더빈-와트슨 統計量, 폰·노이만 比 및 그 變形들 사이의 相互關係에 관한 一考察

鄭 基 俊*

〈目 次〉

I. 서 론

平均이 0이고 分散이 σ^2인 모집단으로부터 얻은 일련의 確率變數의 열을 u_1, $u_2, \cdots$, u_n이라 하자. 폰·노이만 [6]은 이 열에 계열상관이 존재하는가의 여부를 검정하기 위하여 다음과 같은 검정통계량을 정의하였다.

$$Q=\frac{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)^2}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2},\ \text{단 } \bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i.$$

이를 「폰·노이만 比」라 부른다. 그리고 특히

$$u_i\sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2),\ i=1,\ 2,\cdots,n$$

이라고 가정하면, 귀무가설을 u_i가 서로 계열독립, 즉

$$\mathrm{H}_0:\ \mathrm{E}(u_iu_j)=0,\ i\neq j$$

라 할 때, 이 귀무가설 하에서의 Q의 有意性限界는 하트 [2]의 계산 이래 이미 공표된 표가 나와 있으므로, u_i의 계열상관의 존재 여부는 통계량 Q를 써서 수행할 수 있다.

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授

그러나 線形模型의 분석의 경우처럼 그 모형에서 교란항이라고 불리우는 u_i들이 관측이 될 수 없는 경우에는 u_i에 관한 정보는 다만 최소자승법으로 계산되는 잔차에서 얻을 수 밖에 없는 수가 많다. 그리고 이 경우에는 비록 u_i가 계열독립이라 할지라도 잔차 e_i들은 그렇지 않기 때문에, 잔차 e_i들을 써서 교란항 u_i들의 계열상관의 존재를 검정하기 위해서는 폰·노이만 比를 쓰는 것이 합리화될 수 없다. 그리고 이 경우를 위하여 「더빈—와트슨 統計量」이 존재하는 것은 잘 알려진 사실이다.

최소자승잔차들이 e_1, e_2, $\cdots$, e_n으로 주어질 때 더빈—와트슨의 검정통계량은

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1}-e_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}$$

로 정의되며, 이를 써서 u_i들의 계열상관을 검정하는 절차는 잘 알려져 있다. 이 절차에 의하면, d는 설명변수들의 관측치행열에 의존하기 때문에 그 관측치행열에 의존하지 않는 d의 분포의 상한이 되는 d_U와 그 하한이 되는 d_L의 분포를 귀무가설 하에서 구하여 d_U와 d_L의 유의성한계를 계산하고 이를 이용하여 u_i들의 계열상관을 검정한다. 그러나 이 절차에 따르면 판정불가능한 영역이 발생한다는 단점이 있다.

그런데 최근 이 단점을 보완하기 위한 방법의 하나로 타일 〔9, 10〕은 BLUS잔차(the best linear unbiased residuals with scalar covariance matrix)를 개발하였다. k개의 설명변수(상수항 포함)와 n개의 관측치로 된 선형모형에서 교란항을 u_1, u_2, $\cdots$, u_n이라 하면 그에 대응하는 최소자승잔차는 n개 모두가 정의된다. 그러나 u_i들의 공분산행열이 스칼라행열일 때, 즉 계열독립일 때, BLUS잔차 $\hat{e}_i$들이 역시 스칼라공분산행열을 갖게 되는 것은 $n-k$개뿐이다. 그리하여 예컨대 BLUS잔차들은 $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2, \cdots$, $\hat{e}_{n-k}$로 된다고 하자. 이 BLUS잔차들로 u_i들의 계열상관을 검정하기 위해서는 다음과 같이 폰·노이만 비를 만들 수 있을 것이다. 즉

$$Q_s=\frac{\frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n-k-1}(\hat{e}_{i+1}-\hat{e}_i)^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}(\hat{e}_i-\bar{\hat{e}})^2},\text{ 단 }\bar{\hat{e}}=\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\hat{e}_i.$$

