$E(R_i)=R_f+\{E(R_m)-R_f\}\cdot\beta_i \qquad (23)$$

$$\beta_i=\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

여기서 β_i는 개별자산 또는 포오트폴리오의 體系的 危險을 나타내며, 市場포오트폴리오의 체계적 위험은 1이다.

$$\beta_m=\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}=\frac{\rho_{mm}\sigma_m\cdot\sigma_m}{\sigma_m^2}=\frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2}=1. \qquad (24)$$

ρ_{mm}: 市場포오트폴리오의 收益率間의 相關係數($\rho_{mm}=1$)

어떤 위험자산 또는 포오트폴리오에 대한 期待收益率은 無危險利子率에 危險프레미엄을 합한 것인 바, 자본자산가격결정모형에서 위험프레미엄은 위험의 價格(price of risk)인 證券市場線의 기울기($E(R_m)-R_f$)에 위험의 量(quantity of risk)인 자산 또는 포오트폴리오의 체계적 위험을 곱한 것이다.

IV. 資本資産價格決定模型의 基本假定에 대한 再吟味

1. 效用函數

平均—分散基準에 의한 자본자산가격결정모형에서는 투자자를 危險回避者로 가정하고, 투자자의 效用函數로서 2次函數를 가정하였으나, 2次效用函數는 다음에서 설명하는 바와 같은 문제점을 지니고 있다.

2次效用函數는 다음과 같이 표시된다.

$$U=a+bx+c\cdot x^2 \qquad (25)$$

$$x > -\frac{b}{2c},\ c < 0,$$

투자자를 위험회피자로 가정할 경우 위험회피 투자자는 투자대상자산에 위험이 존재할 때 이에 상응하는 적절한 補償이 있어야만 투자하게 되는데, 위험에 대해 투자자가 요구하는 보상인 위험프레미엄(risk premium)은 期待效用의 現金等價를 초과하는 期待現金價値를 말한다.

Pratt는 이를 다음과 같은 수식으로 나타내었다.[4]

$$\pi = -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{U''(x)}{U'(x)} \tag{26}$$

이것은 收益率 x의 감소함수이다. 즉, 위험프레미엄은 수익율이 커질수록 작아진다는 것이다.[5]

그러나 效用函數를 2次式으로 假定할 경우 2次效用函數로부터 위험프레미엄 π는 모든 x에 대하여 증가함수로 나타나는 문제점을 노정시킨다.[6]

그리하여 Arditti는 平均—分散基準의 한계성을 극복할 수 있는 새로운 분석의 매개변수로서 資本資産의 評價模型에 收益率分布의 非對稱度(skewness)를 도입하였다.[7] 그는 위험자산의 수익율을 결정하는 變數로서 수익율분포의 分散, 非對稱性, 市場相關係數(market correlation coefficient) 및 負債比率, 配當收益率을 고려하여 이들을 회귀분석한 결과 2次 및 3次積率이 위험의 척도로서[8] 고려되어야 한다고 결론을 내렸다.

그에 의하면 위험프레미엄 π는 收益率 x의 감소함수이므로

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{\sigma^2}{2}\ \frac{U''(x)}{U'(x)}\right] \tag{27}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{-U'(x) \cdot U'''(x) + [U''(x)]^2}{[U'(x)]^2} < 0$$

위식이 성립되기 위해서는 $U'(x) > 0$이므로, $U'''(x) > 0$이어야 한다. 즉. 이것은 3次積率의 係數가 (+)임을 나타내는 것으로, 투자자는 分散이 같을 경우 높은 (+)의 非對稱度가 收益率分布에 존재하는 한 平均—分散基準에 의한 期待收益率보다 낮은 期待收益率을 감수한다. 그리고 만일 收益率分布에 非對稱度가 존재하고, 投資者가 (+)의 非對稱度를 선호할 때 기본적인 자본자산가격결정모형에서 시사하고 있는 分散投資의 效果는 再考되어야 한다. 다시 말하면 分散投資에 의해 非對稱度가 감소된다고 한다면, 投資者는 分散投資를 기피할 것이므로 體系的危險만으로는 資本市場의 均衡을 설명할 수 없는 것이다. Simkowitz와 Beedles는 分散投資에 따른 非對稱度의 변화에 대한 경험적 연구결과, 收益率分布에 非對稱度가 존재하고, 투자자가 (+)의 非對稱度를 선호할 때 분산투자가 투자자에게 반드시 有利하다고 할 수 없다고 결론지었다.[9]

