共積分 聯立方程式模型(1)

朴 埈 用·韓 尙 範

본고는 공적분 연립방정식모형의 최우추정방법과 도구변수 추정방법에 대한 매우 포괄적인 연구를 담고 있다. 정준공적분회귀(CCR)라는 하나의 기본 분석틀 안에서, 공적분 모형을 효율적으로 추정하기 위한 기존의 모수적 접근방법과 비모수적 접근방법을 통합하였다. 특히 과도식별 제약이 부여된 구조형 공적분 연립방정식 체계를 추정하기 위한 최우추정방법을 본고에서 개발하였다. 즉, 연립방정식 시스템을 추정하기 위하여 모수적 방법과 비모수적 방법을 이용한 완전정보 최우추정량(FIML)과 제한정보 최우추정량(LIML)을 구하고 이들의 극한분포를 도출하였다. 또한 방정식 체계내의 외생변수들에 대한 약외생성의 가정하에서 공적분 모형을 효율적으로 추정할 수 있는 새로운 도구변수 추정방법을 제안하였다. 이 방법은 통상의 연립방정식모형에서와 같이 과도식별이 부여된 구조형 연립방정식모형에 대한 2단계 최소자승추정량(2SLS)과 3단계 최소자승추정량(3SLS)과 매우 유사한 모양을 가지고 있다. 끝으로 우리는 공적분 연립방정식 체계에 대한 단일방정식 추정방법과 시스템 추정방법과의 차이를 서로 비교한다.

1. 序　　論

Engle and Granger(1987)의 논문 이후 경제학의 여러 실증분야에서 공적분 모형이 광범위하게 응용되면서 이 모형의 유용성에 대한 경험적 증거가 계속 축적되고 있으며, 이들을 보다 효과적으로 분석할 수 있는 통계적 방법론의 개발이 중요한 이슈로 대두하였다. 특히 공적분 모형에 대한 효율적이고도 강건한(robust) 추정방법의 개발은 이론적인 측면에서나 실증적인 측면에서 매우 중요하다. 이미 잘 알려져 있듯이 경제시계열 간의 공적분의 존재는 경제내에 장기균형(longrun relationship)이 존재함을 의미하기 때문에 만약 경제시계열 사이에 안정적인 장기균형관계가 존재한다면 당연히 이러한 관계를 가능한 한 정확하게 추정하여야 할 것이다. 지금까지 많은 연구자들이 공적분모형의 효율적 추정을 위하여 노력을 경주하였는 바, 특히 Phillips(1988b, 1989)와 Johansen(1988, 1989a) 등의 연구에 힙입어 공적분 모형을 분석하기 위한 훌륭한 통계적 도구를 가지게 되었다. 이들의 선구적인 연구에 의해 공적분 모형의 분포의 비정규성의 문제라든지, 통계적 추론과정에서 장애모수(nuisance parameters)의 존재로 야기되는 문제 등 공적분 모형과 관련된 여

(1) 본 연구는 한국학술진흥재단 학술연구조성비 지원에 의해 수행되어졌음.

러 가지 중요한 이슈들이 해결되었다. Phillips(1988b, 1989)는 시간영역(time domain) 또는 주기영역(frequency domain)에서, 모형 내에 단위근의 제약을 명시적으로 부여한 식을 공적분 방정식체계에 추가한 후, 이 방정식체계의 점근적 우도함수를 비모수적으로 극대화하는 방법을 통하여 이러한 문제들을 해결하였다. 그 반면에 Johansen(1988, 1989a)은 단기동학(shortrun dynamics)을 포함하는 오차수정모형의 교란항이 정규분포를 따른다고 하는, 보다 제약적인 가정하에서 최우추정량을 구하는 방법을 통해서 같은 문제를 공략하였다.

그러나 이들의 방법을 포함하는 기존의 연구들은 보다 일반적인 형태의 공적분 연립방정식 모형을 다루기에는 부적절하다. 이것은 공적분 모형체계의 추정에 관한 모든 비모수적 접근방법들은 단지 축약형 모형의 경우에 대해서만 적용가능하며, 과도식별 제약이 있는 구조형 공적분 연립방정식 모형의 경우에는 직접 적용할 수가 없기 때문이다. 또한 적도식별되는 모형일지라도 축약형 모형의 추정은 일반적으로 관심이 되는 모수의 비선형함수에 대한 추정치밖에 제공하지 못한다. 또한 Johansen의 모수적 접근방법은 공적분 연립방정식 모형 내의 모수를 식별하지 않은 채로 추정하는 방법이므로, 구조형 연립방정식 모형을 추정하는 데 역시 유용하지 않으며, 따라서 의미있는 통계적 가설을 세우고 이를 검정하는 것이 매우 어렵다. 잘 알려진 바와 같이 구조형 연립방정식 모형에서 경제이론을 검정하기 위해서는 사전적으로 과도식별되는 제약이 존재하여야 한다.

본고에서는 공적분 모형에 대한 기존의 모수적 접근방법과 비모수적 접근방법들을 하나의 이론적 틀로 통합하고, 과도식별 제약이 주어지는 보다 일반적인 공적분 연립방정식 모형의 최우추정 및 도구변수 추정을 위한 통계이론을 개발하였다. 이러한 두 접근방법의 통합은 Park(1992)에 의하여 개발되어진 정준공적분회귀(CCR: canonical cointegrating regression)라는 이론적 틀안에서 가능하였다. 비모수적 CCR과 모수적 CCR은 Phillips (1988b, 1989)와 Johansen(1988, 1989a)의 방법에 각각 대응하며, 그들의 방법과 비교하여 볼 때, 보다 일반적인 형태의 공적분 연립방정식 모형에 대한 통계적 추론을 하는 경우에 매우 용이하게 사용될 수 있다. 정준공적분회귀(CCR)는 회귀분석의 일종이므로 실증분석에 사용할 경우나 공적분 회귀모형에 대한 통계이론을 개발하는 경우에 매우 편리하다. 예를 들어 FIML이나 LIML과 같은 최우추정량에 대한 극한분포는 CCR을 우도함수로 새로이 구성함으로써 즉각 구할 수 있다. 공적분 체계를 전체시스템으로 추정하지 않고 각각의 단일 방정식으로 떼어내어 추정하는 경우에 그 상대적인 효율성의 문제도 우리가 제안한 접근방법을 사용하면 매우 간단히 분석할 수 있는, 또 다른 예이다.

무엇보다도 본고에서 개발한 CCR 추정방법을 이용하면 공적분 연립방정식 모형에 대한 대부분의 통계이론이 전통적인 연립방정식모형의 그것과 거의 유사한 구조를 가짐을 알 수 있다. 또한 본고의 통합이론은 Phillips(1988b, 1989)와 Johansen(1988, 1989a)의 접근방법이 모두 점근적으로 동일함을 보여 준다. 이것은 적도식별되는 축약형모형에서뿐만 아니라 임의의 과다식별 제약이 있는 구조형 공적분 연립방정식모형의 경우에도 역시 성립한다. 이렇듯 모수적 접근방법보다, 여러 가지 교란요인에 대해서 훨씬 강견한 (robust) 비모수적 접근방법의 통계적 성질이 두 경우에 점근적으로 동일하다면, 보다 제약적인 가정하에 성립하는 오차수정모형에 근거한 Johansen(1988, 1989a)의 최우추정방법은 우리에게 더 이상 큰 매력을 주지 못한다. 그럼에도 불구하고, 오차수정모형에는 오차수정계수(error correction coefficient)와 같은 중요한 단기 모수(shortrun parameters)를 포함하고 있다는 데 주목해야 하며, 이러한 점에서 Johansen의 접근방법은 Phillips의 접근방법과 직접적인 비교가 가능하지 않다. 종종 실증분석이나 경제시계열의 예측을 위한 목적에서 공적분회귀식과 더불어 단기동학(shortrun dynamics)을 포함하는 오차수정모형을 다루어야 할 필요가 있을 수 있다. 이러한 분석방법은 Hendry(1986, 1987)에 의해 주창되어졌으며 많은 연구자들은 이 방법론을 이용하여 경제이론을 분석하고 있기도 하다. 오차수정모형의 설정을 위해서는 고려되는 자료생성과정(DGP)을 위해 벡터자기회귀모형에서 유한 개의 자기회귀 차수에 대한 가정이 필요하다.

본고의 모수적 CCR 추정방법은 회귀이론의 틀안에서, 축약형모형뿐만 아니라 과도식별 제약이 존재하는 보다 일반적인 형태의 구조형모형을 편리하게 추정할 수 있는 적확한 최우추정방법(exact ML method)이다. 비록 Johansen(1988, 1989a)의 방법이 Johansen and Juselius(1990)에서처럼 과도식별되는 공적분 연립방정식 모형을 다룰 수 있도록 확장될 수 있다고 할지라도, CCR 방법은 계산상의 편리함에서나 식별제약을 설정하는 용이성의 측면에서 그들의 방법보다 우월하다고 할 수 있다. 특히 회귀모형에서 교란항에 대한 정규분포의 가정이 의심스러울 때는 Johansen의 최우추정법을 사용해야 할 이유가 없다. 본고에서 개발한 방법은 방정식들간에 걸쳐진 제약뿐만 아니라 비선형 제약들도 검정가능하다. 이러한 일반적인 제약의 경우는 여러 가지 경제이론적 맥락에서 매우 유용하게 사용되어 질 수 있다. 모수적 CCR은 또한 오차수정모형내의 단기모수(shortrun parameters)에 대한 최우추정량도 제공하여 준다. 그러나 만약 우리가 공적분 연립방정식모형이 의미하는 장기균형관계만을 알고 싶어한다면 비모수적 CCR을 이용하는 것이 더 낫다. 왜냐 하면 비모수적 CCR은 모수적 CCR에 비하여 교란요인들에 대해 보다 더 강견(rubust)하다

는 것 이외에도, 이 방법은 표준적인 오차수정모형의 형태를 허용하지 않는 모형들에 대해서도 유용한 통계적 도구를 제공하기 때문이다. 예를 들어 비모수적 CCR은 Park and Hahn(1995)에서처럼 변동계수를 가지는 공적분 모형이나 Ogaki and Park(1989)에서 보여준 것처럼 장기균형 공적분관계와 정상적 관계(stationary relationship)를 동시에 포함하는 모형에 대해서도 쉽게 적용된다. 이러한 모형들은 오차수정모형을 구성할 수 없으며, 따라서 적어도 장기균형계수의 최우추정량을 구하기 위해서 모수적 접근방법은 사용할 수가 없다.

