

國債發行에 있어서 複數價格과 單一價格 競賣方式 間의 競賣收入 比較

金敬錄 · 柳根寬 · 吳星煥

우리 나라의 국채발행시장은 1999년 9월에 완전경쟁입찰을 도입하였다. 경매방식으로는 복수가격 경매방식을 사용해 오다가 2000년 8월부터 단일가격 경매방식으로 전환하였다. 본 논문은 微視的 入札 資料와 總量 資料 모두를 사용하여 우리 나라 국채경매에서 단일가격경매 방식을 사용하는 것이 복수가격경매 방식을 사용하는 것보다 경매인의 경매수입을 증가시키는지 실증적으로 분석하였다. 분석결과 단일가격 방식이 복수가격 방식보다 경매인의 수입을 증가시키는 것으로 나타났다.

1. 머리말

Friedman(1960)이 複數價格 경매방식보다 單一價格 경매방식이 경매인의 競賣收入을 오히려 증가시킬 수 있다고 주장한 이래, 많은 경제학자들은 과연 그러한지를 놓고 논쟁을 해 왔다. 먼저, 入札市場 자체만을 분석한 연구로는 Milgrom and Weber(1982), Bikchandani and Huang(1989, 1993), Chari and Weber(1992) 등이 있다. Wilson(1979), Back and Zender(1993), Wang and Zender(1996) 등은 상품의 분할가능성 가정을 도입하여 기존의 競賣理論을 확장하였다. Bikchandani and Huang(1989)의 연구에 따르면 시장 지배력이 있는 응찰자는 유통시장에 신호를 주기 위하여 높은 가격으로 응찰할 수가 있는데, 단일가격 방식은 이러한 신호 전달에 비용이 소요되지 않으므로 응찰자들에게 큰 부담 없이 적극적으로 경매에 참여할 유인을 제공한다. 한편 Chatterjea and Jarrow(1998)는 발행전 시장과 발행시장을 연계하여 시장지배적 응찰자의 응찰행태를 분석했다.

그러나 많은 논의에도 불구하고 競賣收入에 관해 이론적으로 결론이 나지 않자 실증분석에 많은 노력이 경주되어 왔는데 이들 實證分析은 대체로 다음 두 방향으로 이루어졌다. 먼저, 대부분의 실증연구들은 여러 국가들이 일정기간 동안 단일가격 방식과 복수가격 방식을 교차실험 하였음에 착안하여 각 경매방식에서의 경매수입을 직접적으로 비교하였다.

Umlauf(1993)는 경매된 국채가 유통시장에서 팔리는 가격을 이용하여, 멕시코의 경우

복수가격 경매방식에서 단일가격 경매방식으로 전환함에 따라 경매수입이 소폭 증가되었음을 보였다. 반면 Simon(1994)은 1970년대 미국의 경우 복수가격 경매방식에서 단일가격 경매방식으로 전환한 결과 경매수입이 오히려 줄었음을 발견했다. 한편 Nyborg and Sundaresan(1996)과 Malvey and Archibald(1998)는 1990년대 미국의 경우 발행전 시장의 채권금리를 이용한 경매스프레드(낙찰금리 - 발행전 금리)를 사용하여 단일가격 경매방식이 경매수입면에서 나은 것으로 보고했다.

이들 실증분석의 공통점은 입찰자들이 생각하는 국채금리에 대한 참값이 발행전 시장의 채권금리 또는 유통시장 금리와 같다고 가정하는 것이다. 이 경우 경매낙찰금리와 발행전 시장 또는 유통시장 거래금리의 차이가 경매방식에 따른 경매인의 경매수입을 결정하게 된다. 그러나 이러한 실증분석 방법은 정책적으로 두 가지의 국채 경매방식을 실험한 나라에만 적용할 수 있다는 단점을 가지고 있다. 또한 이 방법은 낙찰금리와 발행금리 등 總量資料만을 이용함으로써 각 입찰자들의 입찰행동 자료에 근거한 微視的 分析이 아니라는 한계가 있다.

두 번째로, 하나의 경매방식만을 사용한 경우에 대한 실증분석을 시도한 연구들이 있다. 구체적으로 複數價格 競賣方式의 입찰자료만을 가지고 있을 때 이를 이용해 가상의 單一價格 競賣方式의 입찰자료를 이론적 모형으로부터 도출하여 두 경매방식 간 경매수입을 비교하는 것이다. Nautz(1995)가 이 같은 접근 방식을 위한 이론적인 모형을 최초로 제시하였다. Heller and Lengwiler(1998)는 이 모형을 이용해 스위스 국채시장을 분석하였는데, 스위스의 경우 단일가격방식이 경매수입을 증가시킴을 보였다.

본 연구는 개별적이고 微視的인 入札資料와 정책적 실험에 따른 總量資料 등 두 자료 모두를 사용한다. 구체적으로 먼저 복수가격 경매방식의 입찰자료를 이용하여 선형화된 수요곡선을 추정한다. 그런 다음 추정된 수요곡선이 단일가격 경매방식이 채택된 경우 어느 정도 이동하여야 단일가격 경매방식의 경매수입이 많아지는지를 이론적으로 도출한다. 이와 함께 단일가격 경매방식을 채택함에 따라 실제로 수요곡선이 어느 정도 이동했는지를 실증적으로 추정한다. 끝으로 이론적으로 요구되는 이동폭과 실제 이동폭을 비교함으로써 어떤 경매방식이 경매수입에 있어 우위를 차지하는가를 살펴볼 것이다.

일반적으로 정책실험에 따라 두 경매방식 하에서 얻어진 자료를 직접 비교분석하면 분석결과가 자의적인 이론적 모형에 의존하지 않는다는 장점이 있는 반면에, 시기별로 금리의 변화나 기타 정책적 변화 등 外生的 要因을 감안하지 못하는 단점도 있다.⁽¹⁾ 한편

(1) 분석자료의 대상 구간이 금리가 계속 하락하거나 계속 상승하는 거시적 국면일 경우 외생적

理論的인 模型에 근거한 분석은 외생적 정책 변화들이 미칠 수 있는 영향을 배제한다는 장점이 있는 반면 競매모형에 상정된 몇 가지 요인만을 감안하기 때문에 戰略的 要因 등 競매수입에 영향을 미치는 다른 요인들을 감안할 수 없다. 따라서 이들 두 방법은 각기 장단점이 있기 때문에 모두 적용해 볼 가치가 있다. 이때 두 방법 간 실증분석결과가 일치한다면 두 競매방식에서의 競매수입에 대한 분석결과는 믿을 만한 것이라고 할 수 있다.