3. 收益率의 確率分布

사실상 증권 또는 자산의 價格變化에 따른 收益率의 分布에 대한 연구는 Bachelier이래 많은 학자들에 의해 이루어졌다. Bachelier와 Osborne은 증권의 가격변화, 즉 收益率의 分布가 正規分布를 이루고 있다는 가설을 최초로 주장한 학자이다. 이들은 개별증권의 거래사이에 일어나는 가격변화는 獨立的이고 同質的인 分布를 갖는 확률변수이며, 거래가 시간의 경과에 따라 매우 균등하게 分布되어 있고 去來마다 나타나는 가격변화의 분포는 有限分散을 가진다고 주장하였다. 그리하여 每日, 每週, 每月의 거래회수가 매우 많으면 상이한 간격사이의 수익율은 많은 독립변수의 合이 될 것이다. 이와 같은 조건하에서 中心極限定理(central limit theorem)를 사용하면 日別, 週別, 月別收益率은 各各 正規分布 또는 가우스分布를 이룰 것이라고 설명하였다.

Osborne은 자신의 주장의 타당성에 대해 경험적인 검증을 시도하였지만 자신의 주장을 뒷받침할 수 있는 적절한 검증결과를 제시하지 못하

4) J. Pratt, "Risk Aversion in the Small and Large", Econometrica, (Jan.-April 1964), pp. 122-136.
5) F. Arditti, "Risk and Required Return on Equity", Journal of Finance (March 1967), pp. 19-36.
6) G. Hanoch & H. Levy, "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility", Journal of Business, (April 1970), pp. 181-189.
7) F. Arditti, op. cit., pp. 19-36.
8) $E[x_j - E(x_j)]^3$으로 표시된 3次積率이 非對稱度의 측정수단으로 사용될 수 있다.
9) M. Simkowitz & W. Beedles, "Diversification in a Three Moment World," Journal of Financial and Quantitative Analysis, (Dec, 1978), pp. 927-941.

였다. 그런데 Moore와 Kendall의 실증적 연구는 收益率의 분포가 중앙의 평균근처와 극한끄리부분에 많은 값들이 分布되어 있는 leptokurtic한 모양을 보이지만 거의 정규분포에 근사하다고 하였다.

그러나 Mandelbrot[10] 이후의 Alexander[11] Cootner[12]등 여러 학자들의 收益率의 分布에 대한 연구는 대개 收益率의 分布가 正規分布를 이루지 않고, 正規分布보다 分布의 중심부분이 매우 높고, 또한 극한끄리부분도 높은 非正規 安定파레토分布(stable-paretian distribution)를 이룬다고 결론을 내리고 있다. 收益率의 分布가 安定파레토 分布를 이룰 경우, 수익율에 관한 確率密度函數는 존재하지 않고, 分布는 다음과 같은 特性函數에 의해 나타내어진다.

$$\log_e f(x)=\log_e E(e^{ixt}) \tag{28}$$
$$=i\delta x-r|x|^{\alpha}[1+i\beta(x/|x|)\cdot w(x,\alpha)]$$

x: 확률변수

t: 實數

i: $\sqrt{-1}$

$$w(x,\alpha):\begin{cases}\tan\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha\neq 1\\ \frac{2}{\pi}\log|x| & \alpha=1\end{cases}$$

이 분포의 매개변수는 다음과 같다.

α: 特性指數 $0<\alpha\leq 2$,

α가 작을수록 분포의 극한끄리부분이 높다.

β: 分布의 對稱度를 나타내는 指數.

$-1\leq\beta\leq 1$

$\beta=0$일때 좌우대칭이다.

δ: 分布의 위치를 나타내는 매개변수.