그러나 이 검정절차와 관련하여 문헌에는 Q_s의 두개의 변형이 발견된다. 그 하나는 프레스와 브룩스 〔7〕 및 타일 〔11〕에서 발견되는 것으로 다음과 같은 형태를 취한다.

$$Q_s'=\frac{\frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n-k-1}(\hat{e}_{i+1}-\hat{e}_i)^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\hat{e}_i^2}.$$

이 Q_s'과 Q_s를 비교해 보면, 분모에 $\bar{\hat{e}}$가 있고 없는 차이를 발견하게 된다. 설명변수 중에 상수항이 포함되는 경우 n개의 최소자승잔차 e_i들의 합은 0이다. 그러나 $n-k$개의 $\hat{e}_i$의 합은 반드시 0은 아니다. 그러므로 Q_s와 Q_s'은 확실히 차이가 있다.

Q_s의 또 하나의 변형은 코르쯔와 아브라함세 〔4〕에 제시된 것으로 다음과 같다.

$$Q_s^*=\frac{\sum_{i=1}^{n-k-1}(\hat{e}_{i+1}-\hat{e}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n-k}(\hat{e}_i-\bar{\hat{e}})^2}.$$

이를 Q_s와 비교해 보면 $n-k$ 및 $n-k-1$이라는 인수가 있느냐 없느냐의 차이이며, 따라서 이들 사이의 관계는 언제나, 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉

$$Q_s=\frac{n-k}{n-k-1}Q_s^*.$$

$$Q_s^*=\frac{n-k-1}{n-k}Q_s.$$

Q_s와 그 변형인 Q_s^* 간의 관계는 폰·노이만 비 Q와 그 변형인 Q^*, 즉

$$Q^*=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

간에도 그대로 적용된다. 즉

$$Q=\frac{n}{n-1}Q^*.$$

$$Q^*=\frac{n-1}{n}Q.$$

(여기서 폰·노이만 비 Q의 또 하나의 변형으로서 Q_s와 Q_s'의 관계에 대응하는 Q'도 정의할 수 있을 것이다. 그러나 Q_s' 자체를 포함하여 Q'은 그 유용성을 발견할 수 없으므로 여기서 그들에 관한 논의는 더 이상 진행시키지 않으려 한다.)

대부분의 계량경제학 교과서에는 더빈—와트슨의 검정통계량 d의 상한과 하한인 d_U와 d_L

그리고 폰·노이만 비 Q의 유의성한계표가 제시되어 있다. Q_s'의 표는 프레스와 브룩스 〔7〕 및 타일 〔11〕에서 찾아볼 수 있고, Q^* 또는 Q_s^*의 표는 Q의 표에서도 쉽게 유도할 수 있는 것이지만 코르쯔와 아브라함세 〔4〕에는 보통 볼 수 있는 Q의 표에서 얻을 수 없는, 보다 상세한 Q_s^*의 표가 계산 수록되어 있다. 또 이들은 d_U와 d_L에 관한 보다 상세한 표도 계산 수록하고 있다.