아래 2장에서는 실증분석을 위한 理論 模型을 소개하고 3장에서는 競賣方式의 차이에 따른 競賣收入을 실제로 비교하고자 한다. 마지막으로 4장에서 研究結果를 요약하고 示唆點을 제시할 것이다.

2. 競賣模型

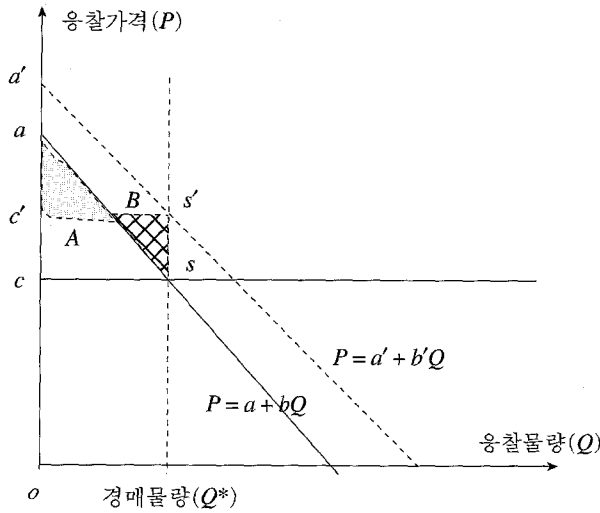
이 장에서는 競賣收入에 관한 실증분석을 위해 간단한 競賣模型을 설정해 분석하기로 한다. 먼저 線形 需要曲線을 가정하고 競매방식이 복수가격 방식으로부터 단일가격 방식으로 바뀔 때 따라 수요곡선이 어느 정도 이동해야 복수가격에 비해 단일가격 競매방식이 競매수입면에서 유리해지는지를 알아본다. 이 방법은 실제로 두 競매방식을 다 사용해본 국가에만 적용될 수 있다.

두 번째 방법은 첫 번째 방법과는 달리 실증분석을 위해서 단일가격 競매방식하의 競매 자료가 필요 없으며, 複數價格 競賣方式의 입찰자료만 있으면 된다. 이 방법은 Nautz(1995)와 Lengwiler(1998)의 非戰略的 競賣模型에 입각하여 복수가격 競매방식하의 최고낙찰금리와 입찰자료로부터 단일가격 競매 방식하의 수요곡선을 도출하며, 이를 복수가격 競매방식에서의 수요곡선과 비교하여 競매방식 차이에 따른 競매수입을 비교한다. 이 방법을 사용하는 경우 수요함수에 선형이라는 제약이 없을 필요가 없다.

2.1. 線形模型

단일가격 방식에서와 복수가격 방식에서의 競매수입을 비교하기 위한 손쉬운 방법은 간단한 線形模型을 상정하여 분석하는 것이다. <그림 1>에서와 같이 복수가격 방식에서 단일가격 방식으로 바뀌었을 때 입찰수요가 증가하여 需要曲線이 우상향으로 이동했다고 가정해 보자. 복수가격 방식을 사용할 때 競賣人의 收入은 사다리꼴 asQ^*o 의 면적이 된

요인으로 인해 競매제도 변경으로 인한 직접적인 효과가 왜곡될 수 있다. 뿐만 아니라 競매제도 변경이 일어난 초기에는 競매참가자들이 競매 제도의 변경에 따른 競매환경을 충분히 이해하지 못하고 있어 점차 이를 배워 나가는 일종의 학습효과가 나타나게 되는데 이러한 학습효과에 의한 왜곡도 무시할 수 없다.



〈그림 1〉 複數價格과 單一價格 競賣方式의 競賣收入 比較

다. 따라서 소비자 잉여인 삼각형 asc 에 해당하는 부분은 경매인에게 귀착된다. 반면 단일가격 방식을 사용해 수요곡선이 $P = a + bQ$ 에서 $P = a' + b'Q$ 로 이동할 경우 경매인의 수입은 $c's'Q^*$ 의 면적이 된다. 이때 경매인이 삼각형 $d'c's'$ 에 해당하는 소비자 잉여는 가져갈 수 없으나 수요곡선의 이동으로 인한 낙찰가격의 상승으로 수입이 늘어나는 혜택을 누리게 된다. 결국 두 경매방식 간 경매수입의 비교문제는 사라지는 消費者 剩餘 asc 와 수입의 증가분인 $c's'sc$ 의 크기를 비교하는 것으로 귀결된다.

두 경매방식 간 경매수입을 수식으로 비교하기 위해 S_m 을 複數價格 방식의 競賣收入, 그리고 S_s 를 單一價格 방식의 競賣收入이라고 하자. 이들의 차이 $S_m - S_s$ 는

$$S_m = \frac{(2a + bQ^*)Q^*}{2}$$

$$S_s = (a' + b'Q^*)Q^*$$

$$S_m - S_s = \left[\frac{(2a - 2a') + (b - 2b')Q^*}{2} \right] Q^*$$

로 계산된다.

여기서 경매방식이 바뀌더라도 기울기는 변하지 않는다($b = b'$)고 가정하면 $S_m - S_s$ 가 양(+)의 값을 취할 조건은 $a' - a < -\frac{b}{2} Q^*$ 가 된다.

절편의 차이를 $\Delta a = a' - a$ 로 정의하면 위의 조건은 $\Delta a \leq \frac{|b|}{2} Q^*$ 와 같이 표현된다. 좌변의 Δa 는 복수가격경매 방식에 따른 저가입찰(bid shading)의 정도를 나타내는 것으로 볼 수 있다. 이는 복수가격 방식하에서의 勝者의 不運(winner's curse) 정도와 情報蒐集費用의 크기에 따라 결정되는데 승자의 불운이 클수록, 정보수집비용이 클수록 수요곡선의 이동폭 Δa 는 커지게 된다.

이상의 분석은 경매방식이 바뀌더라도 수요곡선의 기울기가 변하지 않는다는 가정에 입각하고 있는데, 실제로 경매방식이 바뀌면 수요곡선의 절편뿐만 아니라 그 기울기도 달라질 수 있다.

2.2. 假想 入札函數(counter-factual bidding function)

앞서의 경매모형 분석은 동일한 경매수입을 얻기 위해서는 선형 수요곡선이 얼마나 이동해야 하는가를 살펴본 것이다. 이같은 분석은 두 경매 방식 하에서 얻어진 자료가 모두 있어 수요곡선의 이동폭을 측정할 수 있을 때에만 유용하다. 이 접근 방식은 이러한 자료상의 제약뿐만 아니라 수요곡선의 비선형성이 강할 경우 선형 근사의 오차가 커진다는 약점을 가지고 있다.

