

Pseudo-compressibility 방법에서 이상유동 해석을 위한
Level Set 방법의 적용
Level Set Method Applied on Pseudo-compressibility Method
for the Analysis of Two-phase Flow

임승원* · 김종암* · 심재설** · 이동영**
Seung-Won Ihm*, Chongam Kim*, Jae-Seol Shim** and Dong-Young Lee**

요 지 : Level Set 방법을 사용하여 액체와 기체의 서로 다른 상을 함께 해석하는 연구를 수행하였다. Level Set 함수는 상의 경계면에서부터 부호를 갖는 거리함수로 정의되며, 계산 격자에서 함수 값의 부호에 따라 각 상을 구분하고 물성치를 부여한다. 본 논문에서는 비압축성 유체의 보존식에 Level Set 함수의 이동식을 연계하여 이상유동을 묘사하는 지배방정식을 구성하였으며, 이를 pseudo-compressibility 방법으로 함께 풀었다. 이 때 다양한 문제에 적용이 가능하도록 일반 곡선 좌표계에서 식을 유도하였고, 수치해석을 위한 행렬식들을 함께 유도하였다. 개발된 해석 코드를 표면장력이 있는 기포 동역학 문제와 수중익에 의한 파도 발생 문제에 적용하여 타당한 결과를 얻을 수 있었다.

핵심용어 : 이상유동, Level Set 방법, pseudo-compressibility 방법, 일반 곡선 좌표계, 기포 동역학, 파도 생성

Abstract : In order to analyze incompressible two-phase flow, Level Set method was applied on pseudo-compressibility formulation. Level Set function is defined as a signed distance function from the phase interface, and gives the information of the each phase location and the geometric data to the flow. In this study, Level Set function transport equation was coupled with flow conservation equations, and owing to pseudo-compressibility technique we could solve the resultant vector equation iteratively. Two-phase flow analysis code was developed on general curvilinear coordinate, and numerical tests of bubble dynamics and surging wave problems demonstrate its capability successfully.

Keywords : two-phase flow, Level Set method, pseudo-compressibility method, general curvilinear coordinate, bubble dynamics, surging wave

1. 서 론

액체와 기체의 서로 다른 상(phase)이 존재하는 문제는 조선 및 해양공학 분야를 비롯하여 유체기계, 원자력 공학 등에서 지속적인 관심의 대상이었다. 바람과 해류의 상호작용이 존재하는 해수면, 선박 프로펠러에서 압력 강하로 발생하는 공동(cavitation) 현상, 원자로 냉각 시스템에서의 비등(boiling) 현상 등을 이상유동(two-phase flow)의 예로 들 수 있다. 이상유동 문제를 수치적으로 해석하기

위해서는 물리량의 보존식 외에 상의 위치와 경계면에 대한 정보가 필요하다. 이를 위해 크게 경계면을 직접 추적하는 방법(Unverdi and Tryggvason, 1992 등)과 내재적인 함수를 사용하여 서로 다른 상을 구분하는 방법(Hirt and Nichols, 1981; Osher and Sethian, 1988 등)이 발달해 왔는데, 최근에는 복잡한 경계면 형상의 묘사가 가능하고 3차원 확장이 용이한 후자의 방법이 보다 선호되고 있다.

내재적인 함수를 이용하는 대표적인 방법으로 volume

* 서울대학교 기계항공공학부(Corresponding author: Chongam Kim, School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University, Seoul 151-744, Korea. chongam@snu.ac.kr)

**한국해양연구원 연안·항만공학연구본부(Coastal and Harbor Engineering Research Division, KORDI)

of fluid(VOF) 방법이 Hirt and Nichols (1981)에 의해 제안된 이후 널리 사용되고 있다. 이 방법은 계산격자에서 한쪽 상이 차지하고 있는 부피비를 이용해 두 상을 구분하며, 부피비의 값이 0과 1 사이인 영역은 상 경계면으로 간주한다. 한편 Osher and Sethian(1988)은 상 경계면에서 불연속이 되는 부피비 대신 각 상에서 서로 반대 부호를 갖는 연속 함수를 사용하는 Level Set 방법을 제안하였다. Level Set 함수는 “상 경계면으로부터 부호를 갖는 거리함수”로 정의되며, 함수의 부호에 따라 서로 다른 상을 구분하고, 함수값이 0인 곳이 상 경계면이 된다. Level Set 방법은 VOF 방법에 비해 상의 질량 보존면에서 약간의 손실이 있지만, VOF 방법에서 사용되는 경계면 재구성 알고리즘이 필요 없고, 경계면에 수직인 방향이나 곡률 등의 형상 정보를 보다 정확히 계산하는 것으로 알려져 있다(임승원 등, 2003).