역사적으로 보면 폰·노이만 비 Q가 가장 먼저이다. 그리고 더빈과 와트슨 〔1〕은 여러가지 가능한 계열상관검정통계량 가운데, 폰·노이만 비 Q를 의식하면서 d를 정의하였다.(1) 그리고 d를 역으로 모방하여 Q를 변형한 것이 Q^*라고 말할 수 있다. 그러므로 d와 Q의 관계, d와 Q^*의 관계는 밀접한 것으로 생각된다. 그러나 기존문헌에서 이들 간의 관계가 엄밀하고 충분히 명시적으로 언급 또는 파악되고 있지 않은 것같다. 그 대표적인 증거로 d와 Q 또는 d와 Q^*를 모두 설명하면서도 이들 간의 관계에 관한 언급을 하고 있지 않거나 하고 있다 하더라도 엄밀성을 결여하고 있다. 예컨대 존스톤 〔3, pp. 250~51〕과 코우트소야니스〔5, pp. 212~14〕는 폰·노이만 비를 u_i들로가 아니라 e_i들로 정의할 때, Q와 d의 형식적인 관계만을 언급하고 Q는 대표본의 경우에만 근사적 검정통계량으로 이용할 수 있다고 말하고 있을 뿐이다. 또 하나의 증거로 Q와 d 또는 Q^*와 d에 관한 표를 동시에 수록하면서도 이 표들 간의 관계에 대해서는 누구도 언급하고 있지 않다.(2) 본 논문에서는 검정통계량 d와 Q의 관계를 엄밀히 구명하여, Q^*가 설명변수로서 상수만 존재하는 경우의 d와 일치한다는 사실과 이 경우 d_U와 d_L의 구별은 존재하지 않는다는 사실을 밝힘으로써, 역사적인 증거를 남길 목적만 포기한다면, 폰·노이만 비 Q를 Q^*로 변형하여 정의하면서, d와 Q^*에 관한 표를 통합하여 작성함이 합리적임을 밝히고자 한다.

II. 폰·노이만 비의 성격 규정

다음과 같이 정의되는 표준선형모형을 고려하자.

$$y_i=\beta_1+X_{i2}\beta_2+\cdots+X_{ik}\beta_k+u_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

즉 $$y=X\beta+u$$

단,

(1) "We ourselves have adopted a slight modification of the second, partly for reasons of computational convenience and partly because of similarity to von Neumann's statistic Q 〔6〕 already well known to research workers." Durbin and Watson 〔1, p. 424〕.

(2) 그러한 예로서는 코르쯔와 아브라함세 〔4〕, 존스톤 〔3〕, 타일 〔11〕 등을 들 수 있다.

$$X=\begin{bmatrix}1 & X_{12}\cdots X_{1k}\\ 1 & X_{22}\cdots X_{2k}\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ 1 & X_{n2}\cdots X_{nk}\end{bmatrix}=[\iota \vdots x_2\cdots x_k].$$

교란항의 벡터 u는 다음과 같이 분포한다. 즉

$$u\sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2\Omega)$$

단,

$$\Omega=\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \cdots\rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \cdots\rho^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots 1\end{bmatrix},\ |\rho|<1.$$

그리고 귀무가설을

$$\mathrm{H}_0:\ \rho=0$$

라 하면, H_0 하에서 $\Omega=I_n$가 된다.

β의 최소자승추정량을 $\hat{\beta}$, 이때의 잔차벡터를 e라 하면, 이들은 다음과 같이 정의된다. 즉,

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y.$$

$$e=y-X\hat{\beta}=(I-X(X'X)^{-1}X')y.$$

여기서 M을 $M=I-X(X'X)^{-1}X'$이라 정의하면,

$$e=My=Mu$$

임을 보일 수 있다.

이리하여 더빈-와트슨 통계량 d를 행열과 벡터로 나타내면 다음과 같다. 우선 분모는,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2=e'e=(My)'(My)=y'M'My=y'M^2y=y'My$$

가 된다. 이렇게 고쳐 쓸 수 있는 것은 M이 대칭이며 또 멱등행렬이기 때문이다. 그리고 $My=Mu$임을 고려하면 d의 분포는

$$e'e=y'My=u'Mu$$

가 된다. 그리고 d의 분자는 다음과 같이 나타낼 수 있다.(3)

$$\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1}-e_i)^2=e'A_de$$

단,

(3) 증명은 다음 절 (1)을 참조할 것.

$$A_d=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

그리고 e는 y 또는 u로 표현할 수 있으므로,

$$e'A_d e=y'MA_dMy=u'MA_dMu$$

가 되며, 따라서 d는 다음과 같이 여러 형태로 표현할 수 있다.

