

### 3變數 利子率 期間 構造 模型<sup>(1)</sup>

安 炯 賢

이 논문은 Longstaff & Schwartz(1992)의 모형을 확장한 것으로 短期利子率의 平均回歸를 세 번째 요소로 추가하였다. 이 모형은 기존의 세 요소 모형과 비교할 때 두 가지 방면에서 현저히 구분된다. 첫째, 위험프리미엄에 대한 설정은 Cox-Ingersoll-Ross의 균형 모형에 의해 뒷받침되며 둘째, 비록 세 요소 사이에 相關關係가 존재하는 것을 허용할지라도 債券價格 및 債券옵션價格에 대한 닫힌 꼴의 解(closed form solution)를 도출할 수 있다. 이러한 일반적인 특성에 대한 가정하에서 이 모형은 Litterman & Scheinkman(1991), 그리고 Balduzzi, Das, & Foresi(1993) 등의 채권기대수익률의 기간구조의 특성을 포괄할 수 있다.

#### 1. 模 型

이 장에서는 삼 요소 Longstaff & Schwartz 모형을 유도한다. 이와 관련한 핵심기법은 관측할 수 없는 상태변수들에 의해 생성할 수 있는 공간과 같은 공간을 생성할 수 있는 관측 가능한 상태변수들로 변형시키는 것이다.

경제를 확률공간  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ 로 나타내자. 이 때  $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 이다. 우선 價格決定函數(pricing kernel)  $M(t, T)$ 에 대해 정의를 내리면

$$(1.1) \quad S(t) = E^{\mathbf{P}}[M(t, T)S(T)|\mathcal{F}_t]$$

이고, 여기서  $S(t)$ 는 자산의 가격을 나타내며  $S(t, w): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$ 이다.

完全市場을 가정하면 Harrison & Kreps(1979)가 증명한 바와 같이 각각의 시장에 代表的인 行爲者(representative agent)가 존재한다. 이 대표적인 행위자가 로그효용함수 및 확률적 규모수익불변 생산함수를 갖고 있다고 가정하면 아래의 確率微分方程式을 적을 수 있다.

$$(1.2) \quad \frac{dq(t)}{q(t)} = (\delta_1 f_1(t) + \delta_2 f_2(t) + \delta_3 f_3(t))dt$$

(1) 이 논문은 서울대학교 신입교수 연구 정착금의 지원을 받아 이루어졌다.

$$+\sigma_1\sqrt{f_1(t)}d\omega_1(t)+\sigma_2\sqrt{f_2(t)}d\omega_2(t)+\sigma_3\sqrt{f_3(t)}d\omega_3(t)$$

여기서  $\{f_i(t)\}, i=1, 2, 3$ 은 경제의 생산과정에 영향을 주는 세 요소의 집합이다.

세 요소들은 Cox, Ingersoll, & Ross(1985b)에서와 같이 각각 제곱근過程(square-root process)을 따른다고 가정한다.

$$(1.3) \quad df_i(t)=(v_i+\varphi_i f_i(t))dt+s_1\sqrt{f_i(t)}dz_i(t) \quad \forall i=1,2,3.$$

$\underline{w}=(w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t))^T$ ,  $\underline{z}=(z_3(t) \ z_3(t) \ z_3(t))^T$ 이라고 표시하고 그 相關關係는 다음과 같다.

$$(1.4) \quad \text{Corr}(d\underline{w}, d\underline{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho_3 \\ \rho_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

위의 가정하에 우리는 價格決定函數(pricing kernel)를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} M(t, T) &= \phi \exp\left[-\int_t^T [\sigma_1\sqrt{f_1(s)}dw_1(s) + \sigma_2\sqrt{f_2(s)}dw_2(s) + \sigma_3\sqrt{f_3(s)}dw_3(s)]\right] \\ &= \exp\left[-\int_t^T \{\delta_1 f_1(s) + \delta_2 f_2(s) + \delta_3 f_3(s) - \frac{1}{2}[\sigma_1^2 f_1(s) + \sigma_2^2 f_2(s) + \sigma_3^2 f_3(s)]\} ds\right] \end{aligned}$$

이토의 補助定理(Ito's lemma)로부터 우리는 價格決定函數(pricing kernel)의 確率微分方程式(Stochastic Differential Equation)을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{dM(0, t)}{M(0, t)} &= [(\sigma_1^2 - \delta_1)f_1(t) + (\sigma_2^2 - \delta_2)f_2(t) + (\sigma_3^2 - \delta_3)f_3(t)]dt \\ &\quad - \sigma_1\sqrt{f_1(t)}dw_1(t) - \sigma_2\sqrt{f_2(t)}dw_2(t) - \sigma_3\sqrt{f_3(t)}dw_3(t) \end{aligned}$$