이 절에서는 복수가격 경매방식에서의 실제 입찰자료를 이용하여 단일가격 방식의 가상적 입찰자료를 도출하는 방법을 소개하고자 한다. 일반적으로 國債競賣는 경매물건이 사실상 복수이므로 複數競賣物件을 상정해서 분석해야한다. 반면 國債競賣에서 경매인은 경매 전에 정해진 일정한 물량만 경매에 붙이고 입찰과정에서는 전략적으로 개입하지 않기 때문에, 응찰자와 경매인 간 戰略的 게임은 사실상 없다. 우리 나라 國債競賣市場의 경우 응찰자들은 그 수가 충분히 많으면서 동질적이므로 낙찰가격의 분포를 주어진 것으로 보고 행동한다고 가정할 수 있다.⁽²⁾ 따라서 응찰자들의 문제는 다음과 같은 期待(效用 極大化)이며 응찰자들 간 전략적 게임은 존재하지 않는다고 보아도 무방하다.

일반적으로 응찰자들의 목적함수는 다음과 같다.

$$U_i = fV_i - c$$

위에서 U_i 는 응찰자 i 의 기대수입이고 f 는 낙찰확률, V_i 는 응찰자 i 가 생각하는 경매물

(2) 분석대상 기간 중 國債발행시장에서의 경매에는 24개의 國債전문딜러와 6개의 예비딜러 등 총 30개의 기관이 참여할 수 있다. 이들은 입찰량, 낙찰량 등에서 비교적 동질적이다. 2004년 3월 國債전문딜러와 예비전문딜러의 수는 각각 20개, 3개로 줄었다.

건의 가치이고 c 는 입찰과정에서의 기대비용이다. 가격 벡터를 $P=(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k)$ 로 정의하자. 여기서 $0 < p_1 < \dots < p_j < \dots < p_k$ 이다. 응찰자 i 의 입찰함수를 $b_i: P \rightarrow R_+$ 라고 하면 총입찰 함수는 $B(p) = \sum_i b_i(p)$ 가 된다. 복수가격 경매방식하에서 응찰자들이 제시한 가격은 진정한 선호를 반영하지 못하게 된다. 여기서 d_i 를 응찰자 i 의 진정한 선호를 반영하는 입찰함수라 하면 응찰자들의 진정한 선호를 나타내는 總需要函數는 $D(p) = \sum_i d_i(p)$ 가 된다.

한편 π 를 最高落札金利, $B(\pi)$ 를 落札量이라고 하자. 경매인은 원하는 물량이 모두 소화되는 수준에서 최고낙찰금리를 결정하게 된다. 입찰자들은 사전적으로 최고낙찰금리를 알 수 없다. 다만 최고낙찰금리의 불확실성을 나타내는 분포함수는 $F(\cdot)$ 로 주어진 것으로 받아들인다고 하자. 즉, $F(\cdot)$ 는 경매인과 모든 응찰자들에게 하나의 共通知識 (common knowledge)이 된다. $F(\cdot)$ 에 따르면 최고낙찰금리가 p_1, p_2, \dots, p_k 로 결정될 확률은 $f(p_1) = F(p_1), f(p_j) = F(p_j) - F(p_{j-1})$ 이 된다($j=2, \dots, k$).

2.2.1. 複數價格 競賣方式

Heller and Lengwiler(1998)의 모형에 따르면 응찰자들은 복수가격 경매방식에서 자신의 진정한 선호를 숨김으로써 경매자에게 귀착되는 소비자 잉여를 줄이고 응찰자 자신의 수입을 증대시킬 수 있다.

응찰자 i 의 기대수입은 아래와 같다.

$$\sum_{j=1}^k f(p_j) \left[\int_0^{b_i(p_j)} d_i^{-1}(q) dq - \sum_{j=j}^k p_j (b_i(p_j) - b_i(p_{j+1})) \right]$$

각 응찰자들의 기대수입을 극대화하는 최적 입찰함수를 구하기 위해 일계 조건을 구하면 다음과 같다.

$j=1$ 일 때

$$f(p_1)(d_i^{-1}(b_i(p_1)) - p_1) = 0$$

즉, $b_i(p_1) = d_i(p_1)$ 이다.

$j=2, \dots, k$ 에 대해서는

$$f(p_j)(d_i^{-1}(b_i(p_j)) - [p_j \sum_{f \leq j} f(p_f) - p_{j-1} \sum_{f \leq j-1} f(p_f)]) = 0$$

이 성립하여야 한다. 이들 식을 다시 정리하면

$$(2.1) \quad b_i(p_j) = d_i[p_j + (p_j - p_{j-1}) \frac{F(p_{j-1})}{f(p_j)}]$$

을 얻는다. 일제조건을 보면, 먼저 복수가격 경매방식에서 응찰자들은 자신의 진정한 선호를 숨기고 단일가격 방식에 비해 자신이 생각한 가격보다 낮은 가격으로, 이를 달리 말하면 주어진 가격에서 보다 적은 수량으로 입찰에 응하는(shading) 것을 알 수 있다.

이는 식 (2.1)에서 $(p_j - p_{j-1}) \frac{F(p_{j-1})}{f(p_j)} > 0$ 이고 d_i 가 감소함수이므로, $b_i(p_j) < d_i(p_j)$ 의 관계가 성립하기 때문이다.

둘째, 자신의 선호를 낮게 나타내는 정도는 落札價格의 不確實性 $F(\cdot)$ 에 의존한다. 이때 $\frac{F(p_{j-1})}{f(p_j)}$ 이 작을수록 shading의 정도가 작아진다. 예를 들어 p_j 가 최저낙찰가격이 되리라는 믿음의 정도($f(p_j)$)가 최저낙찰가격이 p_{j-1} 이하에서 형성되리라는 믿음의 정도($F(p_{j-1})$)에 비해서 클 경우 자신의 진정한 선호를 낮추어 표현하고자 하는 정도가 작아진다. 반면 응찰자가 최저낙찰가격이 p_{j-1} 이하에서 형성될 가능성이 클 것으로 믿을 경우 자신의 선호를 낮추어 표현하는 것이 기대이익을 증가시키게 된다. 물론 이같은 효과는 p_j 와 p_{j-1} 의 차이가 클수록 강해진다.

셋째, $(p_j - p_{j-1}) \frac{F(p_{j-1})}{f(p_j)}$ 은 $\frac{1}{F(p_j) - F(p_{j-1})} F(p_{j-1})$ 이므로 $(F(p_{j-1}))$ 의 값이 같다면 누적분포

함수의 기울기가 클수록 보다 낮게 입찰하는 경향이 약해짐을 알 수 있다. 즉 최저낙찰 가격에 대한 불확실성이 줄어들수록 shading의 정도가 줄어든다.