모형내에 포함된 변수 중 일부가 외생적일 경우 최우추정량을 구하는 방법이 매우 단순해 진다. Boswijk(1989)과 Johansen(1989b) 등은 최근에 Engle, Hendry and Richard (1983)가 정의한 의미에서의 약외생적인(weak exogeneous) 변수를 포함하는 오차수정모형의 추정방법을 연구하였다. 본 논문에서는 이 문제를 공적분 연립방정식 모형이라는 맥락안에서 살펴보고 약외생성의 조건 아래서 최우추정량과 동일한 분포를 가지는 도구변수 추정법을 개발하였다.

이 방법은 방정식 시스템 밖으로부터 확률적 추세를 도입하는 외생변수들이 통계적으로 약외생적인 경우 적용가능한 방법이다. 그 결과는 그 이론적 동기에서나 계산상의 측면에서 기존의 2SLS와 3SLS 추정방법과 근본적으로 동일하다. 사실 우리는 적절하게 정의된 외생변수와 내생변수를 사용하여 이러한 추정치들을 SAS나 SPSS와 같은 기존의 통계패키지를 이용하여 계산해 낼 수 있다.

마지막으로 본고에서는 공적분 연립방정식모형에서의 단일방정식 추정이 시스템 추정에 대하여 가지는 상대적인 효율성에 대하여 다루고 있다. 연립방정식 체계가 적도식별되는 경우에는 개별방정식에 대한 추정은 시스템 추정과 동일하다. 사실 이것이 Phillips (1988b, 1989)와 Johansen(1988, 1989a)의 시스템 접근방법이 Park(1992)에 의하여 제시된 개별 공적분회귀식에 근거한 방법에 비해 효율적이지 않는 근본이유이다. 모수적 오차수정모형의 틀안에서 단일방정식 접근방법이 유효하기 위해서 우리는 몇가지 외생성의 조건들을 부과하여야 한다. 그렇지 않으면 하부방정식체계(subsytem)에 적용된 최우추정방법은 단지 비효율적인 것이 아니라 부적절한 것이 된다. 따라서 개별공적분 방정식에 대한 추정이 이론적으로 정당한 경우라고 할지라도 방정식체계가 적도식별되는 경우에만 시스템 추정에서와 같이 완전효율적이게 된다. 따라서 보다 일반적인 경우인 과도식별되는 방정식 체계에서는 시스템 추정이 개별방정식 추정에 비해 보다 효율적이다.

다음의 약어는 본 논문의 전편을 통하여 매우 자주 등장하므로 요약 정리하였다: 연립

방정식모형(SEM: Simultaneous Equation Model), 공적분 연립방정식모형(SCM: Simultaneous Cointegrated Model), RF(Reduced Form), SF(Structural Form), DGP(Data Generating Process), VAR(Vector Autoregression), 오차수정모형(ECM: Error Correction Model), 최우(ML: Maximum Likelihood), 완전정보최우추정량(FIML: Full Information Maximum Likelihood), 제한정보최우추정량(LIML: Limited Information Maximum Likelihood), 최소자승추정량(OLS: Ordinary Least Squares), 일반최소자승추정량(GLS: Generalized Least Squares), 도구변수(IV: Instrumental Variables), 2단계최소자승 (2SLS: Two Stage Least Squares), 3단계최소자승(3SLS: Three Stage Least Squares), 외견상무상관회귀(SUR: Seemingly Unrelated Regression), 정준공적분회귀(CCR: Canonical Cointegrating Regression) 그리고 마지막으로 외견상무상관 정준공적분회귀(SUCCR: Seemingly Unrelated Canonical Cointegrating Regression) 등이다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절, 3절과 4절에서는 모형 및 가정, 식별조건 그리고 자료생성과정을 소개하고, 5절에서는 공적분 연립방정식모형의 최우추정량을 모수적 방법과 비모수적 방법으로 나누어 각각 분석한다. 또한 FIML 추정량과 단일방정식 LIML 추정량을 그들의 극한분포와 함께 소개한다. 6절에서 우리는 일반적인 공적분 연립방정식 모형의 추정을 위한 새로운 도구변수 추정방법을 개발한다. 7절에서는 단일방정식 추정과 전체방정식 추정을 서로 비교한다. 마지막 절은 결론이며, 각 명제와 정리에 대한 수학적 증명을 부록에 제시하였다.

2. 模型 및 假定

r-차원 다변량 시계열(multiple time series) $\{z_t\}$로 이루어진 연립방정식모형

$$A'z_t = u_t \tag{2.1}$$

을 생각하자. 여기서 $\{z_t\}$에 포함된 개별 시계열들은 모두 단위근을 가지고 있고 모형의 오차항 $\{u_t\}$는 정상적(stationary)이라고 가정한다. 행렬 A의 각 열들은 각각 공적분 벡터(cointegrating vector)들로 이루어져 있다. 식 (2.1)에 쓰인 시계열 $\{z_t\}$를 각각 l, m 차원인 시계열 $\{y_t\}$와 $\{x_t\}$로

$$z_t = \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

분할해 보자. 이 때 $r = l + m$이다.

우리는 $\{z_t\}$를 구성하는 시계열 $\{x_t\}$에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

假定 1 : $\{x_t\}$는 공적분되어 있지 않다.

다변량 시계열 $\{x_t\}$를 구성하는 시계열간에 공적분관계가 존재하는가는 기존에 알려진 여러 공적분 검정 방법을 이용하여 검정해 볼 수 있다. 이제 식 (2.1)로 주어진 회귀모형을

$$B'y_t + C'x_t = u_t \tag{2.3}$$

로 표현하여 보자. 여기서 $A = (B, C)$이다. 위의 식은 계량경제학 교과서에 흔히 등장하는 연립방정식모형(SEM: simultaneous equation model)과 유사한 형태이며, 방정식체계를 구성하는 개별 방정식들은 연립방정식모형에서의 구조식(structural equation)으로 볼 수도 있다. 그러나, 식 (2.3)로 주어진 모형을 이루는 각 회귀식은 공적분 관계식을 나타내므로, 개별 구조방정식들이 장기적 균형관계를 의미한다는 점에서 기존의 연립방정식모형과는 다르다. 따라서 우리는 식 (2.3)으로 주어지는 모형을, 여러 개의 공적분관계식을 동시에 다루고 있다는 점에서 특별히 기존의 연립방정식모형과 구분하여, "공적분 연립방정식모형"(SCM: simultaneous cointegrated model)이라고 부른다.

가정 1에 의해 시계열 $\{x_t\}$는 시스템 내부에 "확률추세"(stochastic trends)를 도입하게 되고, 시계열 $\{y_t\}$는 방정식체계에 도입된 확률추세 $\{x_t\}$와 오차항 $\{u_t\}$에 의해 변하게 된다. 이러한 의미에서 시계열 $\{x_t\}$를 "외생적"(exogeneous)이라고 부른다. 그러나, 이것이 통계학적 의미의 "약외생성"(weak exogeneity)의 가정을 $\{x_t\}$에 부여하고 있는 것은 아니다.

식 (2.3)에서와 같이 구조형모형(SF: structural form model)으로 표현된 공적분 연립방정식모형(SCM)은 연립방정식모형(SEM)에서와 같이 축약형모형(RF: reduced form model)으로 표현될 수 있다.

$$y_t = \Pi' x_t + v_t \tag{2.4}$$

3. 識別(Identification)

공적분 연립방정식모형 (2.1)의 계수행렬 A는 연립방정식모형에서와 같이 식별이 되지 않는다. 즉, A가 공적분 벡터로 이루어진 행렬이라고 하면 비특이행렬인 어떤 T에 대해서도 행렬 AT 역시 공적분행렬을 이룬다. 따라서 공적분 연립방정식모형이 식별되기 위해서는 공적분행렬인 A의 장기균형관계를 나타내는 각 열벡터들이 유일하게 결정되기 위한 제약이 필요하게 된다. 연립방정식모형(SEM)의 분석에서처럼 행렬 A에 대해

$$R\text{vec}A = c$$

로 주어진 선형제약을 부여하고, 아래와 같은 位數條件이 공적분 연립방정식모형에서 충족된다고 하자.

假定 2 : 식 (2.3)으로 주어지는 공적분 연립방정식모형에서 행렬 B는 비특이행렬이고, 다음과 같은 제약식을 만족한다.

$$\text{rank } R(A \otimes I_l) = l^2$$

위의 가정은 연립방정식모형(SEM)에서처럼 공적분 연립방정식모형(SCM)에서도 식별을 위한 필요충분조건인 位數條件(rank condition)이 만족되어야 한다는 것이다. 물론 모형내에 부여된 제약의 수가 l^2개보다 더 많아야 한다는 次數條件(order condition)은 공적분 연립방정식모형이 식별되기 위한 필요조건이다. 구조형모형(SF)과는 달리 축약형 공적분모형(reduced SCM)은 가정 1에 의해 항상 식별된다. 식별된 공적분 연립방정식모형의 각 구조방정식은

$$y_{it} = \alpha_i' z_{it} + u_{it} \tag{3.1}$$

로도 쓸 수 있다.