完全市場을 가정하면 유일한 마팅계일 측도  $Q$ 가 존재하여 원래의 측도  $P$ 와 동일한 공집합을 공유한다. 새로운 확률측도  $Q$ 하에서 할인채권가격 대비 자산 가격은 마팅계일을 따른다.

$$\frac{S(t)}{B(t)} = E^Q \left[ \frac{S(T)}{B(T)} \right] = E^P \left[ \frac{dQ}{dP} \frac{S(T)}{B(T)} \right]$$

여기서 할인채권가격은 아래와 같다.

$$B(t) = \exp \left( - \int_0^t r(s) ds \right)$$

$r(s)$ 는 국소적 무위험이자율을 나타낸다.  $\frac{dQ}{dP}$ 는 Radon-Nikodym 도함수 혹은 危險中立 密度 過程(risk neutral density process)을 나타내며 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Psi(t, T) &\equiv \frac{dQ}{dP} \\ &= \exp \left( - \int_t^T \eta(s)^\top d\mathbf{w}(s) - \frac{1}{2} \int_t^T \eta(s)^\top \eta(s) ds \right) \end{aligned}$$

여기서  $\eta(s)$ 는 價格決定函數(pricing kernel)의 위험 프리미엄을 나타내는  $(3 \times 1)$  벡터다. 그러면 우리는 식 (1.5)를 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} S(t) &= E_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) S(T) \right] \\ &= E_t^P \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \Psi(t, T) S(T) \right] \\ &= E_t^P \left[ \exp \left( - \int_t^T \eta(t)^\top d\mathbf{w} - \int_t^T \left( r(s) + \frac{1}{2} \eta(s)^\top \eta(s) \right) ds \right) S(T) \right]. \end{aligned}$$

완전시장 가정하에 價格決定函數(pricing kernel)는 반드시 유일해야 한다. (이는 동치마팅계일측도(equivalent martingale measure)의 유일성에 의해 결정된다.)

$$M(t, T) = \exp\left(-\int_t^T \eta(s)^\top d\mathbf{w}(s) - \int_t^T \left(r(s) + \frac{1}{2} \eta(s)^\top \eta(s)\right) ds\right)$$

이토의 補助定理(Ito's lemma)에 따라 다시 確率微分方程式을 적으면 아래와 같다.

$$(1.6) \quad \frac{dM(0, t)}{M(0, t)} = -r(t)dt - \eta(t)^\top d\mathbf{w}(t)$$

식 (1.5)와 식 (1.6)으로부터 우리는 아래의 관계식을 세울 수 있다.

$$(1.7) \quad r(t) = (\delta_1 - \sigma_1^2)f_1(t) + (\delta_2 - \sigma_2^2)f_2(t) + (\delta_3 - \sigma_3^2)f_3(t)$$

$$(1.8) \quad \eta(t) = \left(\sigma_1 \sqrt{f_1(t)} \quad \sigma_2 \sqrt{f_2(t)} \quad \sigma_3 \sqrt{f_3(t)}\right)^\top$$

Longstaff & Schwartz와 마찬가지로 아래에서 상태함수들의 擴散母數(diffusion parameter)가 1이 되도록 標準化하였다. 표준화를 하기 위해 각 상태변수들을 자체의 擴散母數(diffusion parameter)로 나누게 된다.

$$x = \frac{f_1(t)}{s_1^2}, \quad y = \frac{f_2(t)}{s_2^2}, \quad z = \frac{f_3(t)}{s_3^2}.$$

이렇게 표준화된 상태변수들은 아래와 같은 確率微分方程式을 가진다.

$$dx(t) = (\theta_x - \kappa_x x(t))dt + \sqrt{x(t)}dz_1(t)$$

$$dy(t) = (\theta_y - \kappa_y y(t))dt + \sqrt{y(t)}dz_2(t)$$

$$dz(t) = (\theta_z - \kappa_z z(t))dt + \sqrt{z(t)}dz_3(t)$$

각 요소의 위험프리미엄을 아래와 같이 정의하자.

$$\phi_x(t) = \lambda_x x(t), \quad \phi_y(t) = \lambda_y y(t), \quad \phi_z(t) = \lambda_z z(t).$$

이 때,

$$\lambda_x = \rho_1 \sigma_1, \quad \lambda_y = \rho_2 \sigma_2, \quad \lambda_z = \rho_3 \sigma_3$$

이며, 따라서 위험중립측도  $Q$ 하에서 요소들의 확률미분방정식은 다음과 같다.

$$dx(t) = [\theta_x - (\kappa_x + \lambda_x)x(t)]dt + \sqrt{x(t)}d\tilde{z}_1(t)$$

$$dy(t) = [\theta_y - (\kappa_y + \lambda_y)y(t)]dt + \sqrt{y(t)}d\tilde{z}_2(t)$$

$$dz(t) = [\theta_z - (\kappa_z + \lambda_z)z(t)]dt + \sqrt{z(t)}d\tilde{z}_3(t)$$