현재까지 Level Set 방법을 이용한 이상유동 해석 연구는 직교 좌표계에서 진행되어 왔으며, 비압축성 지배방정식을 푸는 데에 projection 방법과 같은 pressure correction 방법이 사용되어왔다(Zhu and Sethian, 1992; Osher and Fedkiw, 2001). 본 연구에서는 유체의 보존식과 Level Set 함수의 이동식을 연계한 벡터식을 Chorin(1967)의 pseudo-compressibility 방법으로 함께 푸는 방법을 연구하였다. 이때 일반 곡선 좌표계에서 식을 유도하여 다양한 문제에 적용이 가능하도록 하였으며, 개발된 코드를 기포 동역학 문제와 수중익에 의한 파도 발생 문제에 적용하여 검증하였다.

2. 지배방정식

2.1 질량 및 운동량 보존식

해석 대상이 되는 비압축성 액체와 기체의 질량 보존식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

위 식에서 \mathbf{u} 는 속도 벡터를 나타낸다.

운동량 보존식은 중력과 표면장력이 고려된 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \sigma \kappa \delta \mathbf{n} \quad (2)$$

여기에서 ρ 는 밀도, μ 는 점성 계수로, 각 상에 따라 다른 값이 사용되며, \mathbf{g} 는 중력가속도 벡터이다. 표면장력항

$\sigma \kappa \delta \mathbf{n}$ 에서 σ 는 표면장력 계수, $\kappa (= \nabla \cdot \mathbf{n})$ 는 상 경계면의 곡률, \mathbf{n} 은 경계면에 수직인 방향을 나타낸다. δ 는 상 경계면에서만 작용하는 dirac delta 함수이다.

초기의 압력 구배가 중력에 의해 수정역학적 평형(hydrostatic equilibrium) 상태 $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ 를 이루고 있다고 가정하면, 유동에 의한 압력의 변화를 살펴보기 용이하다. 이 때, p_0, ρ_0 는 수정역학적 평형 상태의 압력과 밀도이고, $\rho = \rho_0 + p', p = p_0 + p'$ 으로부터 식 (2)는 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{g} + \frac{\sigma \kappa \delta \mathbf{n}}{\rho} \quad (3)$$

식 (3)에서 초기 조건의 압력 변량 $p'=0$ 이 된다.

2.2 Pseudo-compressibility 방법

식 (1)과 (3)을 벡터 방정식으로 연계하여 함께 풀고자 할 때, 식 (1)에는 시간에 대한 미분항이 없으므로 해를 구하기가 어려워진다. Chorin(1967)은 비압축성 질량 보존식을 시간에 대한 쌍곡선형(hyperbolic) 방정식으로 만들어주기 위하여 다음과 같이 가상 시간(pseudo time) τ 의 개념을 도입하였다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{g} + \frac{\sigma \kappa \delta \mathbf{n}}{\rho} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (5)$$

식 (4), (5)는 τ 에 대한 수렴해를 구하면 본래의 식 (1), (3)으로 회복되고, 주어진 식은 가상 시간에 대해 쌍곡선형이므로 반복적인 방법으로 해를 구할 수 있게 된다. 식 (4)의 β 는 가상 압축성 계수로, 본 연구에서는 음적 시간 적분법을 사용할 때 일반적으로 사용되는 무차원화 값 20을 사용하였다(Ok, 1993).

2.3 Level Set 방법

Level Set 함수 ϕ 는 상 경계면에서 0의 값을 갖고, 한쪽 상으로는 양의 거리함수, 다른 상으로는 음의 거리함수가 된다. 상의 경계면은 유동장의 속도를 따라 이동할 것이므로 다음과 같은 Level Set 함수의 이동식을 구성할 수 있다(Sussman, 1994).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (6)$$

Pseudo-compressibility 방법에 적용하기 위해 가상 시

간 τ 에 대한 미분항을 포함하면 식 (6)은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7)$$

이제 위 식 (7)을 풀면 시간에 따른 경계면의 위치를 알게 되고, 다음과 같이 ϕ 의 부호에 따라 서로 다른 상의 물성치를 부여할 수 있다.

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H_\varepsilon(\phi), \quad \mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H_\varepsilon(\phi)$$

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon \\ \frac{\phi + \varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{\sin(\pi\phi/\varepsilon)}{2\pi} & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

하첨자 1과 2는 유체 1과 2를 나타내며, H_ε 는 물성치 증분을 나타내는 Heaviside 함수이다. ε 은 수치적인 안정성을 확보해 주기 위한 경계두께로, 격자크기의 1.5배 값이다.

Fig. 1은 Level Set 함수에 따른 물성치 부여의 예를 보여준다. 그림의 상단과 같은 계산 격자에서 물리적인 상 경계면이 존재하는 위치의 ϕ 값은 0이 되고, 오른쪽으로는 양의 거리함수, 왼쪽으로는 음의 거리함수가 된다면 각 계산 격자에서 ϕ 의 값은 색칠된 원과 같이 나타날 것이다. 물리적으로는 밀도나 점성계수가 상 경계면에서 급격히 변화하지만, 식 (8)로 부여되는 수치적인 물성치는 경계 두께 내에서 점차 변하는 값을 갖는다.

식 (5)에서 나타나는 표면장력항에서 경계면에 수직인 방향 \mathbf{n} 과 dirac delta 함수 δ 는 Level Set 함수 ϕ 로부터 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{n}(\phi) = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (9)$$