본 고에서 개발된 공적분연립방정식 모형의 추정방법은 공적분체계를 가지는 모든 모형에 적용가능하지만, 이하에서는 특히 과다식별된 모형(over-identified model)에 초점을 맞추고자 한다. 적도식별(just-identified)되는 모형의 경우에는 Phillips and Hansen(1990)이나 Park(1992)에 의해 개발된 추정방법을 이용할 수 있다. 또한 축약형 공적분 연립방정

식모형은 적도식별된 모형이므로, 여기서도 이들 방법들을 이용할 수 있다. 적도식별된 구조형모형(SF)의 경우에도 위의 추정방법들을 적용할 수 있다. 이는 적도식별된 구조형 모형의 계수를 축약형모형으로부터 유일하게 구할 수 있기 때문이다. 식별되지 않는 모형(unidentified model)의 추정을 다루는 Johansen(1988, 1991)의 최우추정법은 적도식별되는 모형을 분석하는 경우에도 그대로 적용할 수 있다. 후에 Johansen and Juselius(1994)는 이 추정방법을 과다식별되는 모형을 추정할 수 있도록 확장하였다.

과다식별되는 공적분 연립방정식 모형의 한 예로

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta y_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + u_{2t} \end{aligned}$$

인 간단한 모형을 살펴 보자. 첫번째 식은 과다식별되어 있고 두번째 식은 적도식별되어 있음을 알 수 있다. 가정 1에 의해 시계열 $\{x_t\}$는 결코 정상(stationary) 시계열일 수 없으나, 시계열 $\{y_t\}$를 이루는 시계열 중 일부는 정상 시계열일 수 있다. 만약 $\{y_{1t}\}$를 정상 시계열이라고 하면, 위에 예시한 모형을

$$\begin{aligned} y_{1t} &= u_{1t} \\ y_{2t} &= \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + u_{2t} \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 위의 식에서 우리는 정상 시계열과 적분 시계열을 동시에 포함하는 공적분체계는 반드시 과다식별됨을 알 수 있다.

4. 資料生成過程(data generating process)

다변량 시계열 $\{z_t\}$로 이루어진 공적분 연립방정식모형을 분석하기 위해 다음과 같은 가정을 한다.

假定 3 : 식 (4.1)로 표현되는 확률과정 $\{w_t\}$는 불변정리(invariance principle)를 만족한다.

$$w_t = (u'_t, \Delta x'_t)' \tag{4.1}$$

假定 4 : 시계열 $\{z_t\}$가 다음의 오차수정모형(ECM)에 의해 생성되었다고 하자.

$$\Gamma(L)\Delta z_t = -\Gamma A' z_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.2}$$

이 때 $\Gamma(z)$은 $p-1$차 행렬시차다항식(matrix lag polynomial)이고 $\{\varepsilon_t\}$는 백색잡음(white noise) 교란항이다.

Phillips(1991a, 1991b)에 의해 개발되어진 공적분 회귀식의 추정에 관한 비모수적 접근방법(nonparametric approach)은 가정 3에 의존하고 있다. 가정 3의 "불변정리"는 매우 다양한 시계열에 대하여 성립함이 여러 연구자에 의하여 밝혀 졌다. 반면 Johansen(1988, 1991)에 의해 소개된 모수적 접근방법(parametric approach)은 가정 4에 근거하고 있다. Johansen의 최우추정방법(ML method)을 이용하기 위해서는 오차수정모형 (4.2)의 교란항인 $\{\varepsilon_t\}$가 정규분포를 따른다는 가정이 필요하다. 그러나 본 논문에서 보여주는 바와 같이 이러한 정규분포의 가정이 꼭 필요한 것은 아니다.

가정 3이 가정 4에 비해 덜 제약적이므로, 가정 3에 기초한 비모수적 접근방법이 적용할 수 있는 범위가 모수적 접근방법에 비해 더 넓으나, 비모수적 접근방법에서는 고려하고 있지 않는 단기모수(shortrun parameters) Γ_k와 오차수정계수 Γ를 모수적 접근방법의 오차수정모형 (4.2)이 포함하고 있기 때문에, 엄밀히 말해서 가정 3과 4에 근거한 두 가지 접근방법을 직접으로 비교하는 것은 가능하지 않다.

가정 3과 4에 의해 생성된 시계열을 각각 식 (4.1)과 (4.2)에서 정의된 $\{w_t\}$와 $\{\varepsilon_t\}$로 나타내고 이 두 확률과정의 장기분산(longrun variance)을 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} w_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} w_t\right)' = \begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

그리고

$$\Sigma_0 = \mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t') = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

이며, 위 두 행렬은 모두 (2.2)식에서의 $\{z_t\}$와 적합하게 분할하였다. (4.3)의 Ω_0는 $\mathrm{E}(w_t w_t')$로 주어지는 통상의 분산과 구별하여 장기분산(longrun variance)이라고 부른다.

이제 우리는 장 · 단기 조건부분산

$$\Omega_{11\cdot 2} = \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21} \tag{4.5}$$

$$\Sigma_{11\cdot 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \tag{4.6}$$

을 정의하고, 더불어 가정 3과 4의 자료생성과정에 대하여

(4.7) $$\Omega = \Omega_{11\cdot 2} \text{ 또는 } (\Gamma'\Sigma_0^{-1}\Gamma)^{-1}$$

로 주어지는 장기분산을 정의한다.

補助定理 1 : 자료생성과정이 가정 4로 주어진 경우,

$$\Omega_{11\cdot 2} = (\Gamma'\Sigma_0^{-1}\Gamma)^{-1}$$

의 결과를 얻게 된다.

이 보조정리는 Park(1990a)에 의해 처음 증명 되었으며, 다음 절의 논의에서 공적분 연립방정식 모형의 두 가지 접근방법을 통일적으로 분석하는 데 매우 긴요하게 쓰인다.

5. 最尤推定方法(ML estimation)

5.1. 非母數的 正準共積分回歸에 의한 最尤推定方法

Park(1992)에 의해 제시된 正準共積分回歸(CCR: canonical cointegrating regression) 모형은 식 (5.1)에서 볼 수 있듯이 변환된 시계열로 이루어진 회귀식에 근거하고 있다.

(5.1) $$y_t^* = \Pi' x_t^* + v_t$$

$\{y_t^*\}$와 $\{x_t^*\}$는 단위근 시계열인 $\{y_t\}$와 $\{x_t\}$로부터 아래와 같은 방법을 통하여 변환된다.

(5.2) $$y_t^* = y_t - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Delta x_t - \Pi'\Lambda\Sigma^{-1}w_t$$

(5.3) $$x_t^* = x_t - \Lambda\Sigma^{-1}w_t$$

이 때

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(x_t w_t') \quad \text{이고} \quad \Sigma = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(w_t w_t')$$

이다. 식 (5.1)에서의 CCR 추정방법은 Park and Ogaki(1990)에 의해 "一見上 無相關模型"(SUR: seemingly unrelated regression)을 다룰 수 있도록 확장되었다. 그들의 방법은

"一見上 無相關 正準共積分回歸"(SUCCR: seemingly unrelated canonical cointegrating regression) 모형이라고 부르며, 구조형(SF) 공적분 연립방정식모형을 추정하는 데 적용할 수 있다. 좀더 구체적으로 보기 위하여, 구조형 방정식인 (3.1)식 대신에 (5.2)식과 (5.3)식과 같은 시계열 변환을 통하여, (5.4)식으로 이루어지는 연립공적분체계를 만들어 보자.

$$y^*_{it} = \alpha'_i z^*_{it} + v_{it} \tag{5.4}$$

이 때

$$y^*_{it} = y_{it} - w_{i2}\Omega_{22}^{-1}\Delta x_t - \alpha'_i\Lambda'_i\Sigma^{-1}w_t \tag{5.5}$$

$$z^*_{it} = z_{it} - \Lambda'_i\Sigma^{-1}w_t \tag{5.6}$$

또한

$$\Lambda_t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(w_t z'_{it})$$

이고, w_{i2}는 $\{u_{it}\}$과 $\{\Delta x_t\}$의 장기분산이다.