2.2.2. 單一價格 競賣方式

단일가격 경매방식에서의 입찰함수를 \bar{b} 라 하고 낙찰가격의 불확실성을 나타내는 최고 낙찰금리의 분포함수를 \bar{F} (확률함수는 \bar{f})라고 정의하면 기대수입은 다음과 같다.

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^k \bar{f}(p_j) [\int_0^{\bar{b}(p_j)} d_i^{-1}(q) dq - p_j \bar{b}(p_j)]$$

응찰자는 식 (2.2)를 극대화하는 $\bar{b}_i(p_1) \cdots \bar{b}_i(p_k)$ 를 선택한다. 이를 위한 최적화 조건을 구하면 $j=1, 2, \dots, k$ 에 대해

$$(2.3) \quad \bar{f}(p_j)(d_i^{-1}(\bar{b}_i(p_j)) - p_j) = 0$$

즉, $\bar{b}_i(p_j) = d_i(p_j)$ 이다.

이처럼 단일가격 경매에서 응찰자는 자신의 선호를 숨기지 않고 있는 그대로 나타나게 된다. 식 (2.3)에 복수가격 경매방식에서 도출된 관계식인 식 (2.1)을 대입하면 단일가격 경매방식과 복수가격 경매방식의 입찰함수 간 다음 관계식을 도출할 수 있다.

$$(2.4) \quad b_i(p_j) = \bar{b}_i \left[(p_j + (p_j - p_{j-1}) \frac{F(p_{j-1})}{f(p_j)}) \right]$$

따라서 複數價格 競賣方式에서의 낙찰가격의 불확실성을 나타내는 $F(\cdot)$ 만 주어지면 單一價格 競賣方式에서의 입찰함수를 도출할 수 있게 된다. 즉, 단일가격 경매방식을 정책적으로 실험하여 실제로 얻은 자료가 없을지라도 복수가격 경매방식하의 最低落札價格의 不確實性을 추정할 수만 있다면 단일 및 복수가격 경매방식에 따른 경매수입을 비교할 수 있게 된다.

3. 實證分析

경매방식별 분석대상 기간은 복수가격 방식은 1999년 9월 6일 경매부터 2000년 7월 18일 경매까지이고, 단일가격 방식이 2000년 8월 14일 경매부터 2001년 2월 12일 경매까지이다. 복수가격 경매자료와 관련하여 1999년 9월 6일 이후 자료부터 분석하는 것은 이때부터 국채전문딜러 제도가 정착되어,⁽³⁾ 경쟁적으로 경매입찰이 이루어졌기 때문이다. 이 기간 중에서도 경매당국이 적극적으로 공급물량을 조절한 시기인 2000년 1월 17일부터 2000년 5월 8일까지의 경매자료는 분석대상에서 제외한다. 이는 가변량 방식에서의 입찰행태가 고정량 방식에서와는 다를 것이기 때문이다.

경매 방식별 경매수입 차이는 복수가격 방식과 단일가격 방식의 가중평균낙찰금리와

(3) 국채전문딜러 지정기간 동안에는 국채전문딜러로 지정 받기 위해 시장금리와는 상관없이 과다하게 입찰에 응하였기 때문에 경매자료가 왜곡되었을 것으로 판단된다.

최고낙찰금리를 비교하면 쉽게 알 수 있다. 문제는 같은 경매에서 동시에 두 경매방식을 사용하는 경우는 없기 때문에 가중평균낙찰금리와 최고낙찰금리를 직접 비교하는 것은 불가능하다. 서로 다른 시점에서 이루어진 경매의 경매수입을 비교하려면 두 시점 간 상이한 금리 수준의 차이를 감안해야 한다.

경매 직전 시점에서의 동종채권금리로 가장 적합한 금리는 發行前 市場(when-issued market)에서 형성되는 금리이다. 그러나 우리 나라의 경우 발행전 시장이 없으므로 경매 직전 유통시장 금리를 사용하기로 한다. 본 연구에서는 유통시장 금리로 오전 증가(호가 기준) 금리와 본드웹⁽⁴⁾에서 제공하는 실시간 금리 자료를 모두 이용한다. 다만 본드웹은 2000년 6월 이후부터만 자료를 제공하기 때문에 그 이전 경우는 증권업 협회가 제공하는 오전 증가 자료만을 사용할 수밖에 없다.

〈表 1〉은 경매 스프레드를 경매 방식별로 그리고 국채 만기별로 살펴본 것이다. 複數價格 경매방식하에서는 1, 3, 5년 만기의 국채가 발행된 반면 單一價格 방식하에서는 3, 5, 10년 만기의 국채가 발행 되었다. 따라서 경매방식에 따른 競賣收入 비교를 위해서는 3, 5년 만기의 국채로 제한하는 것이 바람직하다. 먼저 가변량 구간을 포함한 전체 복수가격 방식 구간의 자료를 이용하는 경우 복수가격 방식 경매 스프레드와 단일가격 방식 경매 스프레드 간의 차이는 증권업 협회 자료와 본드웹 자료에서 각각 0.9bp, 0.8bp로 나타난다. 가변량 복수가격 방식 구간을 제외하면 경매 스프레드의 차이는 증권업 협회와 본드웹 자료에서 각각 1.8bp, 2.6bp로 늘어난다. 고정량 방식끼리 비교하는 것이 보다 바람직하다. 이 경우 단일가격 경매방식에서의 경매스프레드가 복수가격 경매방식에서보다 1.8~2.6bp 정도 낮다고⁽⁵⁾ 할 수 있다.

〈表 1〉 滿期別 競賣 스프레드 比較

(단위: bp)

만기	1년	3년	5년	10년	3년, 5년
복수가격: 전체	0.0(0.0)	0.5(1.4)	1.2(2.5)	-	0.8(1.9)
복수가격: 고정량	2.9(2.9)	1.0(2.7)	2.6(5.0)	-	1.7(3.7)
단일가격	-	-3.0(0.4)	3.2(1.8)	4.0	-0.1(1.1)
스프레드 차이 (복수고정량 - 단일가격)	-	4.0(2.3)	-0.6(3.2)	-	1.8(2.6)

註: ()는 본드웹 호가 기준.

(4) 본드웹(www.bondweb.co.kr)은 채권 웹사이트 전문기관으로 주요 지표채권의 체결가와 호가를 실시간으로 제공하고 있다.