여기서  $\tilde{z}_1(t) = z_1(t) + \int_0^t \lambda_x \sqrt{x(s)}ds$ 이고  $\tilde{z}_2(t)$ 와  $\tilde{z}_3(t)$ 도 마찬가지로 정의할 수 있다. 아래 변수에 대해 정의를 내리면

$$\varphi_x = \kappa_x + \lambda_x, \quad \varphi_y = \kappa_y + \lambda_y, \quad \varphi_z = \kappa_z + \lambda_z$$

이고, 여기서  $\kappa_i$ 는  $P$  측도하에서의 平均回歸 母數들(mean-reversion parameter)이며  $\varphi_i$ 는  $Q$  측도하에서의 평균회귀 모수들이다. 또 아래의 모수들에 대해 정의를 내리자.

$$\alpha_x = (\delta_1 - \sigma_1^2)s_1^2, \quad \alpha_y = (\delta_2 - \sigma_2^2)s_2^2, \quad \alpha_z = (\delta_3 - \sigma_3^2)s_3^2.$$

만기일이  $(t + \tau)$ 인 채권의 가격  $P(t, t + \tau)$ 는 價格決定函數(pricing kernel)  $M(t, T)$ 의 조건부 기대값이며 이로부터 아래의 偏微分方程式(partial differential equation)을 적을 수 있다.

$$\frac{1}{2}(xP_{xx} + yP_{yy} + zP_{zz}) + (\theta_x - \varphi_x x)P_x + (\theta_y - \varphi_y y)P_y + (\theta_z - \varphi_z z)P_z - rP + P_t = 0$$

다른 한 방면으로 이토의 補助定理(Ito's lemma)에 의하여 우리는 단기이자율의 확률미분방정식을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$dr(t) = (\Pi - \Theta)dt + \sqrt{\frac{\alpha_x}{D} \{(\alpha_z \kappa_y - \alpha_y \kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) - (\alpha_z - \alpha_y)\Theta(t)\}}d\tilde{z}_1 \\ + \sqrt{\frac{\alpha_y}{D} \{(\alpha_x \kappa_z - \alpha_z \kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) - (\alpha_x - \alpha_z)\Theta(t)\}}d\tilde{z}_2$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\frac{\alpha_z}{D}} \{(\alpha_y \kappa_x - \alpha_x \kappa_y)r(t) + (\kappa_y - \kappa_x)V(t) - (\alpha_y - \alpha_x)\Theta(t)\} d\bar{z}_3 \\
 \Pi & = \alpha_x \theta_x + \alpha_y \theta_y + \alpha_z \theta_z \\
 D & = (\alpha_z - \alpha_y)\kappa_x + (\alpha_x - \alpha_z)\kappa_y + (\alpha_y - \alpha_x)\kappa_z
 \end{aligned}$$

여기서 우리는 세 개의 요소를 아래와 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned}
 r(t) & = \alpha_x x(t) + \alpha_y y(t) + \alpha_z z(t) \\
 V(t) & = \alpha_x^2 x(t) + \alpha_y^2 y(t) + \alpha_z^2 z(t) \\
 \Theta(t) & = \alpha_x \kappa_x x(t) + \alpha_y \kappa_y y(t) + \alpha_z \kappa_z z(t)
 \end{aligned}$$

$r(t)$ 의 변동성이  $V(t)$ 임은 간단하게 증명할 수 있다. 따라서 우리는 관측 불가능한 변수들인  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ 를 관측 가능한 혹은 원칙상 예측 가능한 변수들로 변형하였으며, 여기서  $\Theta(t)$ 는 단기이자율의 기대변화값을 결정하는 요소다. 이 요소는 이자율의 기대변화의 확률적 움직임에 영향을 미치는 주요한 요소라는 점에서 Balduzzi, Das, & Foresi(1993), Chen(1995)의 장기평균이자율, 그리고 Balduzzi, Das, & Foresi(1994)의 中心傾向(central tendency)과 유사하다. 그러나 이 요소는 장기평균보다 평균회귀와 연계된다. 만일  $\Theta(t)$ 가  $\Pi$ 보다 작으면 이자율이 오를 것을 예측할 수 있거나 그 반대이다.

따라서 이 요소는 경제사회에서 보편적으로 형성된 이자율에 대한 조건부 기대값을 결정시킨 것이다. 그 반면  $V(t)$ 는 利率의 擴散 母數(diffusion parameter)이며 다가오는 충격에 대한 이자율의 민감도에 대한 척도이다.

이론적으로 채권수익률의 기간구조모형에서 세 개 狀態變數들이 아니라 두 개 狀態變數들이 존재한다면 임의의 두 요소는 남은 한 개 요소를 확장할 수 있다. 마찬가지로 오직 한 개 상태변수만 존재한다면 세 개 요소들은 서로 확장할 수 있다. 이는 나중에 요소의 개수를 식별함에 있어서 실증분석 도구를 제공한다.