$$d=\frac{e'A_d e}{e'e}=\frac{y'MA_dMy}{y'My}=\frac{u'MA_dMu}{u'Mu}.$$

그런데 우리가 고려하고 있는 표준선형모형의 특수한 경우로서

$$y_i=\beta_1+u_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

즉

$$y=\iota\beta_1+u$$

인 경우를 생각해 보자. 이 경우 $X=\iota$이므로, M은

$$M=I-X(X'X)^{-1}X'=I-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota'=I-\frac{1}{n}\iota\iota'\equiv M^*$$

가 된다. 이 경우 M^*y는

$$M^*y=\left(I-\frac{1}{n}\iota\iota'\right)y=y-\iota\left(\frac{1}{n}\iota'y\right)=y-\iota\bar{y}$$

이다. 단,

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\iota'y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

이다. 그러므로, d의 분모는 다음과 같이 된다.

$$y'M^*y=(M^*y)'(M^*y)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

$$u'M^*u=(M^*u)'(M^*u)=\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2.$$

또 이 경우 d의 분자를 평가하기 위해서는 $M^*=I-\frac{1}{n}\iota\iota'$일 때,

$$M^*A_dM^*=A_d$$

가 된다는 사실을 이용할 수 있다.[4] 이 사실을 이용하면 d의 분자는 다음과 같이 된다.

(4) 증명은 다음 절 (2)를 참조할 것.

$$y'M^*A_dM^*y=y'A_dy=\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

$$u'M^*A_dM^*u=u'A_du=\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)^2.$$

그러므로 d는,

$$d^*=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

그런데 이 마지막 표현은 앞에서 정의한 Q^*와 일치한다. 즉 변형된 폰・노이만 비 Q^*는 $X=\iota$일 때의 더빈・와트슨 통계량 d와 엄밀히 일치한다.

III. 증 명

(1) $\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1}-e_i)^2=e'A_de$의 증명은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_2-e_1 \\ e_3-e_2 \\ \vdots \\ e_n-e_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}e-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}e$$

$$=\{[0 \vdots I_{n-1}]-[I_{n-1} \vdots 0]\}e.$$

그러므로

$$\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1}-e_i)^2=\begin{bmatrix} e_2-e_1 \\ e_3-e_2 \\ \vdots \\ e_n-e_{n-1} \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} e_2-e_1 \\ e_3-e_2 \\ \vdots \\ e_n-e_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$=e'\left\{\begin{bmatrix} 0' \\ \cdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \cdots \\ 0' \end{bmatrix}\right\}\{[0 \vdots I_{n-1}]-[I_{n-1} \vdots 0]\}e$$

$$=e'\left\{\begin{bmatrix} 0' \\ \cdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix}[0 \vdots I_{n-1}]+\begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \cdots \\ 0' \end{bmatrix}[I_{n-1} \vdots 0]-\begin{bmatrix} 0' \\ \cdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix}[I_{n-1} \vdots 0]\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \cdots \\ 0' \end{bmatrix}[0 \vdots I_{n-1}]\right\}e$$

$$= e'\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0' \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0' & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0' \end{bmatrix}\right\} e$$

$$= e'\left\{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & 0 & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \\ & 0 & & & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}\right\} e$$

$$= e'A_d e.$$

이로써 증명은 끝났다.

(2) $M^*A_dM^*=A_d$의 증명은 다음과 같다.

먼저 행열 A_d의 각 열의 원소의 합은 0이라는 사실, 그리고 각 행의 원소의 합도 0이라는 사실을 확인하자. 즉

$$\iota' A_d = 0.$$

$$A_d \iota = 0.$$

그러므로,

$$M^*A_dM^* = \left(I - \frac{1}{n}\iota\iota'\right)A_dM^* = A_dM^* - \frac{1}{n}\iota\iota'A_dM^* = A_dM^*$$

$$= A_d\left(I - \frac{1}{n}\iota\iota'\right) = A_d - \frac{1}{n}A_d\iota\iota' = A_d.$$

이 증명에서는 $\iota' A_d=0$, $A_d\iota=0$의 관계를 이용하였다. 그러나 보다 초보적인 증명은 $M=M^*$일 때,

$$e = Mu = u - \iota\bar{u}$$

에서,

$$e_i = u_i - \bar{u}$$

이며 따라서

$$e_{i+1} - e_i = (u_{i+1} - \bar{u}) - (u_i - \bar{u}) = u_{i+1} - u_i$$

라고 하는 사실에 의할 수도 있다.

