# 投入産出模型에서의 投入係數變化의 波及效果

鄭 基 俊

투입산출모형에서 투입계수행렬이 분해불능성을 포함하는 표준적 조건하에서 투입계수 중의 하나가 증가하면, 레온티에프역행렬의 모든 원소가 증가한다는 것은 이미 알려지 있다. 그러나 이러한 일이 어떤 경로를 거쳐서 일어나는 것인지, 그리고 그 증분의 크기는 어떠한 것인지에 관해서는 알려진 바가 없다. 본고에서는 이 두 가지 점을 밝히고자 한다.

## 1. 問題의 提起

표준적인 $n$部門 투입산출모형에서 $n \times n$ 투입계수행렬 $A$의 원소 $a_{ij}$는 불변인 것으로 간주된다. 그러나 투입산출모형에서 투입계수의 변화는 일종의 파라미터의 변화로서 비교정태분석의 대상이 될 수 있다. 이 문제와 관련해서 다음과 같은 定理가 알려져 있다.

Let $A$ be an indecomposable nonnegative square matrix satisfying Solow condition. If an element of $A$ increases without violating the Solow condition, then all elements of $[I-A]^{-1}$ will increase〔Theorem 13 in Murata(1977, p. 118)〕.

이 정리는 다음과 같이 증명된다.

행렬 $B$를 적어도 하나의 원소는 대응하는 $A$의 원소보다 크고 나머지는 모두 같은 행렬이라고 하자. 즉 $B-A \geq 0$라고 하자. 그리고 솔로우조건 하에서 두 행렬 $[I-A]^{-1}$와 $[I-B]^{-1}$의 모든 원소는 양이다. 즉 $[I-A]^{-1}>0$, $[I-B]^{-1}>0$이다〔Takayama (1985, Chapter 4) 참조〕. 증명해야할 것은 $[I-B]^{-1}-[I-A]^{-1}>0$가 된다는 것이다. 그런데 항등관계,

$$[I-B]^{-1}[I-B]=[I-A]^{-1}[I-A] \tag{1.1}$$

를 전개하여 정리하면 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}[I-B]^{-1}-[I-A]^{-1}&=[I-B]^{-1}B-[I-A]^{-1}A \\ &=[I-B]^{-1}(B-A)+\{[I-B]^{-1}-[I-A]^{-1}\}A\end{aligned} \tag{1.2}$$

그리고 이 식의 마지막항을 이항하고 정리하면 다음 결과를 얻는다.

(1.3) $[I-B]^{-1}-[I-A]^{-1}=[I-B]^{-1}(B-A)[I-A]^{-1}>0$

그리고 여기서 이것이 陽行列이 되는 이유는 $[I-B]^{-1}>0$, $B-A\geq 0$이기 때문에 $[I-B]^{-1}$ $(B-A)$의 列중 적어도 한 列의 원소는 모두 陽이기 때문이다.

이로써 위의 정리의 形式的 證明은 끝났다. 그러나 본고에서는 한걸음 더 나아가, $[I-A]^{-1}=C$의 원소 $c_{hk}$가 $A$의 원소 $a_{ij}$의 변화에 어떤 경로로 얼마만큼의 영향을 받는가를 고찰하려 한다.

## 2. 逆行列의 微分에 관한 有用한 結果

일반적으로 행렬 $A$의 원소 $a_{ij}$가 스칼라 변수 $x$의 함수라 하자. 즉 $a_{ij}=a_{ij}(x)$. 그러면 다음 식이 성립한다[Theil(1971, p.33) 참조].

(2.1) $$\partial A^{-1}/\partial x=-A^{-1}[\partial A/\partial x]A^{-1}.$$

이 관계식은, 恒等式 $AA^{-1}=I$의 兩邊을 $x$에 관하여 微分하여

(2.2) $$A[\partial A^{-1}/\partial x]+[\partial A/\partial x]A^{-1}=0$$

을 얻고, 이의 앞에 $A^{-1}$를 곱한 다음 移項하여 얻어진다.

이 관계식에서 특히 $x=a_{ij}$이고 $A$의 원소들 사이에 아무런 관련이 없다면

(2.3) $$[\partial A/\partial x]=[\partial A/\partial a_{ij}]=i_i i_j'$$

이 된다. 단 $i_i$는 單位行列 $I$의 $i$번째 列이고, $i_j'$는 $I$의 $j$번째 行이다. 따라서 $i_i i_j'$는 $(i, j)$번째 원소만 1이고 나머지 원소는 모두 0인 正方行列이다. 따라서 이 경우 위의 식 (2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

(2.4) $$\partial A^{-1}/\partial a_{ij}=-A^{-1}[i_i i_j']A^{-1}=-[A^{-1}i_i][i_j'A^{-1}].$$

여기서 $[A^{-1}i_i]$는 $A^{-1}$의 $i$번째 열이 되며 $[i_j'A^{-1}]$는 $A^{-1}$의 $j$번째 행이 된다.

특히 우리의 관심대상인 $C=[I-A]^{-1}$의 $a_{ij}$에 관한 導函數를 보면

(2.5) $$\partial C/\partial a_{ij}=-C[\partial(I-A)/\partial a_{ij}]C=C[i_i i_j']C=c_{\cdot i}c_{j\cdot}.$$

로 된다. 단, $c_{\cdot i}$는 $C$의 $i$번째 열이며, $c_{j\cdot}$는 $C$의 $j$번째 행이다. 그리고 이 식을 풀어쓰면 다음과 같다.

(2.6) $$\partial c_{hk}/\partial a_{ij}=c_{hi}c_{jk};\ h, i, j, k=1, 2, \cdots, n.$$

## 3. 結果의 經濟的 解釋

앞節에서 우리는 다음과 같은 결과를 얻었다.

(3.1) $$\partial c_{hk}/\partial a_{ij}=c_{hi}c_{jk};\ h, i, j, k=1, 2, \cdots, n$$

그리고 이 결과는 제 1 절에서 소개된 정리의 타당성을 다시 한 번 증명해주고 있다. 왜냐 하면 $c_{hi}$와 $c_{jk}$는 모두 0보다 크기 때문이다. 그리고 이 관계식은 투입계수의 변화의 파급효과를 구체적으로 보여주고 있다. 이 사실이 보다 잘 설명될 수 있도록, 이를 $a_{ij}$의 독립적 변화가 $c_{hk}$에 미치는 영향을 나타내는 모습으로 다음과 같이 고쳐 써 보자. 즉,

(3.2) $$dc_{hk}=(\partial c_{hk}/\partial a_{ij})da_{ij}=c_{hi}(da_{ij})c_{jk}.$$

이 식에서 $da_{ij}$는 $j$번째 재화를 생산하는 네 소요되는 $i$번째 재화의 직접투입계수 $a_{ij}$의 獨立的 變化分이다. 그런데 우변에서 $c_{hi}$는 $i$번째 재화에 대한 최종수요 1단위를 충족하기 위한 $h$번째 재화의 직접간접 산출소요량이다. 그러므로 우변의 $c_{hi}(da_{ij})$는 투입계수의 독립적 변화 $da_{ij}$로 말미암은 $i$번째 재화에 대한 수요변화를 충족하기 위한 $h$번째 재화의 직접간접 산출소요량이다. 그리고 $[c_{hi}(da_{ij})]c_{jk}$는 $k$번째 재화에 대한 최종수요 1단위를 충족하기 위한 $j$번째 재화의 직접간접 산출소요량을 충족하기 위한 $h$번째 재화의 직접간접 산출소요량이, $a_{ij}$의 독립적 변화 $da_{ij}$로 말미암아 얼마나 변해야 하는가를 나타낸다. 그리고 식 (3.2)는 그것이 바로 $dc_{hk}$ 임을 보여준다.

그러면 이 $dc_{hk}$란 무엇인가? 이는 독립적인 변화 $da_{ij}$로 말미암아 종속적으로 변하는 $c_{hk}$, 즉 $k$번째 재화에 대한 최종수요 1단위를 충족하기 위한 $h$번째 재화의 총산출의 변화분이다. 식 (3.2)는 이러한 일이 진행되는 경로를 보여주고 있다. 즉 그 경로는, $k$번째 재화에 대한 최종수요 1단위를 충족하기 위해서는 $j$번째 재화의 총산출소요량이 $c_{jk}$가 되어야 하는데, $a_{ij}$의 독립적 변화 $da_{ij}$는 그 총산출소요량을 생산하기 위한 $i$번째 재화의 중간투입소요량을 변화시키고, 그 변화는 $h$번째 재화의 총산출소요량의 변화, $c_{hi}(da_{ij})c_{jk}$를 요구하는 모습을 띠게 된다는 것이다.

## 4. 追加的 結果

제 1 절에 인용된 정리는 $C$의 모든 원소가 $a_{ij}$의 强增加函數임을 말하고 있고, 식 (2.6)

은 이 정리의 타당성을 뒷받침하고 있다. 그러나 우리는 이 식을 이용하여 추가적인 결과를 더 얻을 수 있다.

그 정리의 전제하에서 다음 부등식이 성립하는 것은 잘 알려져 있다[예컨대 Takayama (1985, Chapter 4) 참조]:

(4.1) $c_{ij}>0, \quad i, j=1, 2, \cdots, n;$

(4.2) $c_{ii}>1, \quad i=1, 2, \cdots, n.$

그러므로 식 (2.6)으로부터 다음 부등식을 얻을 수 있다:

(4.3) $\partial c_{hk}/\partial a_{ij}=c_{hi}c_{jk}>0; \quad h, i, j, k=1, 2, \cdots, n.$

(4.4) $\partial c_{ik}/\partial a_{ij}=c_{ii}c_{jk}>c_{jk}; \quad i, j, k=1, 2, \cdots, n.$

(4.5) $\partial c_{hj}/\partial a_{ij}=c_{hi}c_{jj}>c_{hi}; \quad h, i, j=1, 2, \cdots, n.$

(4.6) $\partial c_{ij}/\partial a_{ij}=c_{ii}c_{jj}>1; \quad i, j=1, 2, \cdots, n.$

이 부등식들은 좌변으로 주어진 편도함수들의 크기의 정도를 보여준다. $i$와 $j$가 같지 않을 때 거의 언제나, $c_{ij}$는 1보다 작거나 아니면 적어도 $c_{ii}$ 또는 $c_{jj}$보다 작음을 감안하면 우리는 다음과 같이 말할 수 있을 것이다. 즉, 투입계수행렬 $A$의 원소 $a_{ij}$가 독립적으로 증가할 때: 식 (4.6)에 의하면, 레온티에프역행렬 $C$의 위치적으로 대응하는 원소 $c_{ij}$가 가장 크게 증가하며, 그 증분은 $a_{ij}$의 증분보다 크다. 식 (4.4)에 의하면, 레온티에프역행렬 $C$의, 위치적으로 $a_{ij}$가 속하는 행의 원소 $c_{ik}$들은 $a_{ij}$의 증분의 $c_{jk}$배보다 더 크게 증가한다. 식 (4.5)에 의하면, 레온티에프역행렬 $C$의, 위치적으로 $a_{ij}$가 속하는 열의 원소 $c_{hj}$들은 $a_{ij}$의 증분의 $c_{hi}$배보다 더 크게 증가한다. 식 (4.3)에 의하면, 레온티에프역행렬 $C$의, 위치적으로 $a_{ij}$가 속하는 행 또는 열 어느 쪽에도 속하지 않는, 원소 $c_{hk}$들은 어느 쪽에라도 속하는 원소들보다 적게 증가할 것으로 기대된다.

서울大學校 經濟學科 敎授
151-742 서울 관악구 신림동
전화 : (82-2)880-6370
팩시 : (82-2)888-4454

## 參 考 文 獻

鄭基俊(1991): "投入產出分析의 호킨스-사이몬條件—그 再解釋과 새로운 展開," 서울大學

校 經濟硏究所『經濟論集』**30. 4,** 401-413.

Murata, Yasuo (1977): ***Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems***, Academic Press, New York.

Takayama, Akira (1985): ***Mathematical Economics***, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Theil, Henri (1971): ***Principles of Econometrics***, Wiley, New York.