3.1. 線形 需要曲線

수요곡선이 선형이고 경매방식의 변경에도 불구하고 수요곡선의 기울기가 변하지 않는다고 하자. 이 경우 경매방식을 복수가격 방식에서 단일가격 방식으로 변경할 때 최저낙찰가격이 $\frac{blQ^*}{2}$ 보다 더 많이 상승하면(혹은 최고낙찰금리가 더 많이 하락하면) 단일가격 경매에서의 경매수입이 복수가격 경매에서보다 많아짐을 이미 살펴보았다. 이를 실증적으로 분석할 때 먼저 複數價格 競賣의 입찰자료를 이용해 선형 수요곡선의 기울기를 추정하고 이를 이용해 $\frac{blQ^*}{2}$ 값을 도출한다. 다음으로 單一價格 競賣方式을 실제로 사용한 기간의 입찰자료를 이용해 실제로 需要曲線이 얼마나 이동했는가를 측정한 뒤 이를 앞서 구한 최소한의 이동 요구폭인 $\frac{blQ^*}{2}$ 와 비교하여 경매방식 간 競賣收入을 비교한다.

실제로 시행된 복수가격 경매건별로 선형 수요곡선을 도출하는 과정을 살펴보자. 개별 입찰자료로부터 수요곡선을 도출하기 위해 우선 세로축에 최고낙찰금리를 0으로 하여 위로는 -1bp, -2bp, ... 순으로 배열하고 아래로는 +1bp, +2bp, ... 순으로 배열하여 금리를 정규화한다. 다음 가로축에 표현하는 입찰수량은 전체응찰물량대비 각 개별 응찰의 비중으로 측정한 뒤 이를 개별 응찰에 걸쳐 수평합하여 나타낸다. 이렇게 얻어진 시장수요곡선을 선형회귀식으로 근사시켜 수요곡선의 기울기인 b 를 구할 수 있다.

경매방식에 따라 기울기가 변하지 않을 경우,⁽⁵⁾ 복수가격 경매 건수별로 그 수요곡선 기울기와 발행액만 있으면 가상적으로 단일가격 경매방식의 채택에 따라 경매수입이 늘어나게 되는 최고낙찰금리의 최소 하락폭을 도출할 수 있다. <表 2>는 복수가격 경매 건수별로 수요곡선의 최소 이동폭을 구한 것이다. 셋째 열의 수요곡선 기울기와 다섯째 열의 낙찰액을 곱하여 2로 나눈 값($\frac{blQ^*}{2}$)이 최소한으로 요구되는 가격 이동폭이다. 즉 복수가격 경매방식을 단일가격 경매방식으로 변경할 때 수요곡선의 이동폭이 최소한 이보다 커야 단일가격 경매방식에서의 경매수입이 많아진다. 이같은 이동폭을 금리로 환산한 것이 마지막 열에 있다. 실제 복수가격 경매건수 중에서 고정량 방식으로만 한정할 때, 단일가격 경매방식에서 경매수입이 더 많기 위해서는 최소한의 최고낙찰금리 하락폭은 평균 2.9bp이고 가변량 방식의 자료를 포함하면 이는 2.1bp가 된다. 분석대상을 3, 5년

(5) Malvey and Archibald(1998)가 미국 국채경매시장 자료를 이용해서 측정한 경매 스프레드는 2년 만기 국채의 경우 복수가격 경매방식에서 0.41bp인 반면에 단일가격 경매방식은 0.20bp였다. 그리고 5년 만기 국채의 경우도 각각 0.33bp와 0.22bp로 나타나 그 차이는 0.1~0.2bp 정도에 불과하다. 이는 미국 국채경매시장의 경우 발행전 시장이 잘 발달되어 있어 그만큼 낙찰금리에 대한 불확실성이 작기 때문에 타나난 현상으로 보여진다.

(6) 실제로 자료를 분석해보면 두 경매방식에 걸쳐서 수요곡선의 기울기는 거의 차이가 없는 것으로 나타났다.

〈表 2〉 競賣方式 變更時 同一收入을 얻기 위한 需要曲線 移動幅

경매일	만기	기울기	R ²	낙찰액(억원)	가격 이동폭(원)	금리 이동폭(bp)
990906	1	-0.00094	0.87	11,952	5.62	5.6
990913	3	-0.00198	0.98	11,962	11.84	4.5
990928	5	-0.00440	0.92	7,904	17.39	4.4
991004	1	-0.00045	0.93	11,649	2.62	2.6
991011	3	-0.00064	0.93	13,574	4.34	1.6
991018	5	-0.00403	0.95	7,983	16.09	4.1
991108	1	-0.00066	0.93	7,763	2.56	2.6
991115	3	-0.00112	0.80	11,849	6.64	2.5
991206	3	-0.00762	0.90	3,498	13.32	5.1
000110	1	-0.00054	0.96	7,386	1.99	2.0
000117	3	-0.00110	0.97	7,645	4.20	1.6
000124	5	-0.00348	0.98	2,948	5.13	1.3
000207	1	-0.00026	0.98	9,786	1.27	1.3
000214	3	-0.00034	0.96	12,280	2.09	0.8
000221	5	-0.00156	0.96	6,787	5.29	1.3
000306	1	-0.00016	0.99	12,624	1.00	1.0
000313	3	-0.00091	0.98	6,639	3.02	1.2
000320	5	-0.00356	0.78	3,300	5.87	1.5
000403	1	-0.00026	0.93	7,763	1.01	1.0
000410	3	-0.00044	0.97	8,399	1.85	0.7
000417	5	-0.00001	0.99	3,767	0.02	0.0
000502	1	-0.00023	0.99	4,752	0.55	0.6
000508	3	-0.00068	0.98	7,620	2.59	1.0
000515	5	-0.00489	0.81	2,796	6.84	1.7
000605	1	-0.00094	0.88	2,872	1.35	1.4
000619	5	-0.00084	0.95	7,679	3.23	0.8
000710	3	-0.00193	0.95	5,860	5.65	2.1
000718	5	-0.00166	0.96	11,730	9.74	2.4
평균 (고정량)						2.1(2.0) 2.9(2.9)

註: (1) 가격 이동폭 = |기울기| * 낙찰액/2.

(2) ()는 3년과 5년 만기 국채의 경우.

〈表 3〉線形 需要函數의 推定值를 利用한 競賣收入 比較(3, 5年 國債)

단일가격방식 경매수입이 많기 위해 요구되는 수요곡선의 최소 이동폭(A)(가변량 포함)	단일가격 경매방식 도입 이후 실제 이동폭(B)(가변량 포함)		경매수입(B-A)	
	증첩 자료	본드웹 자료	증첩 자료	본드웹 자료
2.9bp (2.0bp)	4.5bp (3.2bp)	5.6bp (3.5bp)	1.6bp (1.2bp)	2.7bp (1.5bp)

註: (1) A: 선형수요함수 가정시 단일가격 경매방식 경매수입이 많기 위한 수요함수의 최소 이동폭

(2) B: 복수가격 경매방식의 '최고낙찰금리 - 유통시장 금리' 에서 단일가격 경매방식의 '최고낙찰금리 - 유통시장 금리' 를 뺀 값

만기의 국채로만 한정하면 이는 각각 2.9bp, 2.0bp가 된다.