IV. d의 상한과 하한 및 d^*

일반적으로 d의 분포는 관측치의 수 n과 설명변수의 수 k 이외에 $n \times k$행열 X 자체에 영향

을 받는다. 더빈과 와트슨 〔1〕은 X에 영향을 받지 않고 단지 n과 k에만 영향을 받는 유의성한계를 구하기 위하여 n과 k에만 의존하는 d의 상한 d_U와 하한 d_L을 찾아내고 이 d_U와 d_L의 분포로부터 유의성한계의 범위를 구하는 방법을 모색하였다. 이때 d의 상한인 확률변수 d_U와 하한인 확률변수 d_L은 다음과 같이 정의된다.

$$d_U = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_{i+k} z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-k} z_i^2}.$$

$$d_L = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_{i+1} z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-k} z_i^2}.$$

단, z_i들은 모두 서로 독립인 표준정규변량들이고 λ_i는 행열 A_d의 특성근들로

$$0=\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$$

과 같은 순서로 배열한 것이다. 따라서 d_U는 λ_{k+1}으로부터 λ_n까지의 $n-k$개의 λ에 의해서 정의되고, d_L은 λ_2로부터 λ_{n-k+1}까지의 $n-k$개의 λ에 의해서 정의된다.

그런데 $X=\iota$일 때의 d 즉 d^*는 $k=1$일 때에 해당하므로, d^*의 상한인 $d_U{}^*$는 λ_2로부터 λ_n까지의 $n-1$개의 λ에 의해서 정의될 것이고, $d_L{}^*$는 역시 λ_2로부터 λ_n까지의 $n-k$개의 λ에 의해서 정의되므로, $d_U{}^*=d_L{}^*=d$가 될 수 밖에 없다. 즉 이 경우에는 상한과 하한의 차이가 전혀 존재하지 않게 된다.

V. 더빈-와트슨 검정통계량의 유의성한계표의 확장

이상에서 우리는 폰·노이만 비와 더빈-와트슨 검정통계량 간의 관계를 명백히 하였다. 그리고 그 결과 폰·노이만 비가 더빈-와트슨 통계량의 특수 경우로 밝혀진 이상, 다같이 계열상관유무를 판정하기 위한 두 통계량의 유의성한계표를 분리시킬 필요가 전혀 없음을 알게 되었다.

폰·노이만 비의 유의성한계에 관한 표는 하트 〔2〕에 의해서 최초로 작성되었고 최근까지도 이 표가 유일한 것으로 이용되어 왔다. 그러나 코르쯔와 아브라함세 〔4〕에 의해서 보다 자세한 표가 변형된 폰·노이만 비 Q^*에 관하여 계산되었다.

더빈-와트슨 통계량의 유의성한계에 관한 표는 더빈과 와트슨 〔1〕에 의해서 작성된 것이

〈表 1〉 확장된 더빈-와트슨 유의성한계표

(유의수준 1%)