(5.5)식에서 볼 수 있는 바와 같이 $\{y_{it}\}$의 변환은 다음의 두 가지 항을 포함하고 있다. 처음에 나타나는 항은 공적분 오차항과 설명변수들을 점근적으로 독립적으로 만들며, 마지막에 있는 항은 시계열변환 전의 공적분 연립방정식모형을, 최소자승법으로 추정하는 경우 발생하는 점근적 偏倚(asymptotic biasedness)를 제거한다. 변환된 시계열은 원래의 시계열과 단지 정상적 항(stationary term) 만큼만 다르기 때문에 장기적인 공적분 관계가, 변환된 시계열 사이에서도 그대로 성립한다. 그러나, 원래의 공적분 연립방정식 모형이 가지고 있던 오차항은 CCR 변환과정을 거치면서 크게 변하게 된다. (5.1)식과 (5.4)식으로부터

$$v_t = u_t - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Delta x_t \tag{5.7}$$

로 주어지는 CCR 오차항 $\{v_t\}$를 구할 수 있다. 이 때 이 오차항의 장기분산(longrun variance)은 식 (4.7)에 있는 Ω로 주어 진다. (5.1)식과 (5.4)식으로 주어진 정준공적분회귀식(CCR)의 OLS 추정량은, 최우추정량과 동일한 극한분포를 가진다는 점에서 "정규적"이라고 할 수 있다. 최우추정량과 동일한 극한분포를 가진다는 것은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(x_t^* v_t') = 0$$

와

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(z_{it}^* v_t') = 0$$

이기 때문임을 쉽게 알 수 있다. 즉, CCR 오차항 $\{v_t\}$는 식 (5.7)에서 볼 수 있듯이 설명변수 $\{x_t^*\}$와 점근적으로 독립이다. 따라서 CCR 변환된 공적분체계의 일반자승추정(GLS)은 점근적 우도(asymptotic likelihood)를 극대화하며 따라서 일반자승추정량은 최우추정량이 된다. 또한 적도식별된 모형만을 고려한다면 CCR 모형의 최소자승추정은 Phillips(1991b)에 의해·제시된 효율적인 추정법과 점근적으로 동일한 결과를 낳는다. 즉, 공적분 연립방정식모형이 축약형으로 주어진 경우 일반자승추정량은 최소자승추정량과 완전히 같게 된다.

실증분석에서 CCR 추정법을 사용하기 위해서는 식 (5.1)과 (5.4)에서 나타나는 미지의 모수들의 일치추정량이 필요하다. 이러한 모수들의 추정은 Park(1992)과 Park and Ogaki(1990)에서 보여준 것처럼, 일차적으로 A에 대한 일치추정량을 구하는 데서 비롯된다. 즉, A의 일치추정치를 먼저 구하고 이로부터 $\{w_t\}$의 장기분산을 비모수적으로 추정하게 된다. 장기균형관계를 나타내는 A의 최소자승추정치는 초일치성(super consistency)을 가진다는 것이 알려져 있으므로 이 추정치로부터 분산들의 일치추정치를 구하는 것은 아무런 문제를 야기시키지 않는다. 그러나 장기모수 A의 CCR 추정량이 OLS 추정량보다 점근적으로 불편추정량이고 효율적이므로, A에 대한 CCR 추정치를 가지고 CCR 변환을 한번 더 해서 공적분 벡터를 추정하는 것이 소표본에서 더 나은 결과를 가져다 줄 것이므로, 실증분석을 하는 경우 CCR 추정을 1번 정도 반복하는 것이 바람직하다.

5.2. 母數的 正準共積分回歸에 의한 最尤推定方法

오차수정모형 (4.2)에 대한 최우추정법과 CCR 추정법과의 직접적인 관계를 도출하기 위해서 다음식으로 주어지는 행렬 J를 정의한다.

$$J = \Sigma_0^{-1}\Gamma(\Gamma'\Sigma_0^{-1}\Gamma)^{-1} \tag{5.8}$$

이 때 Σ_0은 (4.4)식에 주어져 있는 오차수정모형 오차항의 단기분산이다. 또한 $\Phi(z)$는 오차수정모형 (4.2)에 있는 $\Gamma(z)$로부터 다음과 같이 정의된다.

(5.9) $$\Phi(z) = J' \Gamma(z)$$

우리는 다음의 정리 2에서 단기모수 Γ, Σ_0, $\Gamma(z)$ 그리고 J와 $\Phi(z)$를 이미 알고 있다고 가정한다. 이는 장기균형관계를 나타내는 장기모수 A의 효율적 추정에 관심을 집중하기 위해서이다. 이들 단기모수들은 앞에서 언급된 것처럼 A의 초일치추정치로부터 언제든지 효율적으로 추정할 수 있다.

定理 2 : 자료생성과정이 가정 4에 의해 주어졌다고 하자. 오차수정모형 (4.2)에 근거한 장기모수 A의 최우추정량(MLE)은, 다음 회귀식에서 A를 일반자승추정법(GLS)으로 구하는 것과 동일하다.

$$A' z_t + \Phi(L)\Delta z_{t+1} = v_t$$

이 오차항의 분산 Ω은 식 (4.7)로 주어진다.

정리 2는 오차수정모형 (4.2)에 근거한 ML 추정법과 CCR 추정법 간의 직접적인 관계를 보여 준다. 즉 공적분 연립방정식 모형이 축약형으로 주어진 경우 최우추정량은 다음 식과 같이 주어지는 방정식체계를 최소자승법(OLS)으로 추정하는 것과 일치한다.

(5.10) $$y_t^* = \Pi' x_t + v_t$$

이 때 $\{y_t^*\}$는 다음과 같이 주어진다.

$$y_t^* = y_t + \Phi(L)\Delta z_{t+1}$$

또한, 구조형 공적분 연립방정식모형인 경우에는 식 (5.11)들로 이루어지는 방정식체계를 일반자승추정법(GLS)으로 구한 것과 동일하다.

(5.11) $$y_{it}^* = \alpha_i' z_{it} + v_{it}$$

이 때 $i = 1, \cdots, l$이고, $\{y_{it}^*\}$는 다음과 같다.

$$y_{it}^* = y_{it} + \varphi_i(L)\Delta z_{t+1}$$

위 식에서 $\varphi_i(z)$는 식 (5.9)에 있는 행렬시차다항식 $\Phi(z)$의 i번째 행이다. 비모수적 CCR인 (5.1)와 (5.4)에 대비하여 우리는 식 (5.1)과 (5.4)를 모수적 CCR이라 부른다. 후자의 접근

방법이 CCR 변환을 오차수정모형 (4.2)의 단기모수들에 의존하는 반면, 비모수적 CCR은 모수(parameters)를 사용한 모형을 구체적으로 설정하지 않고 시계열들을 변환한다는 점에서 서로 다르다. 그러나 이 두 가지 접근방법의 점근적 성질은 서로 동일하다. 정리 2에서 알 수 있듯이 모수적 CCR의 오차항 $\{v_t\}$는 다음과 같이 주어진다.

$$v_t = J' \varepsilon_{t+1} \tag{5.12}$$

따라서 식 (5.7), (5.12)와 보조정리 1로부터 알 수 있듯이, 모수적 CCR과 비모수적 CCR은 장기분산이 서로 같은 오차항을 가진다.

모수적 CCR를 실증분석에서 사용하기 위해서는 Engle and Granger(1987)가 제시한 2단계 추정방법을 이용할 수 있다. 먼저 최소자승법을 이용해 장기모수인 A를 구하고, 두 번째 단계에서 A의 추정치를 사용하여 오차수정모형 (4.2)를 추정한 후 그 오차항인 $\{\varepsilon_t\}$와 Γ, Σ_0의 추정치를 구한다. 그리고 다음식으로부터

$$\Gamma(L)\Delta z_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - \Gamma A' z_t$$

$\Phi(L)\Delta z_{t+1} = J' \Gamma(L)\Delta z_{t+1}$ 및 (5.8)식에 주어진 J의 추정치를 얻을 수 있다.

최소자승추정법에 의해 1단계에서 구한 A의 추정치는 비록 비효율적이며 偏倚를 가지고 있지만, 오차수정모형에 포함된 다른 계수들의 추정량이 가지는 효율성에는 영향을 미치지 않는다. 이처럼 오차수정모형에 포함된 장기모수 A와 단기모수의 추정사이에 발생하는 이분현상은 매우 중요한 시사점을 가지고 있다. 비모수적 접근방법의 경우에도 CCR 변환을 하는 데 필요한 모수들의 일치추정치를 구하는 데 A의 OLS 추정량을 사용할 수 있다는 점에서 역시 이러한 이분현상이 발견된다. 즉, CCR이나 SUCCR에서 장기모수인 A를 추정하는 경우, 모형내에 포함된 다른 모수들의 일치추정치를 먼저 A의 OLS 추정치를 이용하여 구한 후에, 다시 한번 더 CCR 변환을 통해 A를 추정하는 "반복추정"이 비모수적 접근방법의 경우에서와 같이 의미를 가진다.

6. 道具變數推定法(IV estimation)

6.1. 靜態的 道具變數推定法(static IV estimation)

우리는 5.1절에서 비모수적 CCR 추정방법이 다음과 같은 시계열의 변환에 의존하고 있음을 보았다.

$$y_t^* = y_t - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Delta x_t - \Pi' \Lambda' \Sigma^{-1} w_t \tag{6.1}$$
$$x_t^* = x_t - \Lambda' \Sigma^{-1} w_t$$

Park(1992)은 변환된 $\{x_t^*\}$, $\{y_t^*\}$으로부터 구한 축약형모형의 계수인 Π의 최소자승추정량이 점근적으로 효율적이고 偏倚를 가지지 않으며 그 극한분포도 가우스분포임을 보였다. 이 때 CCR 오차항인 $\{v_t\}$는 다음의 성질을 가지는데

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(x_t^* v_t') = 0 \tag{6.2}$$

이는 $\{\Delta x_t^*\}$가 $\{v_t\}$와 점근적으로 독립임을 의미하는 것으로 식 (6.1)로 주어지는 변환을 통해 $\{x_t\}$가 "통계학적 의미에서 외생적"으로 되고, 그로 인해 $\{x_t\}$는 연립공적분체계내에서 매우 적절한 도구변수가 된다. 즉, CCR 변환추정방법을 이용하면, 사전적으로(a priori) $\{x_t\}$에 대해 "통계학적인 의미의 약외생성"을 가정하지 않고도 이 시계열을 의미있는 도구변수로 사용할 수 있게 된다.