우리는 모형에서의 세 요소들의 동태가 서로 의존함을 간단하게 알아볼 수 있다. 이는 우리 모델이 Balduzzi, Das, & Foresi(1993)의 논문에 비하여 가지고 있는 특별한 강점이다.  $r(t)$ ,  $V(t)$ , 및  $\Theta(t)$ 는 結合 마르코프 過程(joint Markov Process)을 따른다.

무위험이자율은 0부터 무한대까지의 값을 가질 수 있으며 장기에 가서 定常分布(stationary distribution)을 가지며 그 平均과 分散은 다음과 같다.

$$E(r) = \frac{\alpha_x \theta_x}{\kappa_x} + \frac{\alpha_y \theta_y}{\kappa_y} + \frac{\alpha_z \theta_z}{\kappa_z}, \quad \text{Var}(r) = \frac{\alpha_x^2 \theta_x}{2\kappa_x^2} + \frac{\alpha_y^2 \theta_y}{2\kappa_y^2} + \frac{\alpha_z^2 \theta_z}{2\kappa_z^2}.$$

이자율의 이러한 定常密度(stationary density)는 서로 독립인 세 개 감마分布(Gamma distribution)을 따르는 변수들의 선형결합의 밀도와 일치한 것이다.

비슷한 분석을 통하여 우리는  $V(t)$ 와  $\Theta(t)$ 도 임의의 양의 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 이 요소들도 서로 독립인 세 개 감마분포를 따르는 변수들의 선형결합의 밀도와 일치한 정상밀도를 가진다. Longstaff & Schwartz에서  $\Theta(t)$ 는  $r(t)$ 와  $V(t)$ 의 선형함수인 반면 이 논문에서  $\Theta(t)$ 는 원래의 상태변수들이 양의 값을 가져야 하는 조건을 만족시키는 어떠한 값도 가질 수 있다.  $V(t)$ 와  $\Theta(t)$ 는 다음과 같은 平均들과 分散들을 가진다.

$$E(V) = \frac{\alpha_x^2 \theta_x}{\kappa_x} + \frac{\alpha_y^2 \theta_y}{\kappa_y} + \frac{\alpha_z^2 \theta_z}{\kappa_z}, \quad \text{Var}(V) = \frac{\alpha_x^4 \theta_x}{2\kappa_x^2} + \frac{\alpha_y^4 \theta_y}{2\kappa_y^2} + \frac{\alpha_z^4 \theta_z}{2\kappa_z^2}$$

$$E(\Theta) = \alpha_x \theta_x + \alpha_y \theta_y + \alpha_z \theta_z, \quad \text{Var}(\Theta) = \frac{\alpha_x^2 \theta_x}{2} + \frac{\alpha_y^2 \theta_y}{2} + \frac{\alpha_z^2 \theta_z}{2}$$

## 2. 債券價格

債券價格에 대한 偏微分方程式을 풀고 요소들의 函數로 표현하면 아래의 식을 도출할 수 있다.

$$P(t, t + \tau) = A_x(\tau)^{2\theta_x} A_y(\tau)^{2\theta_y} A_z(\tau)^{2\theta_z} \exp[B(\tau)\tau - C(\tau)r(t) - F(\tau)V(t) - G(\tau)\Theta(t)]$$

$$A_x(\tau) = \frac{2\gamma_x}{(\varphi_x + \gamma_x)(e^{\gamma_x \tau} - 1) + 2\gamma_x}$$

$$A_y(\tau) = \frac{2\gamma_y}{(\varphi_y + \gamma_y)(e^{\gamma_y \tau} - 1) + 2\gamma_y}$$

$$A_z(\tau) = \frac{2\gamma_z}{(\varphi_z + \gamma_z)(e^{\gamma_z \tau} - 1) + 2\gamma_z}$$

$$B(\tau) = \theta_x(\varphi_x + \gamma_x) + \theta_y(\varphi_y + \gamma_y) + \theta_z(\varphi_z + \gamma_z)$$

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\alpha_y \kappa_z - \alpha_z \kappa_y}{\gamma_x D} + A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\alpha_z \kappa_x - \alpha_x \kappa_z}{\gamma_y D} \\
 &\quad + A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\alpha_x \kappa_y - \alpha_y \kappa_x}{\gamma_z D} \\
 F(\tau) &= A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\kappa_y - \kappa_z}{\gamma_x D} + A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\kappa_z - \kappa_x}{\gamma_y D} + A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\kappa_x - \kappa_y}{\gamma_z D} \\
 G(\tau) &= A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\alpha_z - \alpha_y}{\gamma_x D} + A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\alpha_x - \alpha_z}{\gamma_y D} + A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\alpha_y - \alpha_x}{\gamma_z D} \\
 \gamma_x &= \sqrt{\varphi_x^2 + 2\alpha_x} \\
 \gamma_y &= \sqrt{\varphi_y^2 + 2\alpha_y} \\
 \gamma_z &= \sqrt{\varphi_z^2 + 2\alpha_z}
 \end{aligned}$$