n	k=1	k=2		k=3		k=4		k=5		k=6	
	$d_L=d_U$	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
5	0.5379	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0.5614	0.390	1.142	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.6140	0.435	1.036	0.294	1.676	—	—	—	—	—	—
8	0.6647	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	—	—	—	—
9	0.7090	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	—	—
10	0.7517	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690
11	0.7915	0.653	1.010	0.519	1.287	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453
12	0.8280	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280
13	0.8619	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150
14	0.8932	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049
15	0.9222	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.464	0.488	1.704	0.391	1.967
16	0.9492	0.844	1.086	0.737	1.252	0.633	1.446	0.532	1.663	0.437	1.900
17	0.9744	0.874	1.102	0.772	1.255	0.672	1.432	0.574	1.630	0.480	1.847
18	0.9979	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.613	1.604	0.522	1.803
19	1.0199	0.928	1.132	0.835	1.265	0.742	1.415	0.650	1.584	0.561	1.767
20	1.0406	0.952	1.147	0.863	1.271	0.773	1.411	0.685	1.567	0.598	1.737
21	1.0601	0.975	1.161	0.890	1.277	0.803	1.408	0.718	1.554	0.633	1.712
22	1.0784	0.997	1.174	0.914	1.284	0.831	1.407	0.748	1.543	0.667	1.691
23	1.0958	1.018	1.187	0.938	1.291	0.858	1.407	0.777	1.534	0.698	1.673
24	1.1122	1.037	1.199	0.960	1.298	0.882	1.407	0.805	1.528	0.728	1.658
25	1.1277	1.055	1.211	0.981	1.305	0.906	1.409	0.831	1.523	0.756	1.645
26	1.1425	1.072	1.222	1.001	1.312	0.928	1.411	0.855	1.518	0.783	1.635
27	1.1566	1.089	1.233	1.019	1.319	0.949	1.413	0.878	1.515	0.808	1.626
28	1.1700	1.104	1.244	1.037	1.325	0.969	1.415	0.900	1.513	0.832	1.618
29	1.1828	1.119	1.254	1.054	1.332	0.988	1.418	0.921	1.512	0.855	1.611
30	1.1950	1.133	1.263	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.511	0.877	1.606
31	1.2067	1.147	1.273	1.085	1.345	1.023	1.425	0.960	1.510	0.897	1.601
32	1.2180	1.160	1.282	1.100	1.352	1.040	1.428	0.979	1.510	0.917	1.597
33	1.2287	1.172	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.996	1.510	0.936	1.594
34	1.2390	1.184	1.299	1.128	1.364	1.070	1.435	1.012	1.511	0.954	1.591
35	1.2490	1.195	1.307	1.140	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589
36	1.2585	1.206	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.988	1.588
37	1.2677	1.217	1.323	1.165	1.382	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.586
38	1.2766	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.585
39	1.2851	1.237	1.337	1.187	1.393	1.137	1.453	1.085	1.517	1.034	1.584
40	1.2934	1.246	1.344	1.198	1.398	1.148	1.457	1.098	1.518	1.048	1.584
45	1.3308	1.288	1.376	1.245	1.423	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.584
50	1.3629	1.324	1.403	1.285	1.446	1.245	1.491	1.205	1.538	1.164	1.587
55	1.3907	1.356	1.427	1.320	1.466	1.284	1.506	1.247	1.548	1.209	1.592
60	1.4152	1.383	1.449	1.350	1.484	1.317	1.520	1.283	1.558	1.249	1.598
65	—	1.407	1.468	1.377	1.500	1.346	1.534	1.315	1.568	1.283	1.604
70	—	1.429	1.485	1.400	1.515	1.372	1.546	1.343	1.578	1.313	1.611
75	—	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.587	1.340	1.617
80	—	1.466	1.515	1.441	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624
85	—	1.482	1.528	1.458	1.553	1.435	1.578	1.411	1.603	1.386	1.630
90	—	1.496	1.540	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636
95	—	1.510	1.552	1.489	1.573	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.642
100	—	1.522	1.562	1.503	1.583	1.482	1.604	1.462	1.625	1.441	1.647