이제 변환된 시계열에 의해 다음과 같이 표현된 공적분 연립방정식모형을 살펴 보자.

$$B' y_t^* + C' x_t^* = v_t \tag{6.3}$$

이 때 i번째 방정식은 다음과 같이 표현한다.

$$y_{it}^* = \beta_i' y_t^{*(i)} + \gamma_i x_{it}^* + v_{it} \tag{6.4}$$
$$= \alpha_i' z_{it}^* + v_{it}$$

위의 식에서 $y_t^{*(i)}$ 및 x_{it}^*는 각각 i번째 회귀식에 포함된 내생변수와 외생변수를 나타내며, $\alpha_i = (\beta_i, \gamma_i)$이다.

이제 i번째 방정식의 계수인 α_i의 정태적 2SLS 추정량을 $\hat{\alpha}_{iS2SLS}$라고 하면 이는 다음과 같다.

$$\hat{\alpha}_{iS2SLS} = (Z_i^{*\prime} P_{X*} Z_i^*)^{-1} Z_i^{*\prime} P_{X*} y_i^*$$

이 때 $P_{X*} = \mathrm{X}^*(\mathrm{X}^{*\prime}\mathrm{X}^*)^{-1}\mathrm{X}^{*\prime}$ 이다.

또한 연립방정식의 3단계 최소자승법(3SLS)처럼 전체방정식을 동시에 추정하기 위해서, $\alpha = (\alpha_1', \ldots, a_l')'$ 라고 하고 다음을 정의하면,

$$y_* = (y_1^{*\prime}, ..., y_T^{*\prime})'$$
$$Z_* = \mathrm{diag}(Z_1^*, ..., Z_T^*)$$

정태적 3SLS, $\hat{\alpha}_{S3SLS}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\alpha}_{S3SLS} = (Z_*'(\hat{\Omega}_*^{-1} \otimes P_{X^*})Z_*)^{-1} Z_*'(\hat{\Omega}_*^{-1} \otimes P_{X^*})y_*$$

$\hat{\Omega}_*$는 변환된 모형에서의 오차항인 $\{v_t\}$의 장기분산 Ω_*의 일치추정량을 나타낸다. $\hat{\alpha}_{S2SLS}$과 $\hat{\alpha}_{S3SLS}$는 각각 변환된 모형에서의 2단계 최소자승추정량(2SLS)과 3단계 최소자승추정량(3SLS)을 나타낸다. 연립방정식모형의 경우에서와 마찬가지로 S3SLS가 S2SLS에 비해 더 효율적인 추정량이다.

6.2. 動態的 道具變數推定法(Dynamic IV estimation)

이제 가정 4에 의해 자료가 생성되었다고 하고, 오차수정모형 (4.2)을 다음과 같이 표기하여 보자.

$$B'y_t = C'x_t = \sum_{i=0}^{p-1} K_i \Delta z_{t-i} + v_t \tag{6.5}$$

이 때

$$K_0 = -J'(I - \Gamma A')$$
$$K_i = J'\Gamma_i \quad \text{for } i = 1, \cdots, p-1$$

이고, $v_t = J'\varepsilon_t$이다. 행렬 J는 5.2절의 (5.8)에 정의되어 있다.

(2.3)식과 (6.5)식을 비교함으로써 공적분 오차항인 $\{u_t\}$를 다음식과 같이 $\{\Delta z_t\}$의 현재값과 과거값을 사용해 모수적인 형태로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$u_t = \sum_{i=0}^{p-1} K_i \Delta z_{t-i} + v_t$$

따라서 (6.5)식으로 주어진 모형은 결과적으로 동태적인 구조를 지니게 된다.

우리는 r개의 방정식으로 이루어져 있는 오차수정모형 (4.2)를 l개의 방정식으로 이루어지는 모형 (6.5)로 변환하는 경우에 장기모수인 A에 대한 여하한 정보도 잃어버리지 않게 된다. 그 이유는 나머지 m개의 방정식이 다음과 같이 주어지는데

$$\Gamma_{\perp}' \Delta z_t = \sum_{i=1}^{p-1} (\Gamma_{\perp}' \Gamma_i) \Delta z_{t-i} + v_t^{\perp}$$

이 방정식체계가 장기모수 A를 포함하지 않으며, 또한 다음식으로부터 알 수 있듯이 두 개의 방정식체계는 서로 독립이기 때문이다.

$$\mathrm{E}(v_t v_t^{\perp\prime}) = J' \Sigma_0 \Gamma^{\perp} = 0$$

이 때 $v_t^{\perp} = \Gamma_{\perp}' \varepsilon_t$이다.

또한 보조정리 1에 의해 오차항 $\{v_t\}$의 분산은 다음식으로 주어져 있으며

$$\mathrm{E}(v_t v_t^{\perp\prime}) = (\Gamma' \Sigma_0 \Gamma)^{-1} = \Omega_*$$

Ω_*는 식 (4.7)에 정의되어 있다. 위의 식으로 알 수 있는 바와 같이 모수적 동태모형인 (6.5)의 오차항은 비모수적 정태모형인 (6.3)의 오차항과 동일한 장기분산을 가진다.

이제 식 (6.5)에서 i번째 방정식을 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_{it} &= \beta_t' y_t^{(i)} + \gamma_i' x_{it} + \sum_{j=0}^{p-1} k_{ij}' \Delta z_{t-j} + v_{it} \\ &= \alpha_i' z_{it} + \sum_{j=0}^{p-1} k_{ij}' \Delta z_{t-j} + v_{it} \end{aligned} \tag{6.6}$$

이 때 k_{ij}'는 K_j의 i-번째 행이다.

식 (6.6)에 대한 최소자승추정량은 일반적으로 α_i에 대해 점근적으로 비효율적이며, 偏倚를 가져 오는데, 그 이유는 일차적으로 $\{\Delta z_t\}$에 해당하는 계수 k_{i0}가 일치추정량이 아니기 때문이다. 즉, 다음에 보는 바와 같이

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \Delta(z_t v_{it}') \neq 0$$

이기 때문에 k_{i0}'의 비일치성(inconsistency)으로부터 α_i에 대한 최소자승추정의 점근적 偏倚가 발생한다. 두번째 이유로는

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(z_{it} v_{it}') \neq 0$$

이기 때문에 문제가 발생한다. 따라서, 설명변수와 오차항간에 존재하는 상관관계로부터

발생하는 문제를 해결하는 방법으로 다음의 도구변수추정방법을 생각해 볼 수 있다.

$\{z_{it}\}$에 대한 도구변수들로 자연스럽게 고려할 수 있는 것은 외생변수의 과거값인 $\{x_{t-1}\}$이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(x_{t-1}v_t') = 0$$

이므로, $\{x_{t-1}\}$가 $\{z_{it}\}$의 도구변수로 사용된다면 $\{z_{it}\}$와 $\{v_{it}\}$의 상관관계로부터 오는 문제는 간단하게 해결될 수 있다.

그러나 $\{\Delta z_t\}$에 대한 도구변수를 정하는 데에는 좀더 주의를 필요로 한다. 아래식에서 알 수 있듯이 $\{\Delta z_{t-p}\}$는 $\{\Delta z_t\}$의 과거값들과 아무런 관련이 없기 때문에 $\{\Delta z_{t-p}\}$는 $\{\Delta z_t\}$의 도구변수로 부적절함을 알 수 있다.

$$\Gamma_\perp' \Delta z_t - (\Gamma_\perp' \Gamma_1)\Delta z_{t-1} - \cdots - (\Gamma_\perp' \Gamma_{p-1})\Delta z_{t-p+1} = \Gamma_\perp' \varepsilon_t$$

따라서 $\{\Delta z_t\}$의 적절한 도구변수로 다음과 같은 변수를 고려할 수 있다.

$$(\Gamma_\perp' \Delta z_t, A' z_{t-1})$$

이 이외에도 다른 도구변수들을 생각해 볼 수 있는데, $\{\Gamma_\perp' \Delta z_t\}$와 함께 $\{T' \Delta z_{t-p}\}$도 적절한 도구변수가 된다. 이 때 T는 $T' \Gamma$를 비특이행렬로 만드는 $r \times l$ 행렬이다. 또한

$$(\Gamma_\perp' \Delta z_t, \Gamma' \Delta z_{t-p})$$

역시 (6.6)식에 등장하는 $\{\Delta z_t\}$의 도구변수로 이용할 수 있다.

위에서 살펴 본 $\{\Delta z_t\}$의 도구변수들로 선택된 변수들은 모두 도구변수로써 사용되기 전에 먼저 추정되어야 한다. 그러나 이들의 추정은 A와 Γ에 대한 일치추정량만 있으면 되므로 문제가 되지 않는다. 5절에서 논의한 것과 마찬가지로 A와 Γ의 일치추정량은 Engle and Granger(1987)에 의해 제시된 2단계 추정법에 의해 쉽게 구할 수 있다. 이들의 일치추정량을 구하는 과정에서 사전적으로 과다식별된 어떠한 제약도 부여할 필요는 없다. 이제 (6.6)식으로 주어진 개별방정식을 추정하기 위해 우리는 다음과 같은 도구변수를 이용하는 IV 추정법을 생각할 수 있다.

$$x_t^+ = (x_{t-1}', \Delta z_t' \Gamma_\perp, z_{t-1}' A, \Delta z_{t-1}', \ldots, \Delta z_{t-p+1}')$$

우리는 위에 제시된 도구변수를 사용한 α_i의 도구변수추정량을 $\hat{\alpha}_{iD2SLS}$로 표기하고 동태적 2SLS라고 부른다. 만약 우리가

$$z_{it}^{+} = (z_{it}', \Delta z_t', \ldots, \Delta z_{t-p+1}')$$

라고 하고, P_{X+}와 Z_i^{+}를 앞서와 같이 정의하면 $\hat{\alpha}_{iD2SLS}$는 다음과 같이 주어 진다.

$$\text{(6.7)} \qquad \hat{\alpha}_{iD2SLS} = S_i(Z_i^{+\prime} P_{X+} Z_i^{+})^{-1} Z_i^{+\prime} P_{X+} y_i$$

이 때 $S_i = (I_{r_i}, 0)$는 α_i 중 처음의 r_i-부분을 선택하는 행렬이다.