실제로 경매방식 간 수요곡선의 이동폭을 비교하기 위해서는 두 경매방식에 걸쳐서 최고낙찰금리의 차이를 보면 된다. 그러나 문제는 상이한 시점에서의 시장 금리 수준은 직접 비교할 수 없기 때문에 복수가격 방식에서의 최고낙찰금리와 단일가격 방식에서의 최고낙찰금리에서 각각의 경매직전 유통금리를 차감한 금리를 기준으로 수요곡선의 이동폭을 측정하는 것이 바람직하다.

이하에서는 복수가격 경매방식의 경우 고정량 경매방식의 결과만을 살펴보도록 한다. 〈表 3〉의 둘째 열에서 보듯이 수요곡선은 증권업 협회 자료와 본드웹 자료에서 각각 4.5bp, 5.6bp 아래로 이동했다. 이같은 금리하락폭은 단일가격 경매방식이 유리하기 위해 요구되는 금리의 최소 이동폭에 비해 증권업 협회 자료와 본드웹 자료의 경우 각각 1.6bp, 2.7bp 초과함을 보여준다. 즉, 경매수입은 단일가격 방식하에서 증가한 것으로 나타난다.

3.2. 假想 入札函數 推定

복수가격 경매방식에서의 입찰수요곡선에서 가상적인 단일가격 경매방식에서의 입찰수요곡선을 도출함에 있어 分布函數 $F(\cdot)$ 가 결정적인 역할을 한다. $F(\cdot)$ 를 최고낙찰금리와 경매직전 동일 종목 채권 유통금리의 금리 차이에 대한 분포라고 하자. 이 분포를 도출하기 위해 그 금리 차이는 아래 식 (3.1)과 같이 표현된다고 가정하자. 여기서 설명변수 X 는 경매구간 더미, 채권만기별 더미, 국채발행 크기 등을 포함할 수 있으나 본 연구에서는 경매구간에 따른 더미변수만을 포함하는 것으로 가정한다.

$$(3.1) \quad Y_h - Y_s = \alpha + \beta X + u$$

Y_h : 최고낙찰금리, Y_s : 경매직전 유통금리, X : 설명변수,
 α : 상수항, β : 기울기, u : 교란항

구체적으로는 먼저 11개의 복수가격 경매진수를 이용해 식 (3.1)을 추정하여 계수값과 잔차항을 구한다. 이렇게 얻어진 11개의 잔차항으로부터 첫 번째 경매의 특성(X_1)을 감안하여 첫 번째 경매의 경매 스프레드에 대한 11개의 자료를 구한다.⁽⁷⁾ 다음 이를 이용하여 첫 번째 경매에 대응하는 경매 스프레드의 분포함수 $F(\cdot)$ 를 도출한다. $F(\cdot)$ 가 구해지면 단일가격 경매방식의 경매수입을 추정할 수 있다. 이것을 다른 복수가격 경매진수에도 차례로 적용하면, 결국 11개의 복수가격 경매진수 각각에 대해 가상적인 단일가격 경매수입을 구할 수 있다.

이때 표본오차를 통제할 필요가 있는데, 두 가지 종류의 표본오차가 발생할 수 있다. 첫째 요인은 最高落札金利 스프레드(yield spread)에서 비롯되는 것이고, 다른 요인은 個別 應札資料(individual bidder)에서 비롯된 것이다. 개별응찰 자료는 경매 건별로 응찰자들의 입찰가격과 해당 수량의 조합이다. 우리는 이들 두 불확실성 모두를 고려할 수도 있고 분리하여 각각 고려할 수도 있다.

먼저 최고낙찰금리 스프레드에서 비롯된 오차를 통제하기 위해 Bootstrap의 복원추출 방법을 쓴다. 구체적으로 11개의 복수가격 경매진수에 1부터 11까지 번호를 붙인 뒤 무작위 복원추출로 11개의 경매 집합을 다시 추출하는 것이다. 이렇게 추출된 경매자료를 이용하여 다시 최고낙찰금리 스프레드를 구하고, 단일가격 경매방식의 경매수입을 구한다. 이를 다시 1000번 시행한다. 그러면 1000개의 단일가격 경매방식과 복수가격 경매방식의 경매수입 차이를 구할 수 있다.

이제 최고낙찰금리 스프레드가 주어진 상황에서 경매에 참가하여 최고낙찰금리에 영향을 줄 수 있는 應札者들의 集합을 고려해야 한다. 이를 위해 각 경매에서 우리는 응찰자들의 수만큼 위의 Bootstrap방법을 이용하여 응찰자 집합을 뽑는다. 구체적으로 n명의 응찰자 자료가 있으면 이들에 1부터 n의 번호를 붙인 뒤 무작위 복원추출로 n명의 응찰자 집합을 새로 구성하는 것이다. 이제 새로운 응찰자들의 집합에서 나온 최고낙찰금리 등의 자료를 이용해 또 하나의 경매수입 비교가 가능하며, 이를 1000번 시행한다.

(7) 식 (3.1)으로부터 구한 계수추정치를 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ 라고 하고 11개의 잔차를 각각 $\hat{u}_1 = Y_{h1} - Y_{s1} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_1, \dots, \hat{u}_{11} = Y_{h11} - Y_{s11} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_{11}$, 라고 하자. 이때 첫 번째 경매에 대응하는 11개의 경매 스프레드 자료는 $(Y_{h1} - Y_{s1})^{(1)} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{1+} \hat{u}_1, \dots, (Y_{h1} - Y_{s1})^{(11)} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{11+} \hat{u}_{11}$ 으로 구한다.

두 가지 불확실성을 같이 고려하려면 먼저 11개의 최고낙찰금리 스프레드를 복원추출하여 낙찰금리 스프레드를 구한다. 그리고 응찰자들을 복원추출하여 새로운 응찰자 집합을 만든다. 이 둘을 결합하면 경매수입을 비교할 수 있다. 이를 각각 1000번씩 시행한다.

한편 분포함수 $F(\cdot)$ 를 구하는 과정에서 正規分布를 가정할 수도 있고 이러한 모수적 가정을 하지 않은 채 이를 非母數的 方法을 사용하여 추정할 수도 있다. 따라서 최고낙찰금리 스프레드와 개별응찰에 들어있는 불확실성을 고려하는 세 가지 방식과 $F(\cdot)$ 를 추정하는 두 가지 방식으로 인해 총 6개의 분석결과를 얻게 된다. 참고로 비모수 분포 추정을 위해서는 kernel density를 이용하였는데, kernel 함수로는 正規分布를 사용하였다.

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

N : 관측개수, h : bandwidth, K : kernel function

$h = 1.06 * S(X) * N^{-0.2}$ 단, $S(X)$ 는 X 의 표본표준편차

실증분석을 할 때 복수가격 경매방식에서 가변량 방식을 사용한 기간은 제외하였다. 한편 처음 네 번 경매는 더미 변수로 처리하였다. 이는 이 기간이 1999년 7월에 발생한 대우 사태로 인해 채권 시장이 혼란에 빠졌던 특수한 기간이었을 뿐만 아니라, 完全競爭入札을 처음 실시한 초기의 기간이었기 때문이다. 더미 처리를 하지 않을 경우 낙찰금리의 불확실성 증대로 인해 복수가격 경매방식이 단일가격 방식보다 더욱 불리하게 나온다.

이들 분석에서 한 가지 고려해야 할 점은 개별 경매에서 응찰자들을 복원추출해 최고낙찰금리를 생성할 때, 원자료에서 경매에 참가하거나 낙찰된 응찰자들의 수가 매우 적을(thin) 경우 복원추출한 최고낙찰금리의 변동성이 너무 커져 정교한 추론이 힘들어진다. <表 4>에서 보듯이 1999년 12월 6일 경매는 다른 경매의 경우와는 달리 응찰자와 낙찰자 수가 매우 적다. 당시 응찰자들의 수가 적어 당국의 강력한 독려로 몇 개 기관만이 입찰에 참가하였다고 한다. 이때의 경매자료를 이용해 Bootstrap해보면 最高落札金利의 變動性이 다른 경매건에 비해 23배나 큰 것으로 나타난다. 이 결과 변동성의 급격한 증대로 인해 복수가격 경매방식의 경매수입이 단일가격 방식에 비해 터무니 없이 낮게 나올 가능성이 생긴다. 따라서 본 연구의 실증분석에서는 應札者 不確實性을 고려할 때 1999년 12월 6일 경매자료를 제외하였다.

여기서 假想需要函數를 이용한 경매수입 비교의 實證分析 과정을 요약하면 다음과 같다. 우선 식 (3.1)의 회귀분석 결과와 그 잔차항을 이용하여 $F(\cdot)$ 를 구하고 $F(\cdot)$ 를 母數와

〈表 4〉各 競賣에서의 落札者 數와 應札者 數

	낙찰 수 (낙찰 bid수)	입찰 수 (입찰 bid수)
990906	60	81
990913	56	107
990928	60	94
991004	48	96
991011	54	116
991018	38	105
991108	47	76
991115	56	108
991206	6	20
000110	49	109
000515	12	49
000605	13	46
000612	52	61
000619	31	84
000710	43	66
000718	27	91

〈表 5〉假想需要函數를 利用한 競賣方式別 競賣收入 比較(複數價格 - 單一價格)

경매일	만기(년)	듀레이션	모수		비모수	
			가격(원)	금리(bp)	가격(원)	금리(bp)
990913	3	2.65	0.98	-0.37	1.83	-0.68
990928	5	4.01	3.98	-0.99	5.10	-1.27
991011	3	2.68	-2.01	0.76	-1.45	0.54
991018	5	4.05	-0.02	0.01	1.10	-0.27
991115	3	2.68	-9.02	3.36	-8.17	3.05
991206	3	2.67	1.98	-0.74	2.83	-1.05
000515	5	3.79	-16.02	4.23	-14.90	3.93
000612	3	2.51	-1.02	0.41	-0.17	0.07
000619	5	3.79	-16.02	4.23	-14.90	3.93
000710	3	2.45	-1.02	0.42	0.17	0.07
000718	5	4.07	-7.02	1.73	5.90	1.45
평균	-	-	-	1.18	-	0.89

非母數 方法으로 추정하여 <表 5>에서 경매방식별로 경매수입을 비교하였다. 이에 의하면 단일가격 경매방식이 복수가격 경매방식보다 금리로 환산한 경매수입이 $F(.)$ 를 모수방법으로 추정할 때 1.2bp, 비모수 방법으로 추정할 때 0.9bp 많은 것으로 나타난다.

이들 競賣收入이 統計的으로 有意한가를 보기 위해 최고낙찰금리 스프레드나 입찰과정에서 발생할 수 있는 오차 각각과 이들 모두를 감안한 Bootstrap을 시행했으며, 그 결과가 <表 6>에 요약되어 있다. 競賣收入은 앞에서 구한 바와 같으며, 이를 경매건수별로 파악하여 표본오차를 감안할 경우 경매수입이 5% 유의수준에서 유의하게 나타난 회수(경매방식별로 분류)와 통계적으로 유의하지 않게 나타난 회수를 기록했다.

최고낙찰금리 스프레드의 불확실성만을 감안하였을 경우 통계적으로 유의한 회수는 모수와 비모수 추정 방식 모두에서 동일하게 나타났는데, 총 11회 중 단일가격 경매방식이 낫다는 것이 3회, 불분명한 경우가 8회이며, 복수가격 경매방식의 경매수입이 통계적으로 유의하게 많았던 경우는 없었다. 한편 경매건수별로 개별 응찰자에 들어 있는 불확실성만을 Bootstrap방식으로 분석한 경우 통계적 유의성은 모수와 비모수 추정에서 동일하게 나타났으며, 총 10회 중 단일가격 경매방식이 경매수입이 많다는 것이 4회, 불분명한 경우가 6회이며, 복수가격 경매방식은 한번도 없었다. 마지막으로 최고낙찰금리 스프레드와 응찰자에 따른 불확실성을 모두 Bootstrap해보았다. 이 경우 모수와 비모수 추정 모두 총 10회 중 단일가격 경매방식 3회, 불분명 7회, 복수가격 경매방식은 한번도 없는 것으로 나타났다.

결국 3년과 5년 만기 국고채를 대상으로 한 이들 세 가지 실증분석방법들의 결과는 대동소이하게 單一價格 競賣方式에서의 경매수입이 複數價格 競賣方式에서보다 더 많으며, 그 크기를 금리 평균으로 표시하면 0.9bp~2.7bp 정도인 것으로 나타났다. <表 7>은 이상

<表 6> Bootstrap을 利用한 競賣方式別 競賣收入 比較(5% 有意 水準)

		최고낙찰금리 스프레드		응찰자		스프레드 & 응찰자	
		모수	비모수	모수	비모수	모수	비모수
경매수입(bp)		1.2	0.9	1.2	0.9	1.2	0.9
경매수입(회)	복수가격	0	0	0	0	0	0
	단일가격	3	3	4	4	3	3
	불분명	8	8	6	6	7	7
	경매회수	11	11	10	10	10	10

〈表 7〉 單一價格과 複數價格 競賣方式의 競賣收入 比較

경매 스프레드	선형 수요곡선	가상 입찰함수	
		모수	비모수
1.8bp(2.6bp)	1.6bp(2.7bp)	1.2bp	0.9bp

註: ()의 수치와 가상 입찰함수는 본드웹 자료를 사용한 결과치임.

의 결과를 요약해 주고 있다. 그리고 Bootstrap 시행을 통해 많은 경우 단일가격 경매방식이 경매수입면에서 우월하다는 것이 통계적으로 유의하다는 것도 확인할 수 있었다.

4. 맺는 말

본 연구는 우리 나라 國債發行市場에서 競賣方式의 변경으로 인한 競賣收入의 변화를 살펴보았다.

세 가지 실증분석 방법 즉 경매 스프레드를 비교하는 방법, 線形 需要曲線을 추정하여 이들의 이동폭을 계산하여 경매수입을 비교하는 방법, 그리고 마지막으로 理論的인 模型에서 나온 결과를 이용하여 경매수입을 비교하는 방법 등 각각에서 단일가격 경매방식에서의 최고낙찰금리가 복수가격방식에서의 가중평균낙찰금리보다 2.6bp, 2.7bp, 그리고 1.2bp만큼 낮은 것으로 나타났다.

참고로 미국은 단일가격 경매방식이 복수가격방식에 비해 2년 만기 국채의 경우 0.21bp, 5년 만기 국채의 경우 0.11bp 정도 금리 스프레드면에서 유리한 것으로 보고된 바가 있다(Malvey and Archibald(1998) 참조). 2년 만기 국채를 보면 우리 나라의 경우 단일가격 경매방식이 유리한 정도가 미국에 비해 약 6~13배 정도 강하다. 이처럼 단일가격 경매방식이 미국에 비해 우리 나라에서 더욱 유리한 이유는 우리 나라는 분석대상 기간이 완전경쟁입찰 도입 초기에 해당되고 나아가 발행전 시장이 없어서 落札價格에 대한 不確實性이 컸기 때문이다. 낙찰가격의 불확실성이 클수록 복수가격 경매방식에서 過小入札(underbidding)의 현상이 커지게 되어 그만큼 단일가격 경매방식이 유리하게 된다.

본 연구에 이어 다음 주제들에 대한 연구는 향후의 과제로 남겨두고자 한다. 첫째, 앞으로 단일가격 경매방식의 자료를 이용하여 가상적인 복수가격 경매방식의 경매수입을 도출하는 것도 유익한 연구가 될 것이다. 더욱이 단일가격 경매방식은 시장 참가자들이 이미 완전경쟁입찰을 1년 정도 경험한 후에 시행되었기 때문에 자료의 안정성이 확보되는 장점이 있다.

둘째, 우리 나라는 공급물량을 적극적으로 조절하는 可變量 競賣方式을 사용한 경험이 있는데 이같은 경매방식에서의 需要曲線을 模型化하는 작업이 필요하다. 이러한 작업은 고정량과 가변량 경매방식에서의 경매수입을 이론적인 모형에 근거해서 분석할 수 있게 해줄 것이다.

셋째, 발행전 시장이 없고 統合發行(fungible issue)방식을 사용할 경우 지표국채의 교체 과정에서 국채들 간의 스프레드가 급격하게 변할 가능성이 있다. 이러한 경향은 국채 지표물 교체 시기 중의 경매에서 최고낙찰금리에 대한 불확실성을 증대시킬 것이다. 따라서 지표물 교체로 인한 불확실성이 최고낙찰금리 스프레드에 미치는 영향에 대한 연구가 필요하다.

미래투신운용

150-990 서울특별시 영등포구 여의도동 45-1 미래에셋 빌딩 7층

전화: (02)786-9238

서울大學校 經濟學部 副教授

151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1

전화: (02)880-6397

팩스: (02)886-4231

E-mail: ryu@snu.ac.kr

서울大學校 經濟學部 教授

151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1

전화: (02)880-6381

팩스: (02)886-4231

E-mail: shoh@plaza.snu.ac.kr

參 考 文 獻

Back, K., and J. Zender(1993): "Auctions of Divisible Goods: On the Rationale for the Treasury Experiment," *Review of Financial Studies*, 6, 733-764.

Bikhchandani, S., and C. Huang(1989): "Auctions with Resale Markets: An Exploratory Model of

- Treasury Bill Markets,” *Review of Financial Studies*, **2**, 311-339.
- Bikchandani, S., and C. Huang(1993): “The Economics of Treasury Securities Markets,” *Journal of Economic Perspectives*, **7**, 117-134.
- Chari, V.V., and R.J. Weber(1992): “How the U.S. Treasury Should Auction Its Debt,” *Federal Bank of Minneapolis Quarterly Review*, **16**, **4**.
- Chatterjea, A., and R.J. Jarrow(1998): “Market Manipulation, Price Bubbles, and a Model of the U.S. Treasury Securities Auction Market,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**, **2**, 255-289.
- Friedman, M. (1960): *A Program for Monetary Stability*, 1959, NY, Fordham University Press.
- Heller, D., and Y. Lengwiler(1998): “The Auctions of Swiss Government Bonds : Should the Treasury Price Discriminate or Not?,” FRB.
- Lengwiler, Y.(1998): “The Multiple Unit Auction with Variable Supply,” FRB.
- Malvey, P.F., and C.M. Archibald(1998): *Uniform-Price Auctions: Update of the Treasury Experience*, U.S. Treasury.
- Milgrom, P., and R.J. Weber(1982): “A Theory of Auctions and Competitive Bidding,” *Econometrica*, **50**, 1089-1122.
- Nautz, D.(1995): “Optimal Bidding in Multi-unit Auctions with Many Bidders,” *Economics Letters*, **48**, 301-306.
- Nyborg, K.G., and S. Sundaresan(1996): “Discriminatory versus Uniform Treasury Auctions : Evidence from When-Issued Transactions,” *Journal of Financial Economics*, **42**, **1**, 63-104.
- Simon, D.P.(1994): “Markups, Quantity Risk, and Bidding Strategies at Treasury Coupon Auctions,” *Journal of Financial Economics*, **35**, 43-62.
- Umlauf, S.R.(1993): “An Empirical Study of the Mexican Treasury Bill Auction,” *Journal of Financial Economics*, **33**, 313-340.
- Wang, J.J.D., and J.F. Zender(1996): “Auctioning Divisible Goods,” Working Paper, University of Utah.
- Wilson, R.(1979): “Auctions of Shares,” *Quarterly Journal of Economics*, **93**, **4**, 675-689.