〈表 2〉 확장된 더빈・와트슨 유의성한계표

(유의수준 5%)

n	$k=1$	$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$		$k=6$	
	$d_L=d_U$	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
5	0.8203	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0.8902	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.9359	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—
8	0.9817	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	—	—	—	—
9	1.0245	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—
10	1.0621	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.248	2.822
11	1.0965	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645
12	1.1276	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506
13	1.1558	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390
14	1.1816	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
15	1.2053	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.2271	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.2473	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.2660	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.2834	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
20	1.2996	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.3148	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
22	1.3290	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.3425	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
24	1.3551	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.3671	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.3784	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.3891	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861
28	1.3994	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.4091	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.4183	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833
31	1.4272	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.4356	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.4437	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.4515	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808
35	1.4589	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.4661	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799
37	1.4730	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.4796	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792
39	1.4860	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789
40	1.4921	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.5198	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.5435	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771
55	1.5640	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.5819	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	—	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	—	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	—	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770
80	—	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	—	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774
90	—	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	—	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	—	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780

최근까지 유일한 것이었으나 역시 코르쯔와 아브라함세 〔4〕에 의해서 보다 자세한 표가 작성되었다. 그리고 이 후자에 의해서 포괄되지 못한 부분(관측치의 수 및 설명변수의 수에 있어서)을 보완하는 작업이 세이빈과 화이트 〔8〕에 의해서 이루어져 있다.

더빈-와트슨 통계량에 관한 이 최근의 표들은 아직도 널리 알려져 있지 않고 있고, 또 이 표들 자체는 폰·노이만 비에 관한 표를 별개로 인식하여 분리해 놓고 있기 때문에 본논문에서 전개된 결과에 따라 이론적으로 완벽하고 최신의 결과를 종합한 더빈-와트슨 통계량의 유의성한계표를 〈表 1〉과 〈表 2〉로 제시하고자 한다.

이 표에서 $k=1$에 관한 것은 코르쯔와 아브라함세 〔4〕의 pp. 90~91의 표에서 얻었고, $k=2$에서 $k=6$까지 그리고 $n=15$에서 $n=100$까지는 그 책의 p. 176 이하의 표에서 얻었으며 그 범위를 벗어난 것에 관한 것은 세이빈과 화이트 〔8〕의 pp. 1992~95에서 얻었다.

참 고 문 헌

〔1〕 Durbin, J., and G.S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, I," *Biometrika*, 37 (1950); "II," *Biometrika*, 38 (1951). 서울大學校 經濟硏究所編, *Selected Articles in the Theory of Econometrics*(1976)에 再錄.

〔2〕 Hart, B.I., "Tabulation of Probabilities for the Ratio of the Mean-Square Successive Difference to the Variance," *Annals of Mathematical Statistics*, 13 (1942), pp. 207~214.

〔3〕 Johnston, J., *Econometric Methods*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1972.

〔4〕 Koerts, J., and A.P.J. Abrahamse, *On the Theory and Application of the General Linear Model*, Rotterdam Univ. Press, Rotterdam, 1971.

〔5〕 Koutsoyannis, A., *Theory of Econometrics*, 2nd ed., Macmillan Press, London, 1977.

〔6〕 von Neumann, J., "Distribution of the Mean Square Successive Difference to the Variance," *Annals of Mathematical Statistics*, 12 (1941), pp. 367-395. 서울大學校 經濟硏究所編, *Selected Articles in the Theory of Econometrics*(1976)에 再錄.

〔7〕 Press, S.J., and R.B. Brooks, "Testing for Serial Correlation in Regression," Report No. 6911, Center for Mathematical Studies in Business and Economics, The University of Chicago, 1969.

〔8〕 Savin, N.E., and K.J. White, "The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors," *Econometrica*, 45 (1977), pp. 1989~96.

〔9〕 Theil, H., "The Analysis of Disturbances in Regression Analysis," *Journal of the American Statistical Association*, 60, pp. 1067~79.

〔10〕 Theil, H., "A Simplification of the BLUS Procedure for Analysing Regression Disturbances," *Journal of the American Statistical Association*, 63, pp. 242~251.

〔11〕 Theil, H., *Principles of Econometrics*, Wiley, New York, 1971.