동태적 3SLS 추정량이라고 불리는 시스템도구변수추정량을 $\hat{\alpha}_{D3SLS}$라고 표기하면 이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{(6.8)} \qquad \hat{\alpha}_{D3SLS} = S(Z_+'(\hat{\Sigma}_*^{-1} \otimes P_{X+})Z_+)^{-1} Z_+'(\hat{\Sigma}_*^{-1} \otimes P_{X+})y$$

이 때

$$\hat{\Sigma}_* = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{v}_t \hat{v}_t'$$

이며, $\{\hat{v}_t\}$, $\hat{v}_t = (\hat{v}_{1t}', \ldots, \hat{v}_{lt}')'$는 시스템 오차항의 분산에 대한 D2SLS 추정치이고, $S = \mathrm{diag}(S_1, \ldots, S_l)$로 주어진 행렬이다.

이들 동태적 2SLS와 동태적 3SLS는 각각 6.1절에서 논의한 정태적 2SLS와 정태적 3SLS 추정량과 같이 가우스분포를 따르는 극한분포를 가진다. 오차수정모형에서 시계열 $\{\Delta x_t\}$의 오차수정계수가 0인 특별한 경우를 고찰 해 보자. 행렬 Γ을 다음과 같이 분할한 후

$$\Gamma = (\Gamma_1', \Gamma_2')'$$

$\Gamma_2 = 0$이라고 놓자. 이 경우 변수 $\{x_t\}$는 장기모수 A에 대해 Engle, Hendry and Richard(1983)의 의미에서 "약외생적"(weakly exogeneous)이라고 말할 수 있다. 이제 동태적 2SLS와 3SLS 추정법은 이 가정하에서 보다 간단해 진다. 즉, $\Gamma_2 = 0$이면

$$\Gamma_\perp' \Delta z_t = \Delta x_t \text{ 그리고 } \Gamma' \Delta z_{t-p} = \Delta y_{t-p}$$

이 되므로 다음의 변수들을

$$(\Delta x_t, \Delta y_{t-p})$$

$\{\Delta z_t\}$의 도구변수로 사용할 수 있게 되고 앞에서와 같이 A와 Γ의 추정이 불필요하게 된다. 더우기

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(x_t v_t') = 0$$

이므로, 변수 $\{x_{t-1}\}$뿐만 아니라 $\{x_t\}$도 i번째 방정식 (6.6)의 시계열 $\{x_{it}\}$에 대한 도구변수로 사용할 수 있다.

7. 極限分布(asymptotic distribution)

7.1. 完全情報 正最尤推定量(exact FIML)의 極限分布

구조형모형의 완전정보최우추정량(FIML)은 5.1절과 5.2절에서 논의한 CCR 변환추정에 근거한 SUR 추정방법으로 쉽게 구할 수 있다. 좀더 구체적으로 이를 살펴 보기 위하여, (5.4)식이나 (5.11)식에 의해 변환된 시계열 $\{z_t^*\}$을 사용하여 구조형 모형 (2.3)을

$$y_{it}^* = \alpha_i' z_{it}^* + v_{it} \tag{7.1}$$

로 적어 보자. 이 때 $i = 1, \cdots, l$이다. 앞에서 논의한 바와 같이 비모수적 접근방법의 경우에는 $\{z_{it}\}$의 변환은 불필요하므로 $z_{it}^* = z_{it}$이다.

이제 完全情報 正最尤推定量을 구하기 위하여, 6절에서처럼 도구변수 추정량을 구할 때와 같이 다음과 같은 행렬을 먼저 정의한다.

$$Z_* = \mathrm{diag}(Z_1^*, \ldots, Z_l^*)$$

diag는 블록대각행렬(block diagonal matrix)이며, $\{z_{it}^*\}$에 대한 행렬 Z_i^*는 i번째 블록대각행렬을 나타낸다.

또한

$$\alpha = (\alpha_1', \ldots, \alpha_l') \text{ 그리고 } y_* = (y_1^{*\prime}, \ldots, y_l^{*\prime})'$$

이라고 나타내면, α의 완전정보추정량(FIML) $\hat{\alpha}_{\mathrm{FIML}}$은

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{FIML}} = (Z_*'(\hat{\Omega}^{-1} \otimes I)Z_*)^{-1} Z_*'(\hat{\Omega}^{-1} \otimes I)y_*$$

로 되고, $\hat{\Omega}$는 $\{v_t\}$의 장기분산 Ω의 추정치를 나타낸다. 이 때 Ω의 일치추정량은 개별방정식의 추정으로부터 구한 잔차 $\{\hat{v}_{it}\}$들로부터 쉽게 구할 수 있다.

$\hat{\alpha}_{\mathrm{FIML}}$의 극한분포는 다음과 같이 주어진다.

定理 3 :

$$n(\hat{\alpha}_{\mathrm{FIML}} - \alpha) \xrightarrow{D} \int_{M>0} N(0, M) dM$$

이고,

$$M = l.i.d.\left(\frac{1}{n^2} Z'(\Omega^{-1} \otimes I)Z\right)^{-1}$$

이다.

만약 공적분 연립방정식 모형이 적도식별된다면, 연립방정식모형(SEM)에서처럼 구조형모형의 FIML 추정량은 축약형모형의 FIML 추정량으로부터 구한 간접최소자승추정량(ILS)과 일치한다.

7.2. 制限情報 正最尤推定量(exact LIML)의 極限分布

여러 식으로 이루어진 방정식체계에서 각 개별방정식을 추정하는 방법 중 제한정보최우추정량(LIML)이란, 추정하고자 하는 방정식을 제외한 나머지 방정식들이 적도식별되어 있다는 가정하에서, 개별방정식을 최우추정한 경우에 얻는 추정량을 말한다. 따라서 LIML 추정량을 구하기 위해 주어진 전방정식체계를

$$\begin{aligned} y_{1t}^* &= \alpha'_1 z_{1t}^* + v_{1t} \\ y_{2t}^* &= \Pi'_2 x_t^* + v_{2t} \end{aligned} \tag{7.2}$$

와 같이 두 부분으로 나누어 보자. 이 때 $z_{1t} = (y_{2t}^{(1)}, x'_{1t})'$ 이다. 여기서도 역시 모수적 접근방법을 따르는 경우에는 등호 오른편에 등장하는 변수들의 변환이 필요하지 않으므로 $z_{1t}^* = z_{1t}$이고 $x_t^* = x_t$이 된다.

우리는 앞 절에서 CCR 추정량이 점근적으로 최우추정량과 같게 됨을 보였으므로, 식 (7.2)의 첫번째 방정식에 대한 제한정보추정량(LIML)도 역시 (7.2)식을 시스템 일반자승

추정(system GLS)으로 구한 것과 같게 되고, 또한, 나머지 방정식들이 적도식별되므로, α_1의 시스템 일반자승추정은 첫번째 방정식에 대한 최소자승추정과도 동일하게 된다. 따라서, α_1에 대한 LIML 추정량 $\hat{\alpha}_{\text{LIML}}$은

$$\hat{\alpha}_{\text{LIML}} = (Z_1^{*\prime} Z_1^*)^{-1} Z_1^{*\prime} y_1^*$$

로 주어 진다. 비모수적 접근방법의 경우는 위에서 본 바와 같이 변형된 개별방정식 CCR 추정량이 바로 제한정보추정량이다. 따라서 LIML 추정량을 구하기 위해서 우리가 할 일은 먼저 1차 교정을 위해 서로 다른 m개의 확률추세를 가지는 외생변수를 찾아내는 일이다. 이러한 m개의 확률추세는 r개의 시계열로 구성되는 방정식체계내에 l개의 공적분이 존재한다는 본 논문의 가정에 의해 반드시 존재하게 된다. 이제 2차교정을 위해서 우리는 (5.4)식에 있는 $\{w_t\}$ 대신에 $\{w_{1t}\}$를 사용할 수 있는데, 이 때 $w_{1t} = (u'_{1t}, \Delta x'_t)'$ 이다. 만약 첫번째 방정식이 적도식별된다면 이 방정식의 오른쪽에 존재하는 변수의 갯수 m_1은 m개가 되고, 따라서 1차 교정용으로 선택해 둔 m개의 서로 다른 시계열을 자연스럽게 사용할 수 있게 된다. 이 경우 개별방정식 CCR 추정량은 제한정보추정량(LIML)과 같게 되고 이는 다시 완전정보추정량(FIML)과 같게 된다.