$\alpha>1$일 때는 分布의 平均

$\alpha\leq 1$, $\beta=0$ 이면 中位數

γ: 分布의 규모를 나타내는 매개변수

α: 2일 때 γ는 分散의 1/2.

여기서 정규분포는 특별한 경우, 즉$\alpha=2$, $\beta=0$일 때의 定定파레토분포이다.

만일 수익율의 분포가 자본자산가격결정모형에서 가정하는 정규분포를 이룬다고 할때, 이것은 收益率이 평균으로 부터 분산정도가 매우 큰 -100%이하의 경우도 상정하는 것이 되나, 실제로 자산 또는 증권의 가격이 (−)로 되고, 수익율이 -100%이하로 되는 경우는 없다. 그러나 이와 같은 점이 이 모형의 타당성에 영향을 미치지는 않는다.[13]

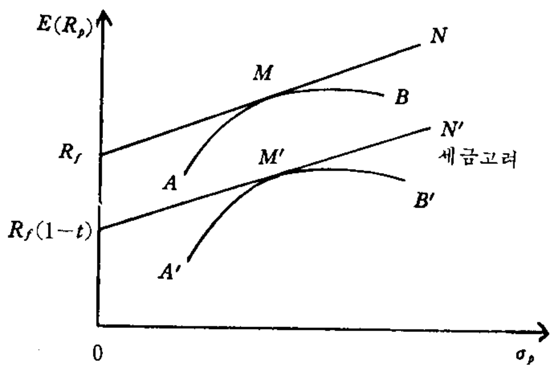
그러나 收益率의 分布가 正規分布가 아닌 경우에 있어서의 투자자 행동에 대해서는 자본자산가격결정모형은 설명해 주지 못하고 있다.

4. 資本市場의 完全性

(1) 稅 金

자본자산가격결정모형에서는 투자자가 실현하는 資本利得이나 配當所得등에 대해 稅金이 존재하지 않는다고 가정하였다. 그러나 현실적으로는 資本利得이나 配當所得등에 대해 稅金이 존재하며 稅率은 資本利得과 配當所得의 구분에 따라, 또한 所得金額의 정도에 따라 다를 수가 있다.

간단한 예로, 자본이득과 배당소득에 대해 세율이 모두 동일하게 5가 적용되고, 이것은 모든 투자자에 대해서도 동일하게 적용된다고 하자.



〈圖 7〉 세금을 고려한 경우의 資本市場線

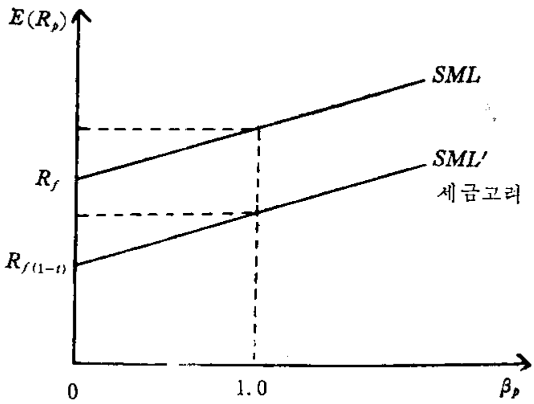
---

10) B. Mandelbrot, "The Variation of Certain Speculative Prices," Journal of Business XXXVI(Oct. 1963), pp. 349-419.

11) S.S. Alexander, "Price Movement in Speculative Market: Trends or Random Walks, Industrial Management Review II, (May 1961), pp. 7-26.

12) P.H. Cootner, "Stock Prices: Random vs. Systematic Change," Industrial Management Review III, (Spring 1962), pp. 25-45.

13) T.E. Copeland and J.F. Weston, op. cit., pp. 175-176.



〈圖 8〉 세금을 고려한 경우의 證券市場線

세금을 고려하지 않은 경우의 效率的 投資線은 AMB가 되어 자본시장선은 R_fMN이 되며, 이로부터 證券市場線 SML이 도출된다. 그러나 t율의 세금을 고려하게되면 효율적 투자선은 $A'M'B'$로 하향이동되어 자본시장선은 $R_f(1-t)M'N'$가 되고 증권시장선은 SML'로 되는 것이다.