이 均衡模型은 Longstaff & Schwartz와 유사하게 설명할 수 있으나 다른 성질들이 더해져 있다. 요소들에 대한  $P(t, t + \tau)$ 의 편미분은 양의 값을 가질 수도 있고 음의 값을 가질 수도 있다. 이 점에서 우리 모형은 신축성이 더 강한 것이다. 收益率은 아래와 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned}
 yld(t, t + \tau) &= \frac{2\theta_x}{\tau} \log A_x(\tau) + \frac{2\theta_y}{\tau} \log A_y(\tau) + \frac{2\theta_z}{\tau} \log A_z(\tau) + B(\tau) \\
 &\quad - \frac{C(\tau)}{\tau} r(t) - \frac{F(\tau)}{\tau} V(t) - \frac{G(\tau)}{\tau} \Theta(t),
 \end{aligned}$$

이 정의로부터 아래 식을 간단하게 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow 0} yld(t, t + \tau) &= r(t) \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} yld(t, t + \tau) &= \theta_x(\gamma_x - \varphi_x) + \theta_y(\gamma_y - \varphi_y) + \theta_z(\gamma_z - \varphi_z)
 \end{aligned}$$

따라서 채권수익률 期間構造 曲線(term structure curve)은 현시점의 이자율에서 출발하여 ( $\tau=0$ ) 현시점의 이자율과 무관계한 長期平均( $\tau=\infty$ )에 도달한다.

이 모형에서 세 개의 요소들은 채권수익률의 기간구조의 서로 다른 특성들에 영향을 미친다. 그 특성들에 대해서 Balduzzi, Das, & Foresi(1994)의 논문에서 이미 설명하였다.

세 변수가 수익률곡선에 미치는 영향을 살펴보면 다음과 같다. 첫 번째 변수인 단기이자율은 수익률곡선의 水準(level)을 결정한다. 두 번째 변수인 변동성은 수익률의 곡률(curvature)에 영향을 미친다. Balduzzi & Foresi 역시 이러한 변동성의 영향에 대한 해석을 제공했다. 마지막으로 우리 모형의  $\Theta(t)$ 는 Balduzzi & Foresi의 長期平均(long-term mean)처럼 기간구조곡선의 기울기(steeptness)를 결정하는 平均回歸項(mean-reversion term)이다. 이러한 성분들은 Litterman & Scheinkman(1991)의 논문에서 이미 설명되어 있으며 그들은 이 세 성분들이 채권가격변화의 약 96%를 포착할 수 있음을 보여 주었다. 우리 모형에서의 세 요소들도 위의 성분들의 특성을 잘 표현하고 있다. 더 나아가서 Balduzzi, Das, & Foresi(1993) 및 Chen(1995)의 논문들과 달리 우리는 요소들 사이에 相關性(nontrivial correlation)이 존재한다는 가정하에서도 채권가격에 대한 닫힌 풀의 해를 구했다.

채권의 기간 프리미엄은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\Lambda(t) = \Lambda_r r(t) + \Lambda_v V(t) + \Lambda_\Theta \Theta(t)$$

여기서

$$\Lambda_r = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\alpha_y \kappa_z - \alpha_z \kappa_y}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\alpha_z \kappa_x - \alpha_x \kappa_z}{\gamma_y D} - \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\alpha_x \kappa_y - \alpha_y \kappa_x}{\gamma_z D}$$

$$\Lambda_v = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\kappa_y - \kappa_z}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\kappa_z - \kappa_x}{\gamma_y D} - \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\kappa_x - \kappa_y}{\gamma_z D}$$

$$\Lambda_\Theta = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1) \frac{\alpha_z - \alpha_y}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1) \frac{\alpha_x - \alpha_z}{\gamma_y D} - \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1) \frac{\alpha_y - \alpha_x}{\gamma_z D}$$

$\tau$ 을 고정시키면 기간 프리미엄은 세 개 요소들의 선형함수로 나타낼 수 있다. 일반적으로 기간 프리미엄의 부호는 정해져 있지 않다. 우리는 모든  $\lambda_i$ 가 동시에 양의 값 혹은 음의 값을 가질 경우에만 부호를 명확히 할 수 있다. Lonstaff & Schwartz의 모형은 두 개의  $\lambda_i$ 를 포함할 수 있도록 일반화할 수 있지만 엄밀한 버전은 다른 상태들과 다른 만기들 사이에 서로 다른 부호들을 만들어 낼 수 없다. 이것은 그들의 모형에서의 두 번째 요소가 생산기술에 있어서의 擴散 項(diffusion term)을 보여 주지 못하였기 때문에 위험 프리

미엄이 한 개 요소 모형에서와 같이 표현되었기 때문이다.