오차수정모형 (4.2)를 가정하는 모수적 접근방법에서는 제한정보추정량의 계산이 비모수적 접근방법과 비교하여 그다지 간단하지 않다. 변수의 외생성에 관한 추가의 가정을 하지 않는 한, 우리는 (7.2)에 근거한 모수적 정준공적분회귀를 수행하기 위해서는 오차수정모형전체를 추정하거나 또는 임의적인 식별제약조건에 의해 적도식별된 $(l - 1)$개의 방정식들과 첫번째 방정식으로 구성된, 관측상 동일한(observationally equivalent) 방정식체계를 만든 후 모수적 정준공적분회귀를 추정하여야 한다. 따라서 모수적 접근방법의 경우 제한정보추정량(LIML)의 계산은 실제적으로 완전정보추정량(FIML)을 추정하는 데 들어가는 만큼의 계산상 부담을 요구한다. 또한 제한정보 정최우추정량(exact LIML)을 구하기 위해서는 수렴할 때까지 이러한 추정을 반복하여야 한다. 만약 수렴할 때까지 반복추정을 계속 수행한다면, 이 추정량을 구하기 위해 나머지 방정식에 임의로 부여하는 식별제약은 추정값에 아무런 영향을 미치지 않는다. 더우기 반복추정을 한 번만 한다고 하더라도, 식별을 위해 어느 변수를 선택하였는가는 점근적으로 중요하지 않다.

개별방정식에 대한 LIML 추정량 $\hat{\alpha}_{\text{LIML}}$의 극한분포는

定理 4 :

$$n(\hat{\alpha}_{\text{FIML}} - \alpha_1) \xrightarrow{D} \int_{M_1>0} N(0, w_{11}M_1)dM_1$$

로 주어 지고,

$$M_1 = l.i.d.\left(\frac{1}{n^2} Z_1' Z_1\right)^{-1}$$

이며, ω_{11}는 (4.7)식의 Ω의 첫번째 대각원소이다.

이제 정리 3과 4의 결과를 서로 비교해 보자. 방정식체계에 포함된 다른 방정식들이 적도식별되는 경우 LIML 추정량은, 잘 알려진 바와 같이 FIML 추정량과 동일한 극한분포를 가진다. 그리고, 연립방정식모형에서와 마찬가지로 FIML 추정량이 개별방정식 LIML 추정량보다 더 효율적인 경우는 $\omega_{1i} \neq 0$이어서 i번째 방정식이 과도식별되는 경우일 때이다.

7.3. 道具變數推定量(IV estimator)의 極限分布

전체방정식을 동시에 추정하기 위해서 우리는 다음의 $\alpha = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)'$ 에 대한 정태적 3SLS를 $\hat{\alpha}_{\text{S3SLS}}$라고 하고,

$$y = (y'_1, \ldots, y'_l)'$$
$$Z = \text{diag}(Z_1, \ldots, Z_l)$$

로 표기하면,

$$\hat{\alpha}_{\text{S3SLS}} = (Z'(\hat{\Omega}_*^{-1} \otimes P_X)Z)^{-1} Z'(\hat{\Sigma}_0^{-1} \otimes P_X)y \tag{7.3}$$

가 된다. 또한 오차항의 분산은

$$\hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_t'$$

로 주어 진다. 위 식에서 $\{\hat{u}_t\}$는 2SLS로부터 구한 잔차항들을 나타낸다.

정태적 2SLS와 정태적 3SLS 추정량의 극한분포는 다음 정리에 나타나 있다.

定理 5 :

$$n(\hat{\alpha}_{2SLS} - \alpha_i) \xrightarrow{D} \int_M N(0, V_i) dM$$
$$n(\hat{\alpha}_{3SLS} - \alpha) \xrightarrow{D} \int_M N(0, V) dM$$

이 때

$$V_i = \omega_{ii}^{*} (H_i' \int_0^1 MM' H_i)^{-1}$$
$$V = (H'(\Omega_*^{-1} \otimes \int_0^1 MM')H)^{-1}$$

이고, M은 Ω_{22}의 분산을 가진 브라운운동과정(Brownian motion)이다.

S3SLS와 S2SLS를 비교하기 위해서, 변환된 모든 개별방정식에 대하여 2단계 최소자승추정방법을 적용하여 구한 α의 정태적 2SLS를 $\hat{\alpha}_{S2SLS}$라고 하자. 그러면 다음과 같은 따름정리를 얻는다.

따름 定理 6 :

$$\text{avar}(\hat{\alpha}_{3SLS}) \leq \text{avar}(\hat{\alpha}_{2SLS})$$

따름정리에서 보는 바와 같이 공적분 연립방정식모형에서 S3SLS의 상대적 효율성은 통상적인 연립방정식모형에서의 논의와 동일하다. 방정식체계내의 다른 식들이 과다식별되어 있고 오차항들이 서로 관련을 가지고 있는 경우 3SLS 추정량은 2SLS 추정량보다 훨씬 더 효율적이다.

8. 個別方程式推定과 全體方程式推定과의 比較

마지막으로 이 절에서는 개별공적분회귀식의 추정과 전체방정식 추정을 비교하여 본다. 이 절의 논의를 간단히 하기 위하여 개별방정식으로 이루어진 축약형 모형을 고려한다.

이제 전체공적분체계에서 첫번째 방정식을 다음과 같이 표기하자.

(8.1) $$y_{1t} = \pi'_1 x_{1t} + u_{1t}$$

이 때 $x_t = (x'_{1t}, x'_{2t})'$ 이다.

(8.2) $$w_{1t} = (u'_{1t}, \Delta x'_{1t}, \Delta x'_{2t})'$$

$\{w_{1t}\}$의 장기분산행렬 Ω_1을 다음과 같이 분할한다.

(8.3) $$\Omega_1 = \begin{pmatrix} w_{11}^0 & w_{1a} & w_{1b} \\ w_{a1} & \Omega_{aa} & \Omega_{ab} \\ w_{b1} & \Omega_{ba} & \Omega_{bb} \end{pmatrix}$$

식 (8.1)로 주어진 개별방정식의 비모수적 최우추정량은 다음과 같은 극한분포를 가진다.

따름 定理 7 :

$$n(\hat{\pi}_1 - \pi_1) \xrightarrow{D} \int_{Q_1>0} N(0, w^2 Q_1) dQ_1$$

이 때,

$$w^2 = w_{11}^0 - w_{1a}\Omega_{aa}^{-1} w_{a1}$$

이며,

$$Q_1 = l.i.d.\left(\frac{1}{n^2} X_1' X_1\right)^{-1}$$

으로 주어진다.

따름 정리 6으로부터 알 수 있듯이 개별방정식에 대한 최우추정량과 LIML의 극한분포를 비교하면 일반적으로 전자가 비효율적이다. 이는

$$w^2 \geq w_{11}$$

이며, w_{11}는 식 (4.3)에 주어진 Ω의 첫번째 대각행렬원소이며 다음 식으로 표현되기 때문이다.

(8.4) $$w_{11} = w_{11}^0 - w_{1c}\Omega_{cc}^{-1} w_{c1}$$

여기서 하첨자 c는 (8.3)식에 있는 a와 b를 아울러서 쓴 것이다.

그러나 개별방정식 추정이 전체방정식 추정과 동일한 결과를 낳는 두 가지 특별한 경우

가 있는데, 그 하나가 첫번째 방정식이 적도식별되어 $m_1 = m$인 경우이다. 이 때 개별방정식추정량은 LIML 추정량과 같은 결과를 초래하고 또한 이 방정식체계가 적도식별되는 경우에는 FIML 추정량이 된다. 따라서 Phillips(1990, 1991)와 Johansen(1988, 1990)이 제시한 연립공적분 추정이 Park(1992)의 개별방정식 추정량보다 더 나은 결과를 초래하지 않는 것은 이 때문이다. 두번째 경우는 추정하고자 하는 방정식이 과다식별되는 경우라도 그 방정식에 포함되지 않은 변수가 포함된 변수와 점근적으로 상관관계를 가지고 있지 않으면 이 때에도 개별방정식 추정은 FIML 추정과 같은 결과를 가져다 준다. 위에서 논의한 두 가지 경우는 모두 (8.4)식에서 $w^2 = w_{11}$인 경우에 해당한다.

지금까지의 논의는 물론 모수적 접근방법에서도 성립하지만, 특별히 유한 개의 시차를 가지는 벡터자기회귀로써의 부분 방정식 체계에 대한 설정이 바르게 되어야 한다. 만약 이것이 VAR의 부분체계내에서 정당화되어질 수 없다면 하부방정식체계의 추정은 비효율적일 뿐만 아니라 점근적으로 偏倚를 가지며 비표준적인 분포를 가진다. 그러나 이것은 장기공적분벡터의 추정과 관련이 있기보다는 오히려 동학적 단기모수의 설정과 보다 더 밀접한 관련을 가진다.

9. 結　論

지금까지 우리는 연립공적분방정식 체계를 추정하기 위한 최우추정법에 대하여 공부하였다. 공적분체계에 대한 완전정보최우추정법과 단일공적분회귀식을 위한 제한정보최우추정법을 모수적, 비모수적 모형에 대하여 각각 개발하였으며, 이들을 경제체계의 장기균형을 실증연구하는 데 사용할 수 있다.

우리는 임의의 적도식별 또는 과도식별 제약이 주어진 구조형 방정식 체계를 명시적으로 다루고 있는데, 이것은 축약형 모형이나 식별되지 않는 구조형 모형만을 다루어 왔던 기존의 연구와 크게 대조되는 점이다. 통상의 고전적 연립방정식 모형에서와 같은 이유에서, 공적분 연립방정식 모형에 대한 사전적 식별이, 모형의 구조적 해석을 위해 당연히 필요하며, 이는 또한 오차수정모형의 식별을 위해서도 필요하다. 더우기 경제이론에 대한 가설검정은 추정대상이 되는 연립방정식 체계를 식별할 수 있는 충분한 수의 제약조건이 존재함을 미리 가정하고 있다. CCR에 근거한 추정방법은 기존의 추정방법에 의하여 분석가능한 모형이라고 할지라도 훨씬 사용하기가 쉬운 방법을 제공해 준다. 이미 주지하다시피 CCR은 회귀식이므로, 가설을 세워서 이를 검정하는 것이 무척 간단하게 된다.