만일 稅率 t가 자본이득과 배당소득에 대해 상이하게 적용되며 또한 투자자의 소득금액에 따라서도 상이하게 적용된다면 서로 다른 세율이 적용되는 투자자집단마다 다른 자본시장선과 증권시장선을 가지게 된다. 그리하여 시장에서 자산에 대한 균형가격이 형성되지 못하고 시장은 균형상태를 이룰 수 없게 된다.

Brennan은 자본이득 및 배당소득에 대한 여러 상이한 稅率의 效果에 대해 연구하였다. 그는 체계적 위험(β)이 위험의 적절한 측정수단이라고 결론을 내렸지만, 개별자산 또는 포오트폴리오에 대한 期待收益率은 그것의 체계적 위험뿐만 아니라 배당수익율에 의해서도 좌우된다고 주장하였다.[14]

$$E(R_i)=\gamma_1 R_f+\gamma_2\beta_i+\gamma_3 D_i \quad (29)$$

D_i: i자산에 대한 配當收益率

이와 같은 Brennan의 연구결과는 자본자산가격결정모형에서 투자자의 의사결정기준으로 한 平均―分散基準으로는 자본시장의 균형상태를 설명할 수 없다는 것을 의미하고, 收益率分布의 平均―分散뿐만 아니라 非對稱度도 고려하여야 한다는 점을 시사하고 있다.

(2) 非市場性資產

어떤 자산의 去來費用이 매우 크거나 거래에 대해 法이나 規定에 의한 제한이 있는 경우에 그 자산은 市場性을 상실하게 된다. 거래비용이 없고 모든 자산이 完全分割可能하며 市場性을 가지고 있을 경우, 투자자는 無危險資產과 危險資產으로서는 모두 똑같이 市場포오트폴리오에 투자할 것이다. 만일 市場內에 非市場性資產이 존재하는 경우에는 기본적인 자본자산가격모형은 다소 수정이 된다. Mayers에 의하면 투자자들이 R_H의 위험수익율을 갖는 非市場性資產을 保有하도록 강제된 경우 자본자산가격결정모형은 다음과 같은 형태를 취한다고 하였다.[15]

$$E(R_i)=R_f+\lambda\cdot \mathrm{COV}(R_i,\ R_m+R_H) \quad (30)$$

$$\lambda=\frac{E(R_m)-R_f}{\mathrm{COV}(R_m, R_m+R_H)}$$

$$=\frac{E(R_m)-R_f}{V_m\sigma_m^2+\mathrm{COV}(R_m, R_H)}$$

V_m: 모든 市場性資產의 現市場價值

R_H: 모든 非市場性資產의 總收益率

이 결과는 우선 각 투자자의 市場性資產에 대한 個別需要曲線을 도출한 다음, 이를 집합하여 얻어진 것으로 위 式은 市場의 均衡狀態를 위한 市場性資產의 收益率을 나타낸다. 위 式은 다음의 3가지 중요한 의미를 지닌다. 첫째, 투자자들은 동일한 위험자산의 포오트폴리오를 선택하는 것이 아니라 각 개인에 따라 서로 상이한 위험자산의 포오트폴리오를 선택한다. 둘째, 위험자산의 시장균형가격은 투자자의 개별적인 무차별곡선의 형태에 관계없이 결정된다. 세째, 위험의 적절한 측정수단은 여전히 共分散이나 위험자산 i와 市場性資產 및 非市場性資產 모두로 된 포오트폴리오와의 共分散으로 측정되어야 한다는 것이다.

5. 同質的 期待

자본자산가격결정모형에서는 모든 투자자들이 투자대상의 미래 기대수익율과 위험에 대하여 동질적인 기대를 한다고 가정하고 있으나, 만약 투자자들이 현실적으로 미래의 기대수익율 및 위

14) Ibid., p. 178, p. 357.
15) Ibid., pp. 176-177.

험에 대해서 同一한 情報를 가지고 있지 않고, 이에 대해 각각 異質的인 기대를 한다면, 이들은 相異한 投資機會集合을 인지하게 되고, 따라서 명백히 상이한 포오트폴리오를 선택하게 될 것이다. 그리하여 수많은 자본시장선과 증권시장선이 存在하게 되어, 결과적으로 한 자산에 대한 均衡價格이 形成될 수 없고, 그 가격이 계속적으로 변동하여 市場은 균형상태를 유지할 수 없게 되는 것이다.

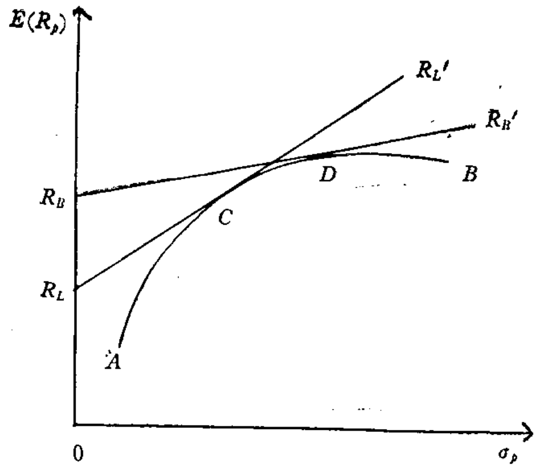
한편 Lintner는 異質的 期待의 존재는 期待收益率과 共分散이 투자자들의 기대의 복합가중평균으로 표시된다는 것 외에는 자본자산가격결정모형에 어떤 치명적인 영향을 미치지 않는다고 하였다.[16] 그러나 Lintner의 견해는 제한된 조건하에서만 타당하며, 따라서 일반적인 여건하에서도 타당성을 지니고 있는가에 대해서는 의심의 여지가 있다.[17]

만약 투자자들이 미래의 기대수익율과 위험에 대해 異質的인 期待를 한다면 시장포오트폴리오는 效率的일 수 없으며 이 점은 바로 이 模型에 대한 實證的 檢證을 불가능하게 만든다.

6. 無危險資產의 存在

Sharpe-Lintner의 자본자산가격결정모형에서는 Markowitz의 效率的 投資線에서 無危險利子率로 借入·貸出이 가능한 無危險資產의 存在를 假定함으로써 새로운 效率的 投資線인 資本市場線을 유도하였다. 그러나 現實的으로 無危險利子率로 무한히 借入·貸出할 수 있는 것은 아니며, 일반적으로 借入利子率이 貸出利子率보다 높다.

이와 같은 여건하에서 資本市場線은 다음과 같이 바뀌어진다.



〈圖 9〉 차입이자율과 대출이자율이 다른 경우의 資本市場線

차입이자율이 R_B, 대출이자율이 R_L일때의 자본시장선은 $\overline{R_LC}, \widehat{CD}, \widehat{DR_B}$가 될 것이다. 여기서 차입이자율과 대출이자율의 차이가 적으면 적을수록 $\widehat{CD}$의 曲線部分은 줄어들고 자본시장선은 直線에 가까운 형태를 지닌다.

한편 Black은 ① 어떠한 無危險資產도 존재하지 않고, 無危險利子率에 의한 借入·貸出이 불가능하다는 假定과 ② 無危險資產이 존재하며, 無危險資產에 대한 借入에 있어서 制約이 존재한다는 假定하에서 市場均衡에 대해 연구한 결과, 이와 같은 상황하에서도 베타(β)는 여전히 자산의 위험을 측정하는 적절한 수단이 되며, 위험자산에 대한 期待收益率은 그것의 체계적 위험과 線型性을 유지하고 있어 자본자산가격결정모형의 중요한 결론들이 純粹無危險資產의 存在를 필요로 하지 않는다고 하였다.[18]

Black은 투자자들이 市場포오트폴리오와 相關關係가 없는 즉 시장포오트폴리오와 0의 共分散을 가지고 있는 포오트폴리오—零β포오트폴리오—를 인지할 수 있다고 가정하고, 이 때 개별자산 또는 포오트폴리오의 期待收益率은 다음과 같이 표시된다고 하였다.

$$E(R_i)=E(R_z)+\{E(R_m)-E(R_z)\}\beta_i \qquad (31)$$

$E(R_z)$: 零 β포오트폴리오의 기대수익율

이 모형을 기본적인 자본자산가격결정모형과

16) J. Lintner, "The Aggregation of Investors Judgement and Preferences in Purely Competitive Markets," Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 4, No. 4. (Dec. 1969), pp. 587-616.

17) Lintner의 견해는 Pratt와 Arrow에 의한 絕對危險回避係數 $\alpha_i=\frac{dE(R)}{d\sigma^2}$가 일정한 경우, 期待收益率과 分散의 限界代替率이 일정하여 效用의 無差別曲線이 直線의 형태를 지니는 매우 한정적인 조건하에서 제시된 것이다.

18) F. Black, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," Journal of Business, 1972, pp. 444-445.

비교하여 보면, $E(R_t)$가 無危險利子率 R_f와 대체된 것뿐이지만, 이것은 無危險資産의 존재 또는 無危險利子率에 의한 借入·貸出등의 假定을 전제로 할 필요가 없다. 또한 기본적인 자본자산가격결정모형에 대한 實證的 檢證을 할 경우에는 事後的인 市場포오트폴리오의 收益率과 개별자산 또는 포오트폴리오의 收益率을 통계처리하여 구해진 回歸式의 Y축절편이 R_f와 의미있는 차이를 보이지 않아야 하나, Black의 위 모형을 이용하는 경우에는 그럴 필요가 없다.

그리고 Brennan은 차입이자율과 대출이자율에 차이가 있을 경우 修正된 자본자산가격결정모형은 차입이자율과 대출이자율에 의해 한정된다고 하였다.[19]

그러나 Black, Jensen, Scholes등의 경험적 연구결과에 의하면 Y축절편이 차입이자율을 넘어 Brennan의 修正模型의 예상을 벗어났다.[20]

V. 結　　論

本稿에서는 자본자산가격결정모형의 假定을 고찰하고 이를 기초로 자본자산의 균형가격결정에 대한 기본모형을 도출한 후 이들 가정을 純粹理論的 또는 現實的인 側面에서 再吟味해 보고, 자본자산가격결정모형을 보다 일반화시켜 보려는 시도에 대해서도 살펴보았다.

前述한 바와 같이 자본자산가격결정모형에서는 未來收益率의 平均과 分散이라는 기준을 투자자의 자산선택기준으로 전제하여, 개별자산 또는 포오트폴리오의 收益率은 그것의 體系的 危險과 線型關係에 있음을 보여주고 있다. 그러나 전통적인 平均—分散基準에 의한 分析은 收益率의 確率分布가 正規分布이고 投資者의 效用函數는 2次式이라는 非現實的인 假定을 기초로 하고 있는 바, 收益率의 平均—分散뿐만 아니라 非對稱度까지 고려한 좀더 일반화된 모형의 도출에 관한 연구가 계속되고 있다. 최근에 있어서도 Ball, Banz, Cheng, Graver, Reinganum등의 학자들이 기대수익율의 결정변수로서 자산의 체계적 위험외의 다른 변수들이 고려되어야 함을 보여주고 있다.

平均—分散—非對稱 基準이 투자자의 선택행동을 보다 적절히 설명함으로써 平均—分散基準의 한계성을 극복하고, 자본자산의 균형가격결정에 관한 좀더 일반적인 모형을 도출할 수 있을 수도 있으나, 여전히 이 새로운 기준에 의해서도 投資者의 效用函數가 명확하게 설정되지 않기 때문에 이 기준에 의한 市場均衡模型은 아직 자산평가의 일반적 모형으로서 성숙되지 못하고 있다.

19) M. Brennan, "Capital Maket Equilibrium with Diverged Borrowing and Lending Rates, "Journal of Financial and Quantitative Analysis (Dec. 1971).
20) F. Black, M. Jensen, M. Scholes, "The Capital Asset Pricing Model: Same Empirical Test," Studies in the Theory of Capital Markets, N.Y. Praeger Publishers, 1972.