광고효과의 올바른 분석을 위한 데이터 간격의 연구

김 병 도*

目 次

요 약

시간상으로 통합(temporally aggregate)한 데이터로부터 광고효과의 지속기간을 추정하면 우리는 왜곡된 추정값을 가지게 된다. 그 동안 연구자들은 true data interval을 알고 있는 경우 통합된 데이터(aggregate data)로부터 광고효과의 지속기간을 추정한 후 이로부터 참(true) 광고효과 지속기간의 근사치를 구하는 여러 방법론을 제시하였다. 그러나 true data interval이 무엇이 되어야 하는가에 대한 어떤 이론이나 실증연구가 아직 없다. 많은 연구자들은 true data interval이 inter-purchase time과 같다고 가정하고 있는데 그 이유에 대하여는 어떤 설명도 없다는 점이 흥미롭다. Continuous time model은 이 문제를 이론적으로 해결한 것은 사실이지만 모든 실증 데이터는 discrete time에서 수집되므로 현실적인 문제를 해결하지는 못하고 있다. 데이터가 점점 더 disaggregate되어 가는 추세에 있는 요즈음 어느 정도의 disaggregation이 올바른가에 대한 문제, 즉 적정한 data

* 서울大學校 經營大學 基金 助敎授

interval을 결정하는 문제는 매우 중요한 문제임에 틀림없다.

본 연구는 첫째 왜곡된 결과를 피할 수 있는 가장 좋은 data interval은 inter-exposure time이라는 점을 보여 주고 있다. 또한, 적정한 data interval과 inter-purchase time은 아무런 관계가 없다. 둘째, 만약 광고가 매우 serially correlated하다면 aggregate data로부터 도출한 광고의 current effect는 진정한 광고의 총효과(true total effect of advertising)와 동일하다는 것을 증명하였다. 셋째, 대부분의 경우, Koyck model을 사용하여 aggregate data로부터 광고의 장기효과를 추정하는 것은 잘못된 모형의 사용이라는 위험과 aggregation bias라는 위험을 감수하여야 한다는 것을 보여 주고 있다.

광고와 판매의 선형관계라는 가정만을 한 우리의 분석은 매우 일반적인 분석으로, 우리의 분석결과는 어떤 종류의 advertising decay의 경우에도 적용 가능하고 또한 광고 및 판매의 serial correlation에 있어 어떤 종류의 (stationary) 패턴에도 적용이 가능하다. 이 분야의 기존의 연구는 geometric decay에 한정이 되어 있기 때문에 Koyck model의 결과와 다른 광고 반응 모형의 결과를 비교할 수 없었다. 우리의 분석 방법론은 Fourier transform과 관련된 수학에 기초를 두고 있다. 또한 본 연구는 Sims(1971, 1972)의 논문을 두 가지 점에 있어 확장하였는데 그 첫째가 discrete data로의 확장이고 둘째가 광고와 판매 process가 동시에 일어나지 않는 케이스로의 확장이다.

본 연구의 가장 중요한 시사점은 최근에 개발된 TVmeter-scanner 데이터가 광고의 총효과를 추정하는데 필수 불가결하다는 점이다. 그와 같은 데이터 덕택에 우리는 inter-exposure time으로의 분석이 가능하게 되었다. 본 연구의 두 번째 시사점은 Koyck model은 광고 효과를 분석하는데 적절하지 않다는 점이다. 마지막으로 광고효과가 3개월부터 15개월 정도 지속된다고 추정한 과거의 연구는 신빙성이 없다는 점이다.

Ⅰ. 서 론

광고효과는 어느 정도 지속되는가? 광고효과를 추정하는 데에 어떤 데이터가 적절한가? 이 주제는 마케팅 관리자, 정책결정자, 그리고 법조계의 인사 모두에게 중요한 시사점을 가지고 있다. 만약 광고효과가 current period 이상 지속된다면 광고의 참 비용은 적절한 기간동안 분배되어야 한다. 이 사실은 마케팅 관리자가 광고 비용 지출을 계획하고 평가하는데 영향을 미친다. 또한 광고의 효과가 오랜 기간 지속된다면 당기에 지출한 광고 비용이 미래 새로운 시장 진입에 대한 장벽으로 작용할 수 있기 때문에 정책 결정자는 이 점을 유의하여야 한다.

또한 광고의 장기효과를 올바르게 측정하는 것은 비합법적인 광고로 인해 발생한 피해의 보상액을 결정하는데 결정적 역할을 한다.

시간상으로 통합(temporally aggregate)한 데이터로부터 광고효과의 지속시간을 추정하면 우리는 왜곡(bias)된 추정값을 가지게 된다(Clarke 1976, 1982). 이러한 bias는 micro data에서 성립하는 참모형이 aggregate data에도 적용된다고 가정함으로써 발생하는 specification error로부터 기인한다(Bass and Leone 1983; Rao 1986; Weinberg and Weiss 1982). 여러 요인이 bias의 방향과 정도에 영향을 주지만 그 중에서 가장 중요한 것은 아마도 micro level에서의 missing advertising process에 대한 가정일 것이다(Russell 1988; Blattberg and Jeuland 1981). 연구자들은 aggregate data로부터 참 모수를 도출하는 적어도 세 가지 방법론을 제시하고 있다. 첫째는 참 판매 데이터의 근사값으로 추정하는 법이다(Bass and Leone 1983). 둘째는 참 광고 데이터의 근사값으로부터 도출한 공식을 이용하는 법이고(Weiss, Weinberg and Windal 1983; Kanetkar, Weinberg and Weiss 1986a, 1986b) 셋째는 참 광고 데이터를 추론한 후에 도출하는 방법이다 (Srinivasan and Weir 1988). 반면, Russell(1988)은 Koyck model의 경우 참 모수를 도출하는 일반적인 공식을 제안하였다.

그러나 기존의 방법론은 연구자가 micro 데이터 자체는 가지고 있지 않더라도 적어도 참 (micro) data interval을 알고 있다는 가정이 필요하다. 기존의 연구자들은 단순히 참 data interval을 알고 있다고 가정하든가, 참 data interval이 평균 inter-purchase time과 같다고 가정하였다 (Bass and Leone 1983; Weiss, Weinberg and Windal 1983; Srinivasan and Weir 1988). Weiss, Weinberg and Windal(1983, p279)은 그들의 논문에서 "관습적으로 각 구매가 일어나는 시점의 간격을 참 data interval로 간주하고 있다"고 기술하고 있다. 이 분야의 연구자들에게 비공식적인 조사를 하여 보았는데 그 결과도 마찬가지였다. 그러나 이러한 관습을 뒷바침하는 어떤 행동과학적 이론이 존재하지 않고 수학적인 증명도 되어 있지 않다는 점에 있어 연구자들은 또한 동의하고 있다 (Vanhonacker 1983).

Continuous time 모형은(Rao 1986) 위 문제의 이론적인 부분은 해결하고 있지만 실증적인 문제는 해결을 하지 못하는데, 그 이유는 실증 문제에 있어서 시간은 이산적(discrete)인 단위로(예: 일, 시간, 분) 측정되어야 하고 그 결과 시간적인 aggregation이 존재할 수 밖에 없기 때문이다. 요약하자면, 참 data interval에 대한 정보가 없이는 어떤 추정 방법론으로도 광고효과의 지속시간이나 data interval bias를 측정할 수 없다는 것이다.