마지막으로 債券價格의 變動性的 期間構造를 살펴보자. 이 연구는 Schaefer & Schwartz(1987)가 논한 바와 같이 특별히 채권옵션의 가격에 매우 큰 영향을 미친다. 우리 모형에서의 변동성의 기간구조는 아래와 같이 설명할 수 있다.

$$Vol(t, t + \tau) = \Gamma_r r(t) + \Gamma_V V(t) + \Gamma_\Theta \Theta(t)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_y \kappa_z - \alpha_z \kappa_y}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_z \kappa_x - \alpha_x \kappa_z}{\gamma_y^2 D} \\ &\quad + \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_x \kappa_y - \alpha_y \kappa_x}{\gamma_z^2 D} \\ \Gamma_V &= \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_y - \kappa_z}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_z - \kappa_x}{\gamma_y^2 D} \\ &\quad + \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_x - \kappa_y}{\gamma_z^2 D} \\ \Gamma_\Theta &= \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_z - \alpha_y}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_x - \alpha_z}{\gamma_y^2 D} \\ &\quad + \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_y - \alpha_x}{\gamma_z^2 D} \end{aligned}$$

분산은 세 요소들에 의존할 뿐만 아니라 채권의 만기에도 의존한다. 채권가격의 변동성은 Longstaff and Schwartz의 모형과 마찬가지로 만기의 單調增加函數(monotonic increasing function)다. 變動性은 0에서부터 시작하여 ( $\tau=1$ ) 定常狀態 點(steady state point)에 도달한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Vol(t, t + \tau) = 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Vol(t, t + \tau) = \left( \frac{2\alpha_x}{\kappa_x + \gamma_x} \right)^2 + \left( \frac{2\alpha_y}{\kappa_y + \gamma_y} \right)^2 + \left( \frac{2\alpha_z}{\kappa_z + \gamma_z} \right)^2$$

일반적으로 利率은 中期 滿期(intermediate-maturity) 채권의 분산에 가장 큰 영향을 미치지만 그 영향은 전반적으로 크지 않다. 短期利率의 變動性의 영향이 보다 더 크며 주로 변동성의 기간구조의 수준을 포획한다. 재미있는 사실은  $\Theta$ 가 비슷한 영향을 미친다는 것이다. 平均回歸(mean-reversion)은 이자율이 시간이 흐름에 따라 定常狀態(steady state)로 얼마나 빨리 회귀하는지를 제어한다. 단기변동성이 채권시장의 불확실성을 결정함과 동시에 평균회귀는 이러한 불확실성의 제거의 속도를 나타내며 따라서 변동성의 기간구조에 대한 영향이 그토록 큰 것이다.

### 3. 債券 옵션 價格

앞 장들에서 제시한 一般均衡의 틀에 따라 이 장에서는 債券 옵션의 價格을 도출하려고 한다. 결론적으로 모형은 할인채권옵션가격들에 대한 세 요소 모형이다. 앞 장에서 우리는 평균회귀 항이 변동성의 기간구조에 중요한 영향을 미친다는 점에 대해 설명하였다. 變動性은 옵션가격을 결정하는 기초적인 결정요인이기 때문에 平均回歸는 단기간변동과 마찬가지로 채권옵션가격을 결정하는 결정적인 요소이어야 하며 이는 Lo & Wang(1995)의 연구와도 연관이 된다. 위험중립하에서 기초자산의 변동성에 대한 설정이 바뀔 경우에만 기대 수익률이 바뀌게 된다.  $\Theta(t)$ 는 이자율의 확률적 조건부평균을 설명하는 항으로, 역시 채권가격 즉 채권옵션의 기초자산의 가격에 영향을 미친다.

$K$ 로 할인채권을 기초자산으로 하는 유럽형 콜옵션의 행사가격을 나타내고  $\tau$ 는 옵션행사일까지의 기간을,  $\tau_p$ 는 옵션 행사일로부터 채권만기일까지의 기간이라 할 때, 債券 옵션의 價格은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} C(t, t + \tau, \tau_p) &= E^P[M(t, t + \tau_p)(P(t + \tau, t + \tau + \tau_p) - K)^+] \\ &= E^Q\left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} r(s)ds\right)(P(t + \tau, t + \tau + \tau_p) - K)^+\right] \end{aligned}$$

기댓값을 계산하면 아래의 채권옵션가격의 해를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} C(t, t + \tau, \tau_p) &= P(t, t + \tau + \tau_p)\Omega(\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \vartheta_3^*; 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1^*, w_2^*, w_3^*) \\ &\quad - KP(t, t + \tau)\Omega(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3; 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

여기서

$$\vartheta_1 = \frac{4\zeta\gamma_x^2}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau} - 1)(e^{\gamma_x\tau_p} - 1)A_x(\tau)A_x(\tau_p)}$$

$$\vartheta_2 = \frac{4\zeta\gamma_y^2}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau} - 1)(e^{\gamma_y\tau_p} - 1)A_y(\tau)A_y(\tau_p)}$$

$$\vartheta_3 = \frac{4\zeta\gamma_z^2}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau} - 1)(e^{\gamma_z\tau_p} - 1)A_z(\tau)A_z(\tau_p)}$$

$$\vartheta_1^* = \vartheta_1 + 2\zeta$$

$$\vartheta_2^* = \vartheta_2 + 2\zeta$$

$$\vartheta_3^* = \vartheta_3 + 2\zeta$$

$$w_1 = \frac{4\gamma_x A_x(\tau)e^{\gamma_x\tau}[(\alpha_z\kappa_y - \alpha_y\kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) + (\alpha_y - \alpha_z)\Theta(t)]}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau} - 1)D}$$

$$w_2 = \frac{4\gamma_y A_y(\tau)e^{\gamma_y\tau}[(\alpha_x\kappa_z - \alpha_z\kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) + (\alpha_z - \alpha_x)\Theta(t)]}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau} - 1)D}$$

$$w_3 = \frac{4\gamma_z A_z(\tau)e^{\gamma_z\tau}[(\alpha_y\kappa_x - \alpha_x\kappa_y)r(t) + (\kappa_y - \kappa_x)V(t) + (\alpha_x - \alpha_y)\Theta(t)]}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau} - 1)D}$$

$$w_1^* = \frac{8\gamma_x^3 A_x(\tau)e^{\gamma_x\tau}[(\alpha_z\kappa_y - \alpha_y\kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) + (\alpha_y - \alpha_z)\Theta(t)]}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau} - 1)[2\gamma_x^2 + \alpha_x(e^{\gamma_x\tau} - 1)(e^{\gamma_x\tau_p} - 1)A_x(\tau)A_x(\tau_p)]D}$$

$$w_2^* = \frac{8\gamma_y^3 A_y(\tau)e^{\gamma_y\tau}[(\alpha_x\kappa_z - \alpha_z\kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) + (\alpha_z - \alpha_x)\Theta(t)]}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau} - 1)[2\gamma_y^2 + \alpha_y(e^{\gamma_y\tau} - 1)(e^{\gamma_y\tau_p} - 1)A_y(\tau)A_y(\tau_p)]D}$$

$$w_3^* = \frac{8\gamma_z^3 A_z(\tau)e^{\gamma_z\tau}[(\alpha_y\kappa_x - \alpha_x\kappa_y)r(t) + (\kappa_y - \kappa_x)V(t) + (\alpha_x - \alpha_y)\Theta(t)]}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau} - 1)[2\gamma_z^2 + \alpha_z(e^{\gamma_z\tau} - 1)(e^{\gamma_z\tau_p} - 1)A_z(\tau)A_z(\tau_p)]D}$$

$$\zeta = 2\theta_x \log A_x(\tau) + 2\theta_y \log A_y(\tau) + 2\theta_z \log A_z(\tau) - \log K.$$

$\Omega(\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \vartheta_3^*; 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1^*, w_2^*, w_3^*)$ 는 세 변수 非中心카이제곱분포(noncentral chi-square distribution) 函數를 나타낸다.

$$\int_0^{\vartheta_1} \int_0^{\vartheta_2(1-\frac{u_1}{\vartheta_1})} \int_0^{\vartheta_3(1-\frac{u_1}{\vartheta_1}-\frac{u_2}{\vartheta_2})} \chi^2(u_1, 4\theta_x, w_1) \chi^2(u_2, 4\theta_y, w_2) \chi^2(u_3, 4\theta_z, w_3) du_1 du_2 du_3$$

여기서  $\chi^2(\cdot, p, q)$ 는 자유도가  $p$ 이고 非中心母數(noncentral parameter)가  $q$ 인 非中心카이 제곱密度(noncentral chi-square density)를 나타낸다. Longstaff and Schwartz(1992)의 논문에서와 마찬가지로 비중심카이제곱분포를 따르는 변수들인  $u_1, u_2, u_3$ 의 밀도의 곱은 그들의 聯合密度(joint density)이며 이는 세 변수들이 相互 獨立이기 때문이다. 적분은  $(0, 0, 0)$ ,  $(\vartheta_1, 0, 0)$ ,  $(0, \vartheta_2, 0)$  및  $(0, 0, \vartheta_3)$  네 점들에 의해 정의된 직사각형 범위에서 값을 구한다.  $\Omega(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3; 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1, w_2, w_3)$ 도 비슷하게 정의되었다. 이 삼변수적분은 Chen & Scott(1992)의 이변수적분으로부터 쉽게 도출할 수 있다. Longstaff & Schwartz와 마찬가지로 채권옵션가격에 대한 대부분의 比較靜態(comparative statics)들은 유의하지 않은 것으로 나왔다. 이 결과는 직관적으로 설명 가능하다. 즉 세 요소들이 채권가격 자체에 영향을 주는 동시에 다른 요소들, 예를 들면, 割引函數(discount function), 변동성 역시 옵션가격을 결정하기 때문이다.

#### 4. 結 論

본 연구는 短期利率의 平均回歸를 포함하는 3요소 이자율 모형을 사용하여 채권가격 및 이자율의 기간구조와 이자율 옵션의 가격 결정 모형을 유도하였다. 이 모형은 기존의 3요소 모형과 비교하여 요소들 간의 相互依存性を 허용한다는 측면에서 더욱 유연한 형태를 허용하게 되며, 평균회귀와 연계된 단기 이자율의 기대 변화가 Longstaff & Schwartz의 제한 조건을 확장시킬 수 있다. 따라서 이 모형은 이자율의 기간구조를 설명하는 데 있어서 기존의 모형들을 모두 포괄하면서 닫힌 형태의 채권 가격을 유도하게 되고, 아울러 평균회귀 향이 利率과 變動性的의 期間構造에 중요한 영향을 미치는 것을 설명하면서 이자율 옵션 가격 모형을 유도할 수 있다는 장점을 갖는다 하겠다.

서울대학교 經濟學部 副教授

151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1

전화: (02)880-5684

팩스: (02)886-4231

E-mail: ahnd@snu.ac.kr

## 參考文獻

- Ahn, D., and B. Gao(1995): "Endogenous Exchange Rate and Currency Option: Arbitrage Approach," unpublished manuscript, NYU.
- Balduzzi, P., S. R. Das, and S. Foresi(1993): "Understanding the Yield Curve: Evidence from a Three Factor Model of Interest Rate," Working Paper, NYU.
- \_\_\_\_\_(1994): "The Central Tendency: A Second Factor in the Short-Term Rate," Working Paper, NYU.
- Chen, L.(1995): "Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Three-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Pricing of Interest Rate Derivatives," Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Chen, R. R., and L. Scott(1992): "Pricing Interest Options in a Two- Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure," *Review of Financial Studies*, **5**, 613-636.
- Chung, K. L., and R. J. Williams(1990): *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser, Boston.
- Constantinides, G.(1992): "A Theory of the Nominal Structure of Interest Rates," *Review of Financial Studies*, **5**, 531-552.
- Cox, J. C., and C. Huang(1991): "Optimal Consumptions and Portfolio Policies When Asset Prices Follow Diffusion Process," *Journal of Economic Theory*, **49**, 33-83.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross(1979): "A Reexamination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **36**, 769-799.
- \_\_\_\_\_(1985a): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, **53**, 363-384.
- \_\_\_\_\_(1985b): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-406.
- Duffie, D.(1992): *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.
- Duffie, D., and R. Kan(1993): "A Yield-Factor Model of Interest Rates," Working Paper, Stanford University.
- Elliot, R.(1982): *Stochastic Calculus and Application*, Berlin, Springer-Verlag.
- Harrison, M., and D. Kreps(1979): "Martingale and Arbitrage in Multiperiod Security Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.
- Harrison, M., and S. Pliska(1981): "Martingale and Stochastic Integral in the Theory of Continuous

- Trading,” *Stochastic Processes and Their Application*, **11**, 215-260.
- Litterman, R., and J. Scheinkman(1991): “Common Factors Affecting Bond Returns,” *Journal of Fixed Income*, **1**, 54-61.
- Lo, A., and J. Wang(1995): “Implementing Option Pricing Models When Asset Returns Are Predictable,” *Journal of Finance*, **50**, **1**, 87-129.
- Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz(1992): “Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model,” *Journal of Finance*, **47**, 1259-1282.
- Pearson, N. D., and T. S. Sun(1994): “Exploiting the Conditional Density in Estimation the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model,” *Journal of Finance*, **49**, 1279-1304.
- Revuz D, and M. Yor(1990): *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York.
- Saa-Requejo(1993): “The Dynamics and the Term Structure of Risk Premia in Foreign Exchange Markets,” INSEAD Working Paper.
- Schaefer, S. M., and E. S. Schwartz(1987): “Time Dependent Variance and the Pricing of Bond Options,” *Journal of Finance*, **42**, **5**, 1113-1128.
- Singleton, K.(1994): “Persistence of International Interest Rate Correlation,” Working Paper, Stanford University.
- Stroock, D., and S. Varadhan(1979): *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, New York.
- Sundaresan, Mahadevan(1984): “Consumption and Equilibrium Interest Rates in Stochastic Production Economies,” *The Journal of Finance*, **39**, **1**, 77-92.
- Vasicek, O.(1977): “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.