Wald 검정, 우도비 검정 또는 LM 검정과 같은 어떤 종류의 표준적인 검정도 분석하고자 하는 문제가 무엇이냐에 따라 쉽게 적용할 수 있다. 더우기 공적분 연립방정식모형에 대한 최우추정을 CCR로 구성한 것은 직접 해결하기가 어려웠던 많은 이론적인 중요한 문제들에 즉각적인 해답을 제공해 준다. 또한 CCR에 대한 해석은 공적분 연립방정식모형 이론의 거의 모든 부분이 전통적인 연립방정식 모형의 통계이론과 동일함을 분명하게 보여 준다.

본 논문에서 아직 연구되지 않은 중요한 문제는 공적분 연립방정식모형설정의 적정성을 어떻게 검정할 수 있는가에 대한 것이다. 이것은 크게는 모형선택의 문제인데, 지금껏 가장 우월하다고 할 수 있는 방법이 존재하지 않으며 앞으로도 그러한 방법은 존재하지 않을 것이다.

공적분의 존재를 검정하는 기존의 많은 검정방법들이 각 방정식 하나하나마다 각각 적용되어 질 수 있다. 여기에서 강조할 중요한 점은, 경제적으로 의미있게 식별되는 모형인가를 검정하기 위한, 이러한 방법들이 분명히 선호된다는 점이다. 공적분 벡터의 갯수를 검정하는 방법들도 공적분모형의 설정문제를 다루는 초기단계에서 매우 훌륭한 정보를 제공하여 준다. 그러나, 이러한 검정방법들은 어떤 특정한 형태로 식별된 공적분 연립방정식모형의 적정성에 대하여 그다지 많은 것을 이야기하고 있지 않고 있는 것 같다. Park, Ouliaris and Choi(1988)에 의해 개발되어진 변수추가방법에 의한 공적분검정은 보다 직접적으로 공적분 연립방정식모형설정에 대한 검정으로 쉽게 확장되어 질 수 있다.

서울大學校 經濟學部 副教授
151-742 서울 관악구 신림동
전화: (02)880-6393
팩시: (02)888-4454

서울大學校 經濟研究所 特別研究員
151-742 서울 관악구 신림동
전화: (02)880-5434
팩시: (02)888-4454

〈附 錄〉

補助定理 1의 證明 : 식 (4.2)에 주어진 시차다항식 $\Gamma(z)$을

$$\Gamma(z) = (\Gamma_1(z), \Gamma_2(z))$$

와 같이 식 (2.2)의 $\{z_t\}$에 대응하여 분할하자. 또한

$$F(z) = \Gamma_1(z)\Pi' + \Gamma_2(z)$$

의 관계식을 얻을 수 있다. 이 때 Π는 식 (2.4)의 축약형 계수이다. 위의 식을 이용하여

$$\varepsilon_t = (A, F(L))w_t + (\Gamma_1(L) - A)\Delta u_t \tag{A.1}$$

를 구할 수 있으며 $\{\varepsilon_t\}$는 식 (4.2)의 ECM 오차항이고, $\{w_t\}$는 식 (4.1)에서 볼 수 있다.

이제 식 (A.1)의 양변에 대하여 장기분산을 구하면

$$\Sigma_0 = G\Omega_0 G'$$

로 주어진다. 이 때 Ω_0와 Σ_0는 각각 식 (4.3)과 (4.4)에 주어져 있고,

$$G = (A, F(1)) \tag{A.2}$$

이다. 따라서 우리는 다음의

$$A'\Sigma_0^{-1}A = A'G'^{-1}\Omega_0^{-1}G^{-1}A \tag{A.3}$$

식을 얻을 수 있고, 식 (A.2)으로부터

$$G^{-1}A = I_1$$

의 관계를 유추할 수 있다. 이 때 $I_1 = (I_{l\times l}, 0)$이다. 이제 보조정리 1의 결과는 식 (A.3)로부터 쉽게 이끌어 낼 수 있는데, 이는

$$\Omega_{11\cdot 2} = (I_1'\Omega_0^{-1}I_1)^{-1}$$

의 관계를 이용하면 된다. ■

定理 2의 證明 : $J'_cA = 0$인 $r \times m$ 행렬인 J_c을 새로 정의하자. 또한

$$\Phi_c(z) = J'_c\Gamma(z)$$

이제 우리는 ECM (4.2)을 다음과 같은 두 하부시스템으로

$$\Phi(L)\Delta z_t = -B' z_{t-1} + J' \varepsilon_t$$
$$\Phi_c\Delta z_t = J'_c\varepsilon_t$$

나눈다. 이 때 J와 $\Phi(z)$는 각각 식 (5.8)과 (5.9)에 주어져 있다. 두 서브시스템의 교란항인 $\{J' \varepsilon_t\}$와 $\{J'_c\varepsilon_t\}$는

(A.4) $$J'_c\Sigma_0 J = 0$$

의 관계로부터 서로 통계학적으로 독립임을 알 수 있다. 더우기 두번째 하부조직은 A를 포함하지 않으므로 A에 대한 전체시스템의 우도함수를 극대화하는 것은 첫번째 하부시스템의 우도함수만을 극대화하는 것과 동일하다. 만약 $\Phi(z)$이 알려져 있다면, 첫번째 하부시스템의 최우추정량은 정리 3에 주어진 회귀식에 대한 일반최소자승추정량(GLS)과 같다. 따라서 증명이 완결된다. ■

定理 3의 證明 : 통계적으로 외생적인 설명변수가 포함된 공적분 회귀모형에 대한 Park and Phillips (1988)의 결과로부터, 다음을 보이기만 하면 된다.

1. $\{w^*_{it}\}$와 $\{v_t\}$는 통계적으로 독립이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E(w^*_{it}v'_t) = 0$$

또한

2. $\{\Delta w^*_{it}\}$와 $\{v_t\}$는 점근적으로 독립이다.

비모수적인 접근방법에 대해서는 위의 두 조건이 항상 만족된다.

위의 결과를 모수적 CCR에 대하여 증명하기 위해서

$$\Delta z_t = \Upsilon(L)\varepsilon_t$$

와

$$\Upsilon = \Upsilon(1)$$

를 정의하자. $v_t = J'\varepsilon_{t+1}$이므로 첫번째 결과가 만족됨을 알 수 있다. 더우기 Johansen(1987)과 Park(1990)에서 보여준 것처럼 $\Upsilon A = 0$이므로

(A.5) $$\Upsilon\Sigma_0 J = 0$$

의 결과를 얻을 수 있다. 따라서 교란항 $\{v_t\}$는 점근적으로 $\{\Delta z_t\}$와 독립적이며 특히 모든 i의 $\{\Delta w_{it}\}$에 대해서도 통계적으로 독립이다. 이로써 증명이 완성된다. ■

參考文獻

Andrews, D.W.K. (1991a): "Asymptotic Normality of Series Estimators for Nonparametric and Semiparametric Regression Models," *Econometrica*, **59,** 307-345.

_____(1991b): "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation," *Econometrica*, **59,** 817-858.

Engle, R.F., and C.W.J. Granger (1987): "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing," *Econometrica*, **55,** 251-276.

Engle, R.F., D.F. Hendry, and J.F. Richard (1983): "Exogeneity," *Econometrica*, 277-304.

Hausman, J.A. (1983): "Specification and Estimation of Simultaneous Models," in Z. Griliches and M.D. Intriligator (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 1, North-Holland.

Johansen, S. (1988): "Statistical Analysis of Cointegrating Vectors," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12,** 231-254.

_____(1991): "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models," *Econometrica*, **59,** 1151-1580.

_____(1992): "Cointegration in Partial Systems and the Efficiency of Single Equation Analysis," *Journal of Econometrics*, **52,** 389-402.

Johansen, S., and K. Juselius (1992): "Structural Tests in a Multivariate Cointegration Analysis of the PPP and the Uncovered Interest Parity for UK," *Journal of Econometrics*, **53,** 211-244.

_____(1994): "Identification of the Longrun and Shortrun Structure: An Application to the IS-LM Model," *Journal of Econometrics*, **63,** 7-36.

Park, and Hahn (1995): "Cointegrating Regression with Time Varying Parameters," manuscript.

Park, J.Y. (1991): "Maximum Likelihood Estimation of Simultaneous Cointegrated Models," mimeograph, University of Aarhus.

_____(1992): "Canonical Cointegrating Regressions," *Econometrica*, **60,** 119-143.

Park, J.Y., and M. Ogaki (1991): "Seemingly Unrelated Canonical Cointegrating Regressions," mimeograph, Cornell University.

Park, J.Y., and P.C.B. Phillips (1988): "Statistical Inference in Regressions with Integrated Processes: Part 1," *Econometric Theory*, **4,** 468-497.

_____(1989): "Statistical Inference in Regressions with Integrated Processes: Part 2," *Econometric Theory*, **5,** 95-131.

Phillips, P.C.B. (1991a): "Spectral Regression for Cointegrated Time Series," in W. Barnet (ed.), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Economics and Statistics*, New York, Cambridge University Press.

_____(1991b): "Optimal Inference in Cointegrated Systems," *Econometrica*, **59,** 283-306.

Phillips, P.C.B., and B. Hansen (1990): "Statistical Inference in Instrumental Variables Regression with I (1) Processes," *Review of Economic Studies*, **53,** 473-495.

Stock, J.H., and M.W. Watson (1988): "Testing for Common Trends," *Journal of the American Statistical Association*, **83.** 1097-1107.