Aggregate data를 이용하여 광고효과의 지속시간을 추정한 많은 과거의 연구들이 있지만, 바로 이 참 data interval에 대한 불확실성 때문에 우리는 그들의 추정치를 신뢰할 수 없다(Clarke 1976; Assums, Farley and Lehmann 1984). 동시에 최근의 발전된 기술로 이제 우리는 광고 및 구매 데이터를 주, 분, 초 단위의 매우 짧은 구간으로 수집하고 있다. 새로운 경제 통계학적 모형을 이들 데이터에 적용하여 time aggregation 문제를 다소 해결할 것으로 기대한다. 그러나 이러한 종류의 데이터는 새로운 문제를 제기하고 있다. 경제 통계학적 분석에는 주간, 일간, 분간, 초간 데이터 중에서 어떤 data interval이 가장 적절한가? 과연 data disaggregate bias는 존재하는 것일까? 광고 효과를 측정하는데 필요한 최소한의 data interval이 존재하는 것일까? 흥미롭게도 Clarke(1976, p355)는 "구매 사이클이 주간 data interval보다 크므로 주간 데이터로 분석한 추정치는 적은 쪽으로 왜곡되어 있다"고 주장하고 있다.

우리는 본 논문에서 경제 통계학적 모형을 적용하는데 가장 안전한 data interval은 inter-exposure time임을 보여 주고 있다. 또한 참 data interval은 inter-purchase time과는 아무 관련이 없음을 보이고 있다. 이를 위해 참 모형을 aggregate data에 적용할 때의 시사점에 대하여 논하고 그러한 데이터로부터 참 모수에 대하여 추론할 수 있는 것이 무엇인지를 결정하고자 한다. 우리는 우선 우리 모형의 배경을 제시하고 우리의 논리를 전개하며 우리 분석의 가정과 시사점을 논하기로 한다.

Ⅱ. 논문의 배경

1. 분석 모형의 정의

Data interval이란 데이터를 수집하는 간격을 의미한다(예: 연간, 주간, 일간). Inter-purchase time은 소비자가 제품을 구매하는 시점간의 간격을 의미한다. Exposure time은 광고가 처음 나가게 된 시점을-소비자가 그 광고를 보든 말든-의미하며, inter-exposure time은 광고가 나가는 시점간의 간격을 지칭한다. Micro data는 data interval이 inter-exposure time보다 작거나 같은 경우의 데이터를 이르며, aggregate data는 inter-exposure time보다 큰 데이터를 지칭한다. Micro data의 경우 ad-intensity란 video/audio 광고의 길이 또는 print 광고의 크기를 의미한다.

광고의 누적효과(cumulative effect of advertising)는 현재의 광고 exposure가 현재와 미래의 time interval에 걸쳐 소비자 구매에 미치는 효과의 총계를 의미한다. 광고효과의

지속시간(duration of advertising effects)은 어떤 하나의 광고 exposure가 구매에 미치는 시간의 길이를 지칭한다. 또한, p% duration interval이란 총 광고효과의 p%가 나타나는 시간의 길이를 지칭한다. 광고의 현재효과(current effect of advertising)는 광고의 누적효과 중에서 광고 exposure와 동일한 data interval에 일어나는 효과의 비율을 나타내며, 장기효과(carryover or lagged or long-term effect)는 이후 data interval에 발생하는 나머지 효과 부분을 지칭한다. 광고의 쇠퇴함수(advertising decay function)는 광고의 쇠퇴효과를 수식화 한 함수를 말한다.

지속시간의 추정치가 참값과 규칙적으로 다르던가, 모형을 respecification하여 참값을 얻을 수 없다든가, 대수학적인 변형을 통해 참값을 도출할 수 없는 경우, 우리는 지속시간의 추정치가 왜곡(bias)되었다고 말한다. Data interval bias는 참 carryover effect와 aggregate data로부터 추정된 값의 차이를 나타내는 용어이다. True data interval이란 carryover effect의 추정치를 왜곡하지 않는 data interval을 지칭한다.

2. 모형의 가정

이 분야의 과거 연구와 비교를 할 수 있고 분석을 용이하게 하기 위해 우리는 하나의 기업만이 존재함을-물론 판매에 영향을 미치는 advertising intensity는 변화가 가능하지만- 가정한다. 우리의 모형은 cross-sectional aggregation은 무시하기로 가정하여 우리의 분석은 한 소비자나 유사한 일군의 소비자가 구매를 하는 경우에 적용되는 모형이다. 과거의 연구와는 다르게 선형 광고반응 모형을 채택함으로써 다양한 형태의 판매 및 광고 process의 분석이 가능하다. 과거의 연구는 분석을 geometric decay에 한정함으로써 매우 한정된 판매 및 광고 process의 분석만을 할 수 있었다.

3. 분석의 직관적 설명

우리의 분석에 깔려 있는 하나의 원칙은 aggregate data는 추정치를 왜곡하고 data interval이 너무 작은 데이터 또한-데이터 수집, 보관, 분석의 비용을 현저히 증대함과 동시에-추정치를 왜곡할 수 있다는 것이다. 그러므로 우리의 목표는 왜곡된 추정치를 제공하지 않는 largest data interval, 즉 적정한 data interval을 도출하는데 있다.

우리의 분석을 직관적으로 설명하면 다음과 같다. Aggregate data는 data interval 내에서 발생한 모든 exposures를 그 구간내의 어떤 임의적인 시점에서 발생한다고 가정하고 관측된 decay를-주로 마지막 exposure-구간내의 모든 exposures의 평균효과로 간주한다. 이

러한 잘못된 가정은 모든 exposures의 duration interval을 왜곡하게 된다. 이 경우 inter-exposure time이 data interval의 정수의 곱이 되지 않는 한에는 inter-exposure time보다 적은 data interval은 광고효과를 광고가 발생한 구간 이외의 구간에 배분함으로써 duration interval의 추정치를 왜곡하게 된다. 이와 함께 데이터의 수집, 보관, 분석과 관련된 비용의 증대를 초래하기도 한다. 또한 inter-purchase time은 참 data interval과 아무 관련이 없다. 이 주장은 사실 경제 통계학에서 잘 알려진 이론으로, 종속변수의 측정오차는 모수 추정에 어떤 왜곡을 일으키지 않고 독립변수의 측정오차가 왜곡을 유발한다는 사실이다.

Ⅲ. 분 석

가장 안전한 data interval을 결정하기 위해 우리는 먼저 temporal aggregation이 광고와 판매의 참 관계에 어떠한 영향을 미치는 가를 정밀하게 모형화할 필요가 있다. 우리의 분석은 여러 단계로 이루어져 있는데, 우리는 먼저 광고와 판매의 동태적 관계를 설명하는 매우 일반적인 linear distributed lag model을 가정한다. 둘째, 그와 같은 모형의 분석을 돕는 특별한 기법을 논하는데, 이는 distributed lag 계수들의 sequence와 광고와 판매의 covariance sequences를 변환하는 것과 관련된 부분이다. 셋째, 우리는 이 방법론을 이용하여 temporal aggregation이 판매와 광고의 참 관계에 미치는 효과를 분석한다.

1. The Distributed Lag Model

우리는 먼저 판매 $\{s_t\}$와 광고 $\{a_t\}$는 zero-mean covariance-stationary stochastic process를 따르며, deterministic components는(예: means, trends, seasonals) 이미 제거가 되었다고 가정한다. 또한 판매와 광고는 다음에서 주어진 식의 관계를 가진다고 가정하는데 이는 매우 일반화된 관계이다.

(1) $s_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j a_{t-j} + \epsilon_t \qquad E\epsilon_t = E\epsilon_t a_{t-j} = \quad 0 \quad \text{for} \quad all \quad t, j$

위 식에서 t = 0, 1, ...는 true time interval을 나타낸다. 그러므로 $\beta_j = \partial s_t / \partial a_{t-j}$는 시점 $t-j$에서 광고액을 한 단위 증가하는데 따른 시점 t의 판매액의 한계증가 효과를 나타낸다. 식 (1)에서 제시한 우리의 광고-판매 모형은 Koyck 모형을 중심으로 한 기존의 연구

와는 다르게 다양한 광고 효과를 설명할 수 있는 매우 일반적인 모형이다. β_j 광고의 현재 판매 효과를 측정하므로 우리는 $j < 0$ 인 경우는 $\beta_j = 0$이라 가정한다. 즉, β_0는 광고의 현재효과(current effect), $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$는 광고의 미래효과(carryover effect), 그리고 $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$는 광고의 누적효과(cumulative effect)를 측정한다. 또한 광고효과의 쇠퇴함수(decay function)는 j의 함수로 squence $\{\beta_j\}$로 표현할 수 있다.

2. 쇠퇴함수(Decay Function)의 변환

위의 식에서 주어진 판매와 광고의 동태적 관계는 데이터를(시간상에서) 통합(aggregate)하면서 매우 복잡하게 변하게 된다. 통합된 데이터의 분석을 용이하게 하기 위기 위해 우리는 두 종류의 변환을(z-transform과 Fourier-transform) 이용하고자 한다. 이 두 변환의 차이를 한마디로 표현하면 z-transform은 distributed lag sequence를 infinite series로 변환하는 반면, Fourier-transform은 distributed lag sequence를 trigonometric function으로 변환한다. 이를 보다 자세히 표현하면, sequence $\{\beta_j\}$의 z-transform은 다음의 식으로 주어지는데 여기서 z는 복소수(complex number)를 나타낸다.

$$\beta(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j z^j$$

위 식에서 $z = e^{-iw}$ for $w \in [-\pi, \pi]$를 취하면 우리는 $\{\beta_j\}$의 Fourier-transform, 즉 $\beta(e^{-iw})$를 얻을 수 있다. 반면 $\{\beta_j\}$의 sequence는 함수 $\beta(z)$와 $\beta(e^{-iw})$로부터 도출할 수 있다 (Fishman 1969; Jenkins and Watts 1968; Koopmans 1974). 즉, inverse z-transform에 의해

$$\beta_j = (2\pi i)^{-1} \oint z^{-j-1} \beta(z) dz$$

위 식에서 $\oint$은 contour integration about the unit circle을 나타낸다. 또는 inverse Fourier-transform에 의해

$$\beta j = (2\pi i)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwj} \beta(e^{-iw}) du$$

3. Covariance Generating Function과 Spectra

위의 변환을 판매-광고의 상관계수에 적용하기 위해 우리는 a_{t-k}를 식 (1)의 양쪽 항에 곱하고 이의 기대치를 취하기로 한다. 가정에 의해 모든 t와 k에 대하여 $E\varepsilon_t a_{t-K}=0$이기 때문에

$$Es_t a_{t-k} = \sum j\beta j E a_{t-j} a_{t-k} \quad K=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

판매와 광고의 상관계수 함수를 $R_{sa}(k) \equiv Es_t\, a_{t-k}$와 $R_{aa}(k-j) \equiv Ea_{t-j}\, a_{t-k}$로 정의하면

$$(2) \quad R_{sa}(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j R_{aa}(k-j) \qquad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

식 (2)의 오른쪽 항은 sequence $\{R_{aa}(k)\}$에 대한 sequence $\{\beta_j\}$의 convolution이라 부른다. 그러므로 판매와 광고의 lagged cross-correlation인 sequence $\{R_{sa}(k)\}$는 쇠퇴함수(decay function)와 광고의 autocorrelation의 convolution이 되는 것이다. 식 (2)의 양쪽 항의 z-transform을 취하면

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{sa}(k) z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\sum_j \beta_j R_{aa}(k-j)] z^k = \sum_j \beta_j z^j \sum_q R_{aa}(q) z^q \quad where\, q = k-j$$

우리는 여기서 moment generating functions과 유사한 개념인 covariance generating function을 정의하기로 한다. $g_{sa}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{sa}(k) z^k$와 $g_{aa}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{aa}(k) z^k$ 의 두 covariance generating functions을 정의하면 우리는 다음의 식을 도출할 수 있다.

$$(3a) \quad g_{sa}(z) = \beta(z)\, g_{aa}(z)$$

위 covariance generating functions에서 Z^K의 계수는 lag-k covariance를 나타낸다. 또한 covariance를 z-transforming하는 대신에 Fourier-transforming함으로써 우리는 spectra와 cross-spectra를 도출할 수 있는데 이는 대단히 유용한 개념이다. 즉, $g_{aa}(e^{-iw})$는 광고의 spectrum이고 $g_{ss}(e^{-iw})$는 판매의 spectrum이며 $g_{sa}(e^{-iw})$는 판매와 광고의 cross-spectrum이다. 우리가 일반적으로 알고 있는 spectrum의 개념과 시계열 데이터의 분석에서의 spectrum의 개념은 별반 차이가 없다. 즉, 하얀 광선이 여러 파장의 다

양한 광선의 혼합으로 이루어 진 것 같이. 우리는 time series가 여러 빈도를 가지고 서로 상관관계가 없는 sine 곡선들로 구성이 되어 있다고 생각할 수 있다. 빈도(frequency) w* 에서의 spectrum은-즉 $g_{aa}(e^{-iw*})$-angular frequency w*를 가진 sine curve가 time series의 분산(variance)에 기여한 정도를 나타내는 것이다.

판매와 광고의 cross-spectrum $g_{sa}(e^{-iw})$와 광고의 spectrum $g_{aa}(e^{-iw})$으로 식 (3a)를 표현하면

(3b) $g_{sa}(e^{-iw}) = \beta(e^{-iw})g_{aa}(e^{-iw})$

Spectra의 유용성은 식 (2)와 (3b)를 비교하면서 명백히 드러나는데, 식 (2)에서 주어진 sequence의 convolution을 Fourier transform한 것은 식 (3)의 sequence의 Fourier transform들의 곱과 동일하게 된다는 점이다. 주어진 광고와 판매 데이터로부터 우리는 $g_{sa}(\cdot)$와 $g_{aa}(\cdot)$를 추정한 후, $g_{sa}(e^{-iw})$와 $g_{aa}(e^{-iw})$의 추정치의 비율을 inverse Fourier-tranforming함으로써 $\{\beta_j\}$를 추정한다. 이렇게 도출된 추정치를 Hannan's (1970) Inefficient estimates이라 하는데 이 추정치는 asymptotically 식 (1)의 least squares estimates과 동일하다.

4. Time Aggregation

본 논문의 주된 목표는 데이터 수집의 (시간적인) 간격 또는 data interval이 $\{\beta_j\}$의 추정치에 어떻게 영향을 미치는가를 평가하는 것이다. 먼저 aggregation interval이 n periods라고 가정하고, n periods 별로 통합(aggregate)된 판매와 광고 series를 $\{s_{nt}\}$, $\{a_{nt}\}$라 하면 이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

(4a) $\bar{s}_{nt} = \sum_{j=0}^{n-1} s_{nt-j} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(4b) $\bar{a}_{nt} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{nt-j} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

위의 식 (4a)와 (4b)의 데이터는 사실 매 n periods 마다 다음 식에서 주어진 moving aggregates 으로부터 무작위로 추출된 표본이다.

(5a) $\tilde{s}_{nt} = \sum_{j=0}^{n-1} s_{nt-j} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(5b) $\tilde{a}_{nt} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{nt-j} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

예를 들어 만약 우리가 일별 데이터와 주별로 (일요일부터 토요일까지) 통합 (aggregate) 된 데이터를 가지고 있다고 하면 이 주별로 통합된 데이터는 월요일-일요일, 화요일-월요일, 등등의 moving aggregate series로부터 추출된 표본이라는 것이다.

식 (4)에서 주어진 aggregates과 식 (5)에서 주어진 moving aggregates의 관계는 다음의 식으로 표현할 수 있다.

(6a) $\tilde{s}_{nt} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\beta}_j \tilde{a}_{n(t-j)} + \tilde{\varepsilon}_{nt} \qquad nt = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(6b) $\bar{s}_{nt} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_j \bar{a}_{n(t-j)} + \bar{\varepsilon}_{nt} \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

위의 식에서 모든 nt와 nj에 대하여 $E\tilde{\varepsilon}_{nt} = E\tilde{\varepsilon}_{nt}\tilde{a}_{n(t-j)} = 0$이고 $E\bar{\varepsilon}_{nt} = E\bar{\varepsilon}_{nt}\bar{a}_{n(t-j)} = 0$ 이다. 우리는 주어진 데이터를 이용하여 식 (6b)를 추정할 수 있는데 우리의 목표는 $\{\beta_{nj}\}$ 가 진정한 모수인 $\{\beta_j\}$와 어떠한 관계에 있는가를 보이는 것이다. 데이터 통합(aggregation)의 효과를 이해하기 위해 우리는 먼저 $\{\beta_{nj}\}$와 $\{\beta_j\}$의 관계를 도출하고자 한다.

5. True Decay Function과 Moving Average Decay Function

$$R_{\tilde{a}\tilde{a}}(\tau) = E\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{nt-j} \sum_{k=0}^{n-1} a_{nt-k-\tau}\right) \qquad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} Ea_{nt-j} a_{nt-k-\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} R_{aa}(k + \tau - j)$$

유사한 방법에 의하여. $R_{\tilde{s}\tilde{a}}(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} R_{sa}(k+\tau-j)$. 그러므로

$$g_{\tilde{a}\tilde{a}}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\tilde{a}\tilde{a}}(\tau) z^{\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z^{\tau+k-j} z^{-k} z^{j} R_{aa}(k+\tau-j)$$

Summation안의 변수를 $q = k + \tau - j \; [q \in (-\infty, \infty); dq/d\tau = 1]$ 로 변수 변환하면

$$g_{\tilde{a}\tilde{a}}(z) = \sum_q \sum_j \sum_k z^{-k} z^{j} z^{j} R_{aa}(q)$$

$$= g_{aa}(z) \sum_{j=0}^{n-1} z^{j} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} = g_{aa}(z) \left(\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}\right)$$

유사한 방법으로 $g_{\tilde{s}\tilde{a}}(z) = g_{sa}(z)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}\right)$. 그러므로 식 (6a)와 함께 식 (3a)를 도출한 과정을 이용하면

$$\tilde{\beta}(z) = g_{\tilde{s}\tilde{a}}(z) / g_{\tilde{a}\tilde{a}}(z) = g_{sa}(z)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}\right) \Big/ g_{aa}(z)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right)\left(\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}\right) = \beta(z)$$

이 결과로부터 우리는 다음의 lemma를 제시한다.

LEMMA 1: 만약 moving aggregate 데이터 $\tilde{s}_t$와 $\tilde{a}_t$가 존재한다면 이 moving aggregate 데이터에 판매-광고의 전형적인 회귀분석법만을 적용함으로써 식 (1)의 micro lag structure의 도출이 가능하다.

그러므로 시간적 aggregation 자체는 식 (1)에 관한 통계적 추론을 왜곡하지는 않는다. 그러나 moving aggregates $\{\tilde{s}_t\}$와 $\{\tilde{a}_t\}$는 원래의 데이터 $\{s_t\}$와 $\{a_t\}$의 수를 줄이지는 않는다. 반면 moving aggregates $\{\tilde{s}_t\}$와 $\{\tilde{a}_t\}$로부터 n periods마다 데이터를 추출하는 것은 데이터의 수를 감소시킨다. 즉, 데이터 통합은 두 가지 과정을 포함하는데 그 첫째가 원래 데이터를 moving aggregates로 통합하는 과정이고 둘째가 규칙적인 간격으로 moving aggregates로부터 추출하는 과정이다. 식 (1)과 관련된 통계적 추론이 데이터의 추출(sampling)에 의해 어떻게 영향을 받는가를 알기 위해, $\{\tilde{s}_{nt}\}$와 $\{\tilde{a}_{nt}\}$의 (nt = 0, ±1, ±2, ...) 데이터 대신에 $\{\bar{s}_{nt}\}$와 $\{\bar{s}_{nt}\}$의 (t = 0, ±1, ±2, ...) 데이터만을 가지고 있다고 가정한다.

6. True Decay Function과 Aggregate Decay Function

$\bar{\beta}(z)$와 $\beta(z)$의 관계를 규명하기 위해서 우리는 먼저 $g_{\bar{s}\bar{a}}(z)$와 $g_{\tilde{a}\tilde{a}}(z)$의 관계를 알아야 한다. 우선 $R_{\bar{a}\bar{a}}(n\tau) = R_{\tilde{a}\tilde{a}}(n\tau)$ for τ = 0, ±1, ±2,…이다. 즉, sequence $R_{\bar{a}\bar{a}}$의 잇따른 값은 sequence 에서 매 n번째 값에 해당한다는 것이다. 예를 들어 만약 τ가 일별로 측정되고 n = 7이라면, $R_{\bar{a}\bar{a}}$는 토요일로 끝나는 주들간 광고의 covariance항을 포함하고 되고 $R_{\tilde{a}\tilde{a}}$ 이들 covariance외에도 다른 두 기간 사이 광고의 covariance항도 포함하게 된다.

논문 말미의 부록에서 우리는 folding formula를 이용하여 다음의 식을 도출하였다.

$$g_{\bar{a}\bar{a}}(e^{-iw}) = F_n[g_{\tilde{a}\tilde{a}}(e^{-iw})] = \sum_{j=0}^{n-1} g_{\tilde{a}\tilde{a}}(e^{-i[w+2\pi j/n]})$$

우리는 이제 본 논문에서 가장 중요한 첫번째 proposition을 아래에서 제안한다.

PROPOSITION 1: 통합데이터(aggregate data)와 관련된 쇠퇴함수(decay function)은 첫째 true micro 쇠퇴함수, 둘째 광고의 serial correlation 속성, 셋째 data interval에 의해 결정된다.

$$\text{(7a)} \qquad \overline{\beta}(z) = \frac{F_n\left[\left|\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right|^2 g_{sa}(z)\right]}{F_n\left[\left|\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right|^2 g_{aa}(z)\right]} = \frac{F_n\left[\left|\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right|^2 \beta(z) g_{aa}(z)\right]}{F_n\left[\left|\frac{1-z^{-n}}{1-z}\right|^2 g_{aa}(z)\right]}$$

또는 $z = e^{-iw}$를 이용하여

$$\text{(7b)} \qquad \overline{\beta}(e^{-iw}) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(nw+2\pi j)}{\sin^2(w+2\pi j/n)} \beta(e^{-i[w+2\pi j/n]}) g_{aa}(e^{-i[w+2\pi j/n]})}{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2(nw+2\pi j)}{\sin^2(w+2\pi j/n)} g_{aa}(e^{-i[w+2\pi j/n]})}$$

Proof: 식 (6b)를 이용하면 $\overline{\beta}(z) = g_{\overline{sa}}(z)/g_{\overline{aa}}(z) = F_n[g_{\widetilde{sa}}(z)]/F_n[g_{\widetilde{aa}}(z)]$. 위에서 도출한 식, folding formula, 그리고 $|1-e^{-iwn}|^2 = \sin^2 nw$를 이용하면 우리는 (7a)와 (7b)를 도출할 수 있다.

식 (7b)는 Sims (1971)가 도출한 formula (10a)의 discrete version으로 볼 수 있다. 이 식은 추정 또는 관측된 값 $\beta(e^{-iw})$는 참값 $\beta(e^{-i\eta})$의 $(\eta = w + 2\pi j/n, j = 0, \cdots, n-1)$ 매우 복잡한 가중 평균이고 여기서 가중치는 sampling interval과 광고 process의 spectrum에 의해 결정된다는 것을 보여 주고 있다. 우리의 분석에서는 data interval이 주 관심사이고 식 (7b)에서는 판매의 spectrum은 존재하지 않으므로 우리가 관심을 가져야 하는 것은 광고의 data interval이다.

PROPOSITION 2: Data interval은 광고의 측정에 영향을 미치는 경우에만 추정된 광고의 효과에 영향을 준다.

예를 들어 일간 판매 데이터는 가지고 있지만 광고 데이터는 주간 데이터만 가지고 있다면 아무런 손실 없이 판매 데이터를 주간으로 통합할 수 있다. 반면 일간 광고 데이터는 가지고 있지만 판매 데이터는 주간으로만 가지고 있다면 광고 데이터를 주간으로 통합하여 식 (6b)만를 추정할 수 있고 이 때는 정보의 손실이 존재하게 된다.

PROPOSITION 3: Data interval, 추정된 decay, 그리고 duration interval은 구매주기 (interpurchase time)와는 독립적이다.

Proof: 식 (7a)와 (7b)로부터 우리는 decay function과 여기에 적절한 data interval은 광고와 판매의 autocorrelation에 의해서만 결정된다는 것을 알 수 있다. 만약 구매주기가 모든 소비자에 있어 균일하게 분포되어 있지만 않다면 판매의 주기성(periodicity)이 발생하고, 판매의 주기성은 식 (1)의 오차항인 ε_t에만 영향을 미치게 되고 그 결과 (추정의 efficiency 측면을 제외하고는) decay와 duration의 추정값에는 영향을 미치지 않는다.

경제 통계학의 모형에서와 마찬가지로 독립변수의 측정오차(measurement error)는 계수 추정치를 왜곡(bias)시키는 반면 종속변수의 측정오차는 계수 추정치를 왜곡시키는 않는다.

마케팅에서는 Clarke(1976)가 최초로 data interval이 aggregate data로부터 추정된 모수에 미치는 영향에 대한 연구 논문을 발표하였다. 그 이후 마케팅 연구자들은 Koyck process를 가정하고 참 모수값을 도출하는 여러 방법론을 제시하고자 노력하였다. 예를 들어 Rao(1986)는 discrete time data로부터 continuous-time Koyck process의 모수를 도출하는 방법론을 개발하였다. 보다 최근에 들어 Russell(1988)은 (Koyck process의 경우) 광고 process 자체가 aggregate data로부터 참 모수값을 도출하는데 중요한 역할을 한다는 점을 지적하였다. 우리의 결과는 이전 연구 결과를 (Koyck process에서 모든 선형 decay function으로) 일반화하고 있다. 또한 우리는 참 decay process가 참 모수값을 도출하는데 영향을 미치는 세 번째의 요소가 된다는 점을 보이고 있다. 우리는 식 (7b)로부터 위의 세 가지 요소가 서로 상호작용을 하기 때문에 매우 제한된 가정을 하거나 process에 대한 사전 지식이 있는 경우를 제외하고는 aggregate data로부터 참 모수를 추정한다는 것은 의미가 없다는 점을 알 수 있다.

Aggregate 모수와 참 계수, 광고 process, 그리고 data interval의 관계는 매우 총괄적이다. 식 (7b)에 inverse Fourier transform을 적용함으로써 우리는 다음의 식을 도출할 수 있다.

$$\overline{\beta}_{nr} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \eta_l \beta_{nr-l}$$

즉, $\bar{\beta}_{nr}$은 일반적으로 dacay parameters의 참값의 (moving) average이다. 그러나 식

(7b)는 식 (1)에서 주어진 어떤 특정 $\{\beta_j\}$ sequence가 어떻게 관측 가능한 $\{\bar{\beta}_{nj}\}$ sequence로 설명될 수 있는가에 대한 실마리를 제공하고 있다. 아래에서 도출한 lemma 2와 3에 이를 요약하고 있는데, 우리의 설명을 돕기 위해 식 (1)에서 주어진 (광고와 판매의) 참 관계는 일별(daily)이고, data interval은 주별, aggregate data는 주별(weekly) 이라고 가정한다.

LEMMA 2: 만약 광고가 매 q (단, q는 정수) 주에 한번 나가고 aggregate decay function은 참 decay function의 가중합(weighted sum)이라면(예: for all $\tau, R_{aa}(qn\tau-1)=R_{aa}(qn\tau-2)=\cdots=R_{aa}(an\tau-an+1)$)

$$\bar{\beta}_{nr}=\sum_{l=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|l|}{n}\right)\beta_{nr-l}$$

Proof: 식 (7b)를 다시 쓰면

$$\text{(7b)}\quad \bar{\beta}(e^{-iw})=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}v(w,j)\beta(e^{-i[w+2\pi j/n]})g_{aa}(e^{-i[w+2\pi j/n]})}{\sum_{j=0}^{n-1}v(w,j)g_{aa}(e^{-i[w+2\pi j/n]})}$$

where $v(w,j)=\sum_{m=0}^{n-1}e^{-i[w+2\pi j/n]m}\sum_{p=0}^{n-1}e^{+i[w+2\pi j/n]p}$. 광고의 spectrum을 단순화하기 위해 광고에 관한 가정을 사용하면 $e^{-i2\pi jk}=1$이므로 다음의 식을 도출할 수 있다.

$$g_{aa}(e^{-i[w+2\pi j/n]})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-i[w+2\pi j/n]k}R_{aa}(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-i[w+2\pi j/n]qnk}R_{aa}(qnk)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-iwqnk}R_{aa}(qnk)=g_{aa}(e^{-iw})$$

그러므로

$$\bar{\beta}(e^{-iw})=\sum_{j=0}^{n-1}v(w,j)\beta(e^{-i[w+2\pi j/n]})\Big/\sum_{j=0}^{n-1}v(w,j)$$

우리는 여기서 $\sum_{j=0}^{n-1}v(w,j)=n^2$가 됨을 오랜 계산과정을 거쳐 보일 수 있다. 그러므로

$$\overline{\beta}(e^{iw}) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} v(w,j)\beta(e^{-i[w+2\pi j/n]}) \ .$$

또한, inversion formula에 의해

$$\overline{\beta}_{nr} = \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwnr}\sum_{j=0}^{n-1} v(w,j)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k e^{-i[w+2\pi j/n]k}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwk}e^{iwnr}\sum_{j=0}^{n-1} v(w,j)e^{-i2\pi jk/n}dw$$

뒤쪽의 summation을 다시 정리하면

$$\sum_{j=0}^{n-1} v(w,j)e^{-i2\pi jk/n} = \sum_{j}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} e^{-i[w+2\pi jk/n]m}e^{i[w+2\pi jk/n]p}e^{-i2\pi jk/n}$$

$$= \sum_{m}\sum_{p} e^{-iw(m-p)}\sum_{j} e^{-i2\pi j(k+m-p)/n} = \sum_{m}\sum_{p} e^{-iw(m-p)}\left[\frac{1-e^{-i2\pi j(k+m-p)}}{1-e^{-i2\pi j(k+m-p)/n}}\right]$$

대괄호안의 값은 $(k+m-p)/n$이 정수이면 n이 되고 정수가 아니면 0이 된다. 그러므로 정수 $q=(k+m-p)/n$이라 하고 q에 대하여 합하면

$$\overline{\beta}_{nr} = \frac{1}{2\pi n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{m}\sum_{p}\beta_{nq-m+p}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwnq}e^{iwnr}dw$$

위 식에서 적분값은 $[-\pi,\pi]$상에서 orthogonal function들의 곱으로 이루어져 있고, 이 값은 $q=r$이면 2π이고 아니면 0이 된다. 그러므로

$$\overline{\beta}_{nr} = \frac{1}{n}\sum_{m}\sum_{p}\beta_{nr-m+p} = \sum_{l=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|l|}{n}\right)\beta_{nr-l}$$

Lemma 2를 다르게 표현하면, time $nt-nr$에서 aggregate 광고의 단위 증가가 time nt의 판매에 미치는 효과는 $-n+1+nt-nr, -n+2+nt-nr, \cdots, n-1+nt-nr$의 각 time period에서 단위광고의 증가가 (예를 들면, $nt-nr$ 주위의 $2n-1$ micro periods) time nt의 판매에 미치는 한계효과의 가중합(weighted sum)이라는 것이다.

LEMMA 3: 만약 광고가 serially uncorrelated하면 aggregate decay function은

true decay function의 가중합(weighted sum)이다. 즉, $R_{aa}(\tau)$ for $\tau \neq 0$ 이라면,

$$\overline{\beta}_{nr} = \sum_{l=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) \beta_{nr-l}$$

Proof: 광고가 serially uncorrelated하기 때문에 $g_{aa}(e^{-iw}) = g_{aa}(e^{-iu})$ *for all w and u*. 그러므로 spectrum과 관련된 값들이 식 (7b)로부터 빠져 나오게 되어 lemma 2의 경우와 같이 위의 식을 증명할 수 있다.

그러나 위의 특별한 케이스를 제외하고는 aggregate data로부터 true decay function을 도출하는 것은 일반적으로 불가능하다. 그러므로 식 (7b)에서 특정 숫자를 대입한 몇 가지 예를 볼 필요가 있다. Inter-exposure time이 3이라 가정하고 우리는 다음의 광고 process를 고려하기로 한다.

$$\begin{aligned} \mathrm{corr}(a_t, a_{t-k}) &= (k-1)A^k \quad && \text{if } k/3 = \text{정수} \\ &= 0 && \text{if } k/3 \neq \text{정수} \end{aligned}$$

우리는 serial correlation 오수 A에 대하여 다섯가지 케이스를 고려하기로 하는데, A=0는 serially uncorrelated 케이스이고, A = 0.5와 A = 0.99는 양의 autocorrelation이 점점 증가하는 경우이며, A = 0.5와 A = -0.99는 highly correlated oscillatory한 경우를 포함한다. 각 광고 process에 대하여 우리는 4종류의 (2, 3, 4, 8) aggregation interval과 세 종류의 (hump-shape, Koyck, linear decay) decay function을 고려한다.

위에서 시행한 시뮬레이션의 결과를 요약하기로 한다. 첫째, lemma 2와 3에서 예측하듯이 aggregate decay function은 일반적으로 true decay function을 low lag에서 underestimate 하였다. 그 이유는 식 (8)로부터 명백한데, nr 〉 0이면 aggregate decay function은 $\beta_{nr-n+1}, \beta_{nr-n+2}, \cdots, \beta_{nr-1}, \beta_{nr}, \beta_{nr+1}, \cdots, \beta_{nr+n-1}$ 의 가중합이고, nr = 0이면 aggregate decay function은 true decay function의 반 만큼의 수의 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 가중합이 된다. 둘째의 결과는 첫째의 결과와 연관이 되어 있는 것으로, Koyck model은 대부분의 중요한 반응이 low lag에서 발생하므로 그 추정이 매우 어려웠다는 것이다.

셋째, 광고 process의 serial correlation은 분명히 aggregate decay function에 영향을 미치었지만, 위의 시뮬레이션의 경우 serial correlation의 효과는 aggregation의 효과보다 적었다.

마지막으로, aggregate interval이 inter-exposure time과 같은 경우의 aggregate decay function이 참 decay function의 근사값을 가장 잘 추정하였다. 흥미로운 점은 data interval이 2인 매우 작은 경우에도 왜곡이 있었는데 이는 2가 inter-exposure time의 integer divisor가 아니기 때문이다 (lemma 2를 상기하라). 그리고, 보다 큰 data interval은 보다 큰 왜곡을 초래하였다. 이 결과가 우리 논문의 가장 중요한 포인트를 지적하고 있는데 이는 "data interval은 inter-exposure time과 같아야 한다"는 주장이다.

일반적으로 decay function과 duration interval은 수학적으로 계산이 불가능하지만 총누적효과는 가능하다.

LEMMA 4: Aggregate 누적효과는 참 누적효과와 같다. 즉, $\bar{\beta}(1)=\beta(1)$ 또는

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{\beta}_{nk} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j$$

Proof: $w = 0$와 $j \neq 0$에 대하여 $\sin(n+2\pi j)=0$. 그러므로 식 (7b)로부터 $\beta(1)=\beta(1)g_{aa}(1)/g_{aa}(1)$

Lemma 4는 우리에게 무엇이 추정되어야 하는가에 대하여 말하고 있지만, 불행히도 다음에서 볼 수 있듯이 $\beta(1)$의 좋은 추정치를 얻는 것은 쉬운 일이 아니다.

7. Specification Error와 추정

식 (7b)는 aggregate distributed lag가 매우 복잡하다는 것을 보여 주고 있다. 실질적으로 aggregate regression은 잘 못 설정될 가능성이 높다. 예를 들어 aggregate data는 식 (6)에서와 같은 관계를 가지고 있는데 반해, 연구자는 다음의 (최소 자승법에 의한) 회귀분석을 적용한다.

$$(9) \qquad \bar{s}_{nt} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\overline{\beta'}_{nj}\,\bar{a}_{n(t-j)} + \overline{\varepsilon'}_{nt}$$

위 식에서 $\{\overline{\beta}_{nj}\}$는 distributed lag 계수의 sequence인데 이들은 $\overline{\beta'}_{nj} \neq \overline{\beta}_{nj}$ 라는 조건을 충족하도록 하였다. 예를 들면, $\overline{\beta}$가 truncated되지 않았으면 $\overline{\beta'}$는 truncate되고, $\overline{\beta}$가 어떤 패턴을 따르지 않으면 $\overline{\beta'}$ 는 Koyck과 같은 어떤 특수한 패턴을 따르도록 한다는 것이

다. 다음의 lemma 5는 Sims(1972)에 의해 처음 증명되었는데 최소 자승 추정치가 이와 같이 잘못 설정된 모형에서 어떤 성질을 가지는가를 보여 주고 있다.

LEMMA 5: Distributed lag model의 경우, 최소 자승법은 모수 추정치의 Fourier transform이 진정한 distributed lag의 추정치에 근사하도록 하는 추정치를 찾는다. 즉, 만약 식 (6b)가 사실이고 식 (9)가 최소 자승법에 의해 추정되면, 그 추정치는 다음을 최소화한다.

$$(10) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{\beta}(e^{-iw}) - \overline{\beta'}(e^{-iw})|^2 \, g_{\overline{aa}}(e^{-iw}) \, dw$$

Proof: 식 (6b)를 식 (9)에 대입하여 정리하면

$$\overline{\varepsilon'}_{nt} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\overline{\beta}_{nj} - \overline{\beta'}_{nj}) \overline{a}_{n(t-j)} + \overline{\varepsilon}_{nt}$$

최소 자승법은 sum of squares를 최소화하는 또는 다음의 spectrum 아래의 면적을 최소화하는 추정치 $\overline{\beta'}$ 를 선택한다.

$$g_{\overline{\varepsilon'\varepsilon'}}(e^{-iw}) = |\overline{\beta}(e^{-iw}) - \overline{\beta'}(e^{-iw})|^2 \, g_{\overline{aa}}(e^{-iw}) + \mathrm{var}(\overline{\varepsilon}_{nt}) / 2\pi$$

$\{\overline{\varepsilon}_{nt}\}$는 $\{\overline{\beta'}_{nj}\}$에 의해 아무 영향을 받지 않으므로 적분을 하면 식 (10)을 도출할 수 있다.

식 (10)은 어떻게 누적효과 $\overline{\beta}(1)$의 좋은 추정치를 구할 수 있는가에 대한 식으로 현실적으로 매우 유용한 식이다. 이 효과는 point w = 0에서 함수 $\overline{\beta}(e^{-iw})$의 값이다. $\overline{\beta'}(e^{-iw})$는 $\overline{\beta}(e^{-iw})$ 를 $g_{\overline{aa}}(e^{-iw})$가 최대값을 가지는 빈도 w에서 가장 잘 추정한다. 만약 광고가 serially correlated 하지 않으면 $g_{\overline{aa}}(e^{-iw})$는 평평하고 어느 한 빈도가 다른 빈도보다 더 가중치를 지니지 못하게 된다. 반면 광고가 거의 random walk이라면 $g_{\overline{aa}}$는 거의 대부분의 power가 w = 0 근처에서 집중되고 $\overline{\beta'}(1)$는 $\overline{\beta}(1)$의 좋은 추정치가 되게 된다. 만약 우리가 누적효과에만 관심이 있다면 우리는 j ≠ 0에 대하여 $\overline{\beta'}_{nj} = 0$이라 간주할 수 있다.

즉, aggregate 판매를 current aggregate 광고에 회귀분석하면 된다. 만약 aggregate 광고가 serially correlated하면 이 회귀 분석식의 계수는 누적효과를 잘 추정할 것이다. 우리는 이 사항을 다음의 proposition 4에 요약한다.

PROPOSITION 4: 광고가 매우 serially correlated하면, aggregate광고에 aggregate 판매의 회귀 분석으로부터 좋은 누적효과 추정치를 얻을 수 있다.

Proof: 회귀 분석식을 쓰면

$$\bar{s}_{nt} = \overline{\beta'}_0 \bar{a}_{nt} + \bar{\varepsilon}_{nt}$$

Sequence $\{\overline{\beta'}_0, 0, 0, ...\}$ 의 Fourier tranform은 $\overline{\beta'}_0$이다. 식 (10)에서 $\overline{\beta'}(e^{-iw})$ 대신에 이 관계를 이용하면 우리는 함수 $\overline{\beta}(e^{-iw})$의 근사값을 상수 $\overline{\beta'}_0$ 로 구할 수 있다. 만약 광고가 serially correlated하면 w = 0 근처에서 $g_{\overline{aa}}(e^{-iw})$의 값이 크고 $\overline{\beta}(e^{-i0}) = \overline{\beta}(1)$크고 를 approximate하도록 $\overline{\beta'}_0$ 를 선택하게 된다.

광고가 serially correlated하다면, Proposition 4는 누적효과를 추정하는 일반적 관행이 정당한 방법임을 보이고 있다. 특히 control 시장과 광고를 보낸 시장의 aggregate 판매에 대해 ANOVA를 시행함으로써 우리는 위 proposition에서 설명한 회귀분석의 근사치를 구할 수 있다. 그러나 광고가 serially correlated하지 않고 dacay가 실험 기간 이상으로 연장되게 된다면, 위의 ANOVA는 왜곡된 추정치를 가지게 된다.

누적효과를 추정하는 다른 방법은 distributed lag model을 aggregate data로 추정하고 이 회귀식의 distributed lag 계수들의 합을 계산하는 것이다. Aggregate 관계에 대한 완전하게 믿을 만한 정보를 가지고 있는 경우- 즉, 우리가 모든 aggregate decay function에 대하여 좋은 추정치를 얻을 수 있을 정도로 알고 있는 경우- 이 방법은 괜찮은 방법이다. 그러나 주어진 식 (7b)에 대해 micro 관계에 대한 완전하게 믿을 만한 정보를 가지고 있어야 한다. 또한 이런 완전한 정보를 가지고 있다고 할지라도 aggregate 관계의 본질은 매우 결정하기가 어렵다. 이 사실은 특정한 예를 (Koyck model) 이용하여 쉽게 설명할 수 있다.

8. Koyck model: aggregation의 효과

광고에 대한 판매의 반응은 기하급수적으로(geometrically) 쇠퇴한다는 것은 일반적인 가정이다. 예를 들어 current effect가 α이고 decay가 λ인 ($|\lambda| < 1$) Koyck model ($\beta_j = \alpha\lambda^j \; for \; j \geq 0, \beta_j = 0 \; for \; j < 0.$)은 불행하게도 참 데이터가 위의 형태로 주어졌어도 aggregate 데이터는 일반적으로 위 형태를 따르지 않는다. 다음의 Proposition 5에 요약된 특별한 결과는 Rao(1986)에 의해 도출된 continuous time 결과를 discrete time에서 본 결과이다.

PROPOSITION 5: 일반적으로 판매와 광고가 Koyck distributed lag의 관계에 있다면, 판매와 광고의 aggregate 관계는 Koyck lag의 관계가 아니다. 즉, $\beta_j = \alpha\lambda^j$ for $j \geq 0, \beta_j = 0$ for $j < 0$이면 $\overline{\beta}_{nj}$는 $\overline{\alpha}\overline{\lambda}^{nj}$의 형태가 아니다.

Proof: $n = 2$이고 $g_{aa}(e^{-iw})$=상수라고 하자. 즉, 광고가 serially correlated하지 않은 경우이다. 그러면

$$\beta(e^{-iw}) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j e^{-iwj} = \alpha / (1 - \lambda e^{-iw})$$

식 (7b)로부터

$$\overline{\beta}(e^{-iw}) = \frac{\sum_{j=0}^{1} \frac{\sin(2w+2\pi j)}{\sin(w+2\pi j/2)} \{\alpha/(1-\lambda^{-[w+2\pi j/2]})\}}{\sum_{j=0}^{1} \frac{\sin(2w+2\pi j)}{\sin(w+2\pi j/2)}} = \alpha \left[\frac{1+\lambda e^{-iw}\cos 2w}{1-\lambda^2 e^{-i2w}} \right]$$

위 식은 $\overline{\alpha}/(1-\overline{\lambda}e^{-i2w})$ 또는 $\sum_{j=0}^{\infty} \overline{\alpha}\overline{\lambda}^{2j} e^{-i2w}$ 의 형태가 아니다. 그러므로 time aggregated된 데이터는 Koyck lag 분포 형태를 가지지 않는다.

이 proposition은 proposition 1-4와 함께 우리에게 중요한 결론을 주고 있다. 우리가 참 decay process를 모를 경우 우리는 aggregate 데이터로부터 이를 체계적으로 추정하기가 매우 어렵다는 것이다. 그 이유는 우리는 참 process에 대한 가정을 먼저 하여야 하고 그런 다음 aggregate 데이터에는 어떤 관계가 있는지에 대한 또 하나의 가정을 하여야 하기 때문이다.

부 록

우리는 이 부록에서 discrete folding 공식을 도출하고자 한다. 먼저 $\{x_t\}, t=0,\pm 1,\cdots$는 평균이 0인 covariance stationary stochastic process를 따르고, $\{y_{nt}\}$는 $n(n\neq 0)$ period마다 $\{x_t\}$로부터 추출한 값을 가진다고 하자. 그러므로,

$$R_y(n\tau)=Ey_Ty_{T-n\tau}=Ex_Tx_{T-n\tau}=R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iwn\tau}g_x(e^{-iw})dw$$

위 식에서 $g_x(e^{-iw})=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{-iwj}R_x(j)$는 x의 spectrum을 나타낸다.

Case I: n이 홀수인 경우

$$R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{-\pi+2j\pi/n}^{-\pi+2(j+1)\pi/n}e^{iwn\tau}g_x(e^{-iw})dw$$

변수 v를 $v=w+\pi-(2j+1)\pi/n$이라 정의하고 위 적분식의 변수를 변환하면,

$$R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}e^{i[v-\pi+(2j+1)\pi/n]n\tau}g_x(e^{-i[v-\pi+(2j+1)\pi/n]})dw$$

먼저 kernel을 보면, $2j+1-n$은 짝수이고 모든 k값에 대하여 $e^{i2kn}=1$이므로

$$e^{ivn\tau-in\pi\tau+i2j\pi\tau+i\pi\tau}=e^{ivn\tau+i(2j+1-n)n\tau}=e^{ivn\tau}$$

$$R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}e^{ivn\tau}\sum_{j=0}^{n-1}g_x(e^{-i[v-\pi+(2j+1)\pi/n]})dv$$

이제 summand를 보면, 그 spectrum이 2π-periodic하므로 $g_x(\cdot)$는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\sum_{j=\frac{n-1}{2}}^{n-1}g_x(e^{-i[v-\pi+(2j+1)\pi/n]})+\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}-1}g_x(e^{-i[v-\pi+(2j+1)\pi/n]})$$

위 식의 첫번째 summation은 빈도 $0,2\pi/n,\cdots,\pi-\pi/n$에서 spectrum을 축적하고, 두

번째 summation은 빈도 $0, \pi+\pi/n, \pi+3\pi/n, \cdots, 2\pi-\pi/n$에서 spectrum을 축적한다. 그러므로 빈도 $0.2\pi/n, \cdots$ 에서 하나의 summation을 행하면,

$$R_y(n\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{ivn\tau} \sum_{j=0}^{n-1} g_x(e^{-i[w+2\pi j/n]}) dw$$

$R_y(n\tau)$는 y의 spectrum의 inverse Fourier transform이므로

$$g_y(e^{-iw}) = \sum_{j=0}^{n-1} g_x(e^{-i[w+2\pi j/n]})$$

Case II: n이 짝수인 경우

이 경우는 interval $[-\pi, \pi]$을 세 개의 subinterval, $[-\pi, -(n-1)\pi/n]$, $[(n-1)\pi/n, \pi]$, $[-(n-1)\pi/n, (n-1)\pi/n]$ 로 나눈다. 그러면

$$R_y(n\tau) = (2\pi)^{-1} \{ \int_{-\pi}^{-(n-1)\pi/n} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw + \int_{\frac{n-1}{n}\pi}^{\pi} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw + \int_{-\frac{n-1}{n}\pi}^{\frac{n-1}{n}\pi} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw \}$$

세 번째 적분식은 다시 쓰면

$$\sum_{j=0}^{n-2} \int_{-\frac{n-1}{n}\pi+\frac{2j}{n}\pi}^{\frac{n-1}{n}\pi+\frac{2(j+1)}{n}\pi} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw$$

변수변환 $v = w + (n-1)\pi/n - 2\pi j/n - \pi/n$을 이용하여 위 식을 다시 쓰면,

$$R_y(n\tau) = (2\pi)^{-1} \{ \int_{-\pi}^{-(n-1)\pi/n} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw + \int_{\frac{n-1}{n}\pi}^{\pi} e^{iwn\tau} g_x(e^{-iw}) dw + \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{iwn\tau} \sum_{j=0}^{n-2} g_x(e^{-i[v-\pi+2(j+1)\pi/n]}) dv \}$$

그러므로

$$\sum_{j=0}^{n-2} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{i[v-(n-1)\pi/n+2\pi j/n+\pi/n]n\tau} g_x(e^{i[v-(n-1)\pi/n+2\pi j/n+\pi/n]}) dw$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{ivn\tau} g_x(e^{-i[v-\pi+2(j+1)\pi/n]}) dv$$

위 식에서 첫번째 적분식에서는 $s=w+\pi$의 변수변환, 두 번째 적분식에서는 $u=w-\pi$의 변수 변환을 하고 spectrum의 2π-periodicity의 성질을 이용하면

$$R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\{\int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{iwn\tau}[g_x(e^{-i[w-\pi]})+\sum_{j=0}^{n-2} g_x(e^{-i[w-\pi+2(j+1)\pi/n]})]dw\}$$

위 식의 summation은 빈도 $-\pi,-\pi+2\pi/n,\cdots,-2\pi/n,0,2\pi/n,\cdots,2\pi-2\pi/n$에서 spectrum을 축적하므로 n이 홀수인 경우와 마찬가지로 합을 재배치하고 spectrum의 2π-periodicity의 성질을 이용하면

$$R_y(n\tau)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{iwn\tau}\sum_{j=0}^{n-1} g_x(e^{-i[w+2j\pi/n]})dw$$

그러므로 n period마다 process $\{x_t\}$로부터 무작위 추출하여 얻은 process $\{y_t\}$의 spectrum을 도출하는 discrete folding formula는 다음의 식으로 주어진다.

$$g_y(e^{-iw})=F_n[g_x(e^{-iw})]=\sum_{j=0}^{n-1} g_x(e^{-i[w+2\pi j/n]})$$

위 식에서 x의 spectrum은 2π-periodic하고 domain $[-\pi,\pi]$에서 대칭이고, y의 spectrum은 $2\pi/n$-periodic하고 domain $[-\pi/n,\pi/n]$에서 대칭인 점에 유의하라.

참 고 문 헌

Assums, G., Farley, J. and Lehmann, D. (1984), "How Advertising Affects Sales: Meta-Analysis of Econometric Results", *Journal of Marketing Research*, 21, 1, 65-74.

Bass, F. and Clarke, D. (1972), "Testing Distributed Lag Models of Advertising Effect", *Journal of Marketing Research*, 9, 3, 298-308.

Bass, F. and Leone, R. (1983), "Temporal Aggregation, The Data Interval Bias, and Empirical Estimation of Bimonthly Relations from Annual Data", *Management Science*, 29, 1, 1-11.

Blattberg, R. and Jeuland, A. (1981), "A Micromodeling Approach to Investigate the Advertising-Sales Relationship", *Management Science*, 27, 9, 988-1005.

Clarke, D. (1976), "Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effect on Sales", *Journal of Marketing Research*, 13, 4, 345-357.

Clarke, D. (1982), "A Reply to Weinberg and Weiss", *Journal of Marketing Research*, 19, 4, 592-594.

Farley, J., D. Lehmann, R. Winer, and Katz, J. (1982), "Parameter Stability and "Carry-Over Effects" in a Consumer Decision-Process Model", *Journal of Consumer Research*, 8, 1, 465-471.

Fishman, G. (1969), *Spectral Methods in Econometrics*, Cambrige: Harvard University Press.

Griliches, Z. (1967), "Distributed Lags: A Survey", *Econometrica*, 35, 1, 16-49.

Hannan, E. (1970), *Multiple Time Series*, New York: Wiley.

Jenkins, G. and Watts, D. (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, San Francisco: Holden-Day.

Kanetkar, V., C. Weinberg, and Weiss, D. (1986a), "Recovering Micro Parameters From Aggregate Data for the Koyck and Brand Loyal Models", *Journal of Marketing Research*, 23, 3, 298-304.

Kanetkar, V., C. Weinberg, and Weiss, D. (1986b), "Estimating Parameters of the Autocorrelated Current Effects Model from Temporally Aggregated Data", *Journal of Marketing Research*, 23, 4, 379-386.

Koopmans, L. (1974), The Spectral Analysis of Time Series, New York: Academic Press.

McDonald, C. (1971), "What Is the Short-Term Effect of Advertising?" *Measuring the Effect of Advertising*, 463-487.

Rao, R. (1986), "Estimating Continuous Time Advertising-Sales Models", *Marketing Science*, 5, 2, 125-142.

Russell, G. (1988), "Recovering Measures of Advertising Carryover from Aggregate Data: The Role of the Firm's Decision Behavior", *Marketing Science*, 7, 3, 252-270.

Sims, C. (1971), "Discrete Approximation to Continuous Time Distributed Lags in Econometrics", *Econometrica*, 39, 5, 540-563.

Sims, C. (1972), "The Role of Approximate Prior Restrictions in Distributed Lag Estimation", *Journal of American Statistical Association*, 67, 1, 169-175.

Srinivasan, V. and Weir, H. (1988), "A Direct Aggregation Approach to Interfering Microparameters of the Koyck Advertising-Sales Relationship from Micro Data", *Journal of Marketing Research*, 25, 2, 145-156.

Tellis, G. (1988), "Advertising Exposure, Loyalty and Brand Purchase: A Two Stage Model of Choice", *Journal of Marketing Research*, 15, 2, 134-144.

Vanhonacker, W. (1983), "Carryover Effects and Temporal Aggregation in a Partial Adjustment Model Framework", *Marketing Science*, 2, 3, 297-317.

Weinberg, C. and Weiss, D. (1982), "On the Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effects on Sales", *Journal of Marketing Research*, 19, 4, 585-591.

Weiss, D., C. Weinberg and Windal, P. (1983), "The Effects of Serial Correlation and Data Aggregation on Advertising Measurement", *Journal of Marketing Research*, 20, 2, 268-279.