공급 불확실성 하에서의 다기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책에 대한 연구*

朴 相 昱**

《目 次》

요 약

본 논문은 공급 불확실성이 존재하는 다기간 Newsboy 문제의 주문정책 결정을 분석한다. 연구의 대상이 되는 주문시스템에서 소매상의 각 기간 수요는 정규분포를 따르고, 재고유지 비용과 backorder 비용 함수는 선형함수라고 가정하며, 주문에 따른 고정비는 없다고 가정한다. 소매상은 정기주문 시스템을 사용한다. 즉, 소매상은 매 기간마다 공급업자에게 주문을 하고, 공급업자는 주문을 받은 지 l기간 후에 배달을 하는데, β의 확률을 가지고 주문량 전량을, $(1-\beta)$의 확률을 가지고 (주문량 - K) 개를 소매상에 배달해 준다. 이 논문의 주요한 결과는 다음과 같다: (1) 이와 같이 공급 불확실성을 갖는 다기간 Newsboy 문제는 수학적 조작을 통해 공급의 불확실성이 없는 일반적인 다기간 Newsboy 문제로 변환시킬 수 있다. 따라서, 공급 불확실성이 존재하는 다기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책은 일반적인 Newsboy 문제의 최적 주문정책과 동일한 형태를 갖는다.; (2) 이러한 결과는 가능한 배달량이 세 개 이상인 경우에도 성립한다; (3) 주문 고정비가 있는 경우에도 유추적인 결과가 성립한다. 즉, (s, S) 정책이 최적 주문정책이다.

* 본 연구는 서울대학교 경영대학 경영연구소의 연구비 지원에 의해 수행되었음.

** 서울대학교 경영대학 전임강사

I. 서 론

재고 모형 중 가장 널리 알려진 모형 중의 하나인 다기간 Newsboy 모형은 여러 가지 가정들은 사용하고 있으며, 그 중의 하나가 공급업자의 신뢰도(reliability)가 완벽하다는 것이다. 즉, Newsboy모형에서는 공급측면의 불확실성이 없다고 가정하기 때문에 공급업자는 매 주문주기마다 고객의 주문량 전량을 항상 약속된 시간에 배달해 줄 수 있다. 그러나 현실에서는 이와 같이 완벽한 신뢰도를 갖는 공급업자는 찾아보기 힘들다. 오히려 어떤 때는 주문량 전량을 다른 때는 주문량의 일부분만을 정해진 시간에 맞춰 배달하거나, 또는 주문량을 정해진 시간보다 늦게 배달해 주는 공급업자가 일반적이라고 할 수 있다.

이 논문에서는 공급업자가 소매상의 주문에 따라 배달해 주는 양이 확률분포를 따르는 경우를 모형화 하여 분석한다. 즉, 공급업자가 소매상의 주문량을 전량 배달해 주는 경우도 있으나, 주문량보다 적게 배달해 줄 가능성이 있는 경우를 모형화 한다. 소매상은 정규분포를 따르는 수요를 충족시켜야 하며, 각 기간 수요는 동일한 정규분포를 따르며, 또한 상호 독립적으로 분포한다. 소매상은 매 기간마다 공급업자에게 주문을 하며, 공급업자는 이것을 l 기간이 지난 후에 배달하는데, 이때 공급업자가 배달하는 양이 주문량 전량일 확률이 β이고 (주문량 - K)개일 확률이 $(1-\beta)$이다. 구입 단가는 c이고 배달되는 시점에 지급된다. 논의의 간결성을 위하여 주문에 따른 고정비가 없다고 가정한다. 마지막 절에서 주문 고정비가 존재는 경우에도 유추적인 결과를 얻을 수 있다는 것을 보인다. 만약 가지고 있는 재고로 모든 수요를 만족시킬 수 없는 경우에는 다음 기의 주문량에서 충족시킨다(backordering). 소매상의 재고유지 비용 함수와 backorder 비용 함수는 선형이라고 가정한다. 사용되는 모형에서는 할인요소(discounting factor)를 사용하며, 할인된 총 비용(= 무한기간 동안 발생하는 구매 비용, 재고유지 비용, backorder 비용의 합)을 최소화하는 주문정책을 구하고자 한다.

본 연구의 주요 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 앞에서 설명한 바와 같이 공급업자의 배달량에 불확실성이 존재하고 주문 고정비가 없는 경우, 무한기간 문제의 최적 주문정책은 안정적 기본재고 정책이다.

(2) 위의 사실은 3 개 이상의 서로 다른 배달량이 가능한 경우에도 성립한다.

(3) 주문 고정비가 존재하는 경우에도 유추적인 결과가 성립한다. 즉, (s, S) 정책이 최적 주문정책이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다; 2절에서는 공급의 불확실성이 존재하는 경우의 동적 재고모형에 대한 과거의 연구를 살펴본다. 3절에서는 본 논문에서 사용되는 정의들을 소개하고, 우리의 문제를 동적계획 문제로 모형화하며, 근시적 정책(myopic policy)이 최적임을 증명한다. 4절에서는 일기간 문제의 최적 주문정책을 구하고, 5절에서는 모형의 확장과 미래 연구에 대해 설명한다.

Ⅱ. 과거의 연구

공급측면의 불확실성을 모형화 하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있다. 그 중에 대표적인 방법이 공급측면의 불확실성을 공급업자 배달시간(lead-time)의 불확실성으로 모형화 하는 것이며 여러 논문들이 이러한 접근법을 사용하고 있다. Kaplan(1970)은 확률적으로 분포하는 배달시간을 갖는 정기주문 시스템을 모형화 하였다. 그는 배달시간은 배달 주기의 배수라고 가정하였다. 두 가지 가정하에서, 즉, 나중에 주문한 것이 먼저 주문한 것보다 일찍 배달될 수 없다는 가정(no order-crossing)과 배달 시간은 현재 처리 중인 주문의 수나 양에 영향을 받지 않는다는 가정하에서, 최적 주문정책은 배달시간이 확정적인 경우의 최적 주문정책과 유사하나 최적 기본재고(base-stock) 수준에 차이가 있음을 보이고 그 이유를 설명하였다. Ehrhardt(1984)는 배달시간에 대해 Kaplan과 동일한 가정을 하고 있다. 그는 미시적 기본재고 정책이 최적이 되는 조건을 제시하였으며, 무한기간(infinite horizon) 또는 유한기간(finite horizon) 문제 모두에서 (s, S) 정책이 최적 주문정책이라는 것을 증명하였다. Park et al.(1996)은 배달시간이 주문주기보다 작은 경우를 분석하여 Ehrhardt와 같은 결과를 도출한다. Nahmias (1979)는 재고가 부족하면 판매기회를 상실하는 경우(lost-sales case)를 가정하고 배달의 불확실성을 분석하고 있다.

본 연구는 공급의 불확실성을 다른 방법으로 모형화 한다. 공급업자가 소매상으로부터 주문을 받은 후 약속한 시간에 배달해 줄 수 있는 양이 확률적으로 변한다고 가정하고 다기간 Newsboy 모형을 분석하여, 최적 주문정책의 형태를 밝히고자 한다.

Ⅲ. 동적계획 모형

본 논문에서 사용되는 정의들을 정리해 보면 다음과 같다.

l = 공급업자의 배달기간

p = backorder 비용/개*기간

h = 재고유지 비용/개*기간

c = 구입단가

x = 주문할 당시의 재고수준(=보유재고 + 배달 중에 있는 주문량 - backorder)

δ = 일 기간 수요를 나타내는 확률변수, 평균이 μ이고, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다.

δ^k = k기간 수요를 나타내는 확률변수, $k\mu$이고, 표준편차가 $\sigma\sqrt{k}$인 정규분포를 따른다.

a = 할인요소

$L(y) = -p(y-\mu) + (p+h)\int_{-\infty}^{y}\Phi(\delta)d\delta$, 기초재고가 y일 때 일 기간 총 기대비용.

$L^k(y) - p(y-\mu) + (p+h)\int_{-\infty}^{y}\Phi(\delta^k)d\delta^k$, 첫 기간의 기초재고가 y이고 이후로 새로운 배달이 없다고 가정하고 구한 k기간 말의 총 기대비용.

앞의 정의들을 이용하여 공급의 불확실성이 존재하는 무한기간 문제를 동적계획 문제로 모형화 하여 보자. $f_t(x_t)$를 t번째 주문량 결정시 재고수준(inventory position)이 x_t일 때, t번째 주기부터 발생하는 총 기대비용의 합이라 정의하면 배달량에 불확실성이 존재하는 문제는 동적계획법을 사용하여 다음과 같이 모형화 할 수 있다. 논의의 간결성을 위해, 문제의 일반성을 해치지 않고 $l = 1$이라 가정하자. $t = 1, 2, \ldots$에 대해 다음이 성립한다.

DP:

$$f_t(x_t) = \min_{y_t \geq x_t} \left(\begin{array}{l} \beta c(y_t - x_t) + (1-\beta)c(y_t - x_t - K) \\ + \beta L(y_t) + (1-\beta)L(y_t - K) \\ + \alpha E[\beta f_{t+1}(y_t - \delta) + (1-\beta)f_{t+1}(y_t - K - \delta)] \end{array} \right) \qquad (1)$$

식(1)의 괄호 안에 있는 첫 두 항목은 t번째 주기의 구입비용을, 다음 두 항목은 t번째 주기의 기대 재고유지 비용과 backorder 비용의 합을, 마지막 항목은 $(t+1)$번째 주기 이 후에 발생하는 총 기대비용의 합을 나타낸다.

DP에 있는 항목들을, 특히 구입비용 항목들을 재배치해 보자. x_t는 y_t의 함수가 아니라

y_{t-1}의 함수이기 때문에, t번째 주기에 x_t로 인한 구입비용의 증감을 t번째 주기 총 기대비용에서 빼어서 $(t-1)$번째 주기의 총 기대비용에 더해 주어도 원래문제 (DP)의 최적 해를 변화 시키지 않는다. 구입비용 항목들을 위에서 설명한 바와 같이 재배치하면 t번째 주기의 구입비용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c(1-\alpha)(y_t-(1-\beta)K)+\alpha c\mu \tag{2}$$

식 (2)를 이용하여 순환방정식을 다음과 같이 재정의 할 수 있다. 즉, $t=1,2,\ldots$에 대해 다음이 성립한다.

$$\tilde{f}_t(x_t)=\min_{y_t\geq x_t}\left(\begin{array}{l} c(1-\alpha)(y_t-(1-\beta)K)+\alpha c\mu \\ +\beta L(y_t)+(1-\beta)L(y_t-K) \\ +\alpha E[\beta\,\tilde{f}_{t+1}(y_t-\delta)+(1-\beta)\,\tilde{f}_{t+1}(y_t-K-\delta)] \end{array}\right) \tag{3}$$

식 (3)에서 $y_t\geq x_t$을 무시하면 $\tilde{f}_t$는 더 이상 x_t의 함수가 아니다. 따라서 미시적 문제(myopic problem)을 풀어 t번째 주기의 최적 주문량(=주문 직후의 재고수준) y_t^*를 구할 수 있으며, 또한 각 주기에 해당하는 미시적 문제가 모두 동일하므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$y_1^*=y_2^*=\cdots=y_t^*=y_{t+1}^*=\cdots \tag{4}$$

즉, 매 주기 마다 최적 주문량은 변하지 않는다 (stationary policy).

Ⅳ. 미시적 주문 정책 (단일 주기 문제)

앞의 절에서, 미시적 정책이 공급의 불확실성이 있는 무한기간 Newsboy 문제를 최적화하며, 최적 주문정책은 주기마다 변하지 않는다는 것을 보였다. 이번 절에서는 미시적 문제를 풀어 최적 주문정책의 형태를 구하도록 하겠다. 앞으로의 논의에서는 표현의 간결성을 위해 주기를 나타내는 첨자 t를 생략한다.

주기초의 재고 x가 주어졌을 때 미시적 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

MP:

$$\min_{y \geq x} \left(\begin{array}{l} c(1-\alpha)(y-(1-\beta)K) + \alpha c\mu \\ + \beta L(y) + (1-\beta)L(y-K) \end{array} \right) \tag{5}$$

$C(y)$와 $G(y)$를 다음과 같이 정의하자.

$$C(y) = \beta L(y) + (1-\beta)L(y-K)$$
$$G(y) = c(1-\alpha)(y-(1-\beta)K) + \beta L(y) + (1-\beta)L(y-K)$$

$C(y)$는 기대 재고유지 비용과 backorder 비용의 합을 나타내며, $G(y)$는 총 기대비용 중 y의 함수인 항목들로만 이루어진다. 식 (5)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\min_{y \geq x} \{G(y) + \alpha c\mu\} \tag{6}$$

식 (6)의 괄호 안에 있는 두 번째 항목은 상수이므로 주문정책을 선택하는데 영향을 주지 않기 때문에, $G(y)$를 최소화 하는 것만으로도 충분하다. $L(.)$가 볼록 함수(convex function)이기 때문에 $G(y)$도 볼록 함수임을 쉽게 증명할 수 있다(Veinott(1965)). 제약식 $y \geq x$를 무시할 때, 최적인 y는 $\frac{dG(y)}{dy} = 0$을 만족시킨다. $\Phi(.)$을 표준 정규분포의 분포함수(distribution function)라 하면 y^*는 다음 조건을 만족한다.

$$\beta\Phi(z_1^*) + (1-\beta)\Phi(z_2^*) = \frac{p-(1-\alpha)c}{p+h}, \tag{7}$$

단, $z_1^* = \frac{y^* - 2\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ 이고, $z_2^* = \frac{y^* - K - 2\mu}{\sigma\sqrt{2}}$,

따라서, 미시적 문제의 최적 주문정책은 기본재고 정책이다. 즉, 만약

$x < y^*$이면, y^*까지 재고수준을 올리고,

$x \geq y^*$이면, 주문을 하지 않는다.

위의 사실과 식 (4)을 결합하면, 무한기간 문제에서는 안정적 기본재고 정책(stationary base-stock policy)가 최적임을 알 수 있다.

V. 논문의 확장 및 미래 연구

앞에서 공급의 불확실성이 존재하는 경우 무한기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책은 안정적 기본재고 정책이라는 것을 보였다. 본 절에서는 이러한 결과가 보다 일반적 문제에 대해서도 유효하다는 것을 보여주고, 모형의 확장 가능성을 살펴봄으로써 본 논문을 맺고자 한다.

(1) $l > 1$인 경우

$l > 1$인 경우에도 앞 절에서 보인 사실이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다. 차이점은 앞으로 l기간 후까지 배달 받을 총량이 $(l+1)$개의 서로 다른 값을 가질 수 있다는 것이다. 앞으로 l기간 후까지 배달 받는 총량이 총 주문량 보다 $m \cdot K$개 적을 확률은 ${}_lC_m \beta^{l-m}(1-\beta)^m$이 된다(단, $m = 0, 1, \ldots, l$). ${}_lC_m \beta^{l-m}(1-\beta)^m$을 θ_m이라 정의하면 최적 주문량에 대해 다음이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\sum_{m=0}^{l} \theta_m \Phi(z_m) = \frac{p-(1-\alpha)c}{p+h}, \text{ 단, } z_m^* = \frac{y^* - mK - (l+1)\mu}{\sigma\sqrt{l+1}}, \forall m \tag{7}$$

(2) 배달량이 3개 이상의 서로 다른 값을 갖는 경우

앞에서 배달량이 확률분포를 따르며 서로 다른 2 개의 값을 갖는 경우, 안정적 기본재고 정책이 최적임을 알았다. 이러한 결과는 배달량이 확률분포에 따르며 서로 다른 3 개 이상의 값을 갖을 수 있는 경우, 즉, 공급업자가 주문량보다 K_i개 만큼 적게 배달해 줄 확률이 β_i, $i = 1, 2, \ldots n$ (단, $n > 2$ 이고 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$)인 경우에도 유효하다. 즉, 고려해야 할 경우의 수는 늘어나지만, 3절, 4절과 동일한 방법으로 안정적 기본재고 정책이 최적임을 증명할 수 있다.

(3) 주문 고정비가 있는 경우

본 논문이 논의의 간결성을 위해, 주문 고정비가 0인 경우를 분석하였으나, 본 논문의 결과를 주문 고정비가 있는 경우로 쉽게 일반화 할 수 있다. 예를 들어, 재고유지 비용과 backorder 비용 함수가 볼록 비감소 함수(convex and non-decreasing function)이고 구매 비용 함수가 선형인 경우, $G(.)$가 볼록 함수이기 때문에 시스템 패러미터들이 일정한,

조건을 만족하면, 최적 주문정책이 (s, S) 정책임을 쉽게 증명할 수 있다. (Veinott (1966))

(4) 미래 연구

본 논문에서는 공급의 불확실성을 배달량의 불확실성으로 모형화 하였다. 특히, 배달량이 소매상의 주문량보다 K_i개 적을 확률이 β_i라고 가정하였다. 이 방법 외에도 배달량의 불확실성을 모형화 할 수 있는 여러 가지 방법이 있을 수 있다 (예를 들어, 배달량이 소매상의 주문량보다 a_i% 적을 확률이 β_i라고 가정하고 공급의 불확실성을 모형화 할 수 있다). 이와 같이 다른 방법으로 공급의 불확실성을 모형화 했을 때 본 논문의 주요 결과가 계속 유효한 지를 검토하는 것은 본 논문의 가치를 증가 시킬 수 있을 것이다. 이 밖에도 공급측면의 불확실성의 여러 가지 형태(배달량의 불확실성, 배달 시간의 불확실성등)를 결합하여 분석함으로써 본 연구의 결과를 일반화 할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

1. Ehrhardt, R., "(s,S) Policies for a Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times," *Operations Research*, 32, 1984, pp121-132.
2. Jnsson, H. and E. A. Silver, "Stock Allocation among a Central Warehouse and Identical Regional Warehouse in a Particular Push Inventory Control System," *International Journal of Production Research*, 25, 1987, pp191-205.
3. Jnsson, H. and E. A. Silver, "Analysis of a Two-echelon Inventory Control System with Complete Redistribution," *Management Science*, 33, 1987, pp215-227.
4. Kaplan, R. S., "A Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times," *Management Science*, 16, 1970, pp491-507.
5. Kumar, A., L. B. Schwarz, and J. E. Ward, "Risk-Pooling along a Fixed Delivery Route Using a Dynamic Inventory-Allocation policy," *Management Science*, 41, 1995, pp344-362.
6. Nahmias, S., "Simple Approximation for a Variety of Dynamic Leadtime Lost-Sales Inventory Models," *Operations Research*, 27, 1979, pp904-924.
7. Veinott, A. F., "Optimal Policy for a Multi-Product, Dynamic Non-Stationary

Inventory Problem," *Management Science*, 12, 1965, pp206-222.

8. Veinott, A. F., "On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof," *SIAM J. Appl. Math.*, 14, 1966, pp1067-1083.
9. Sangwook Park, L. B. Schwarz, and J. E. Ward, "A Single-Retailer Periodic -Review System with Stochastic Lead-times," Working Paper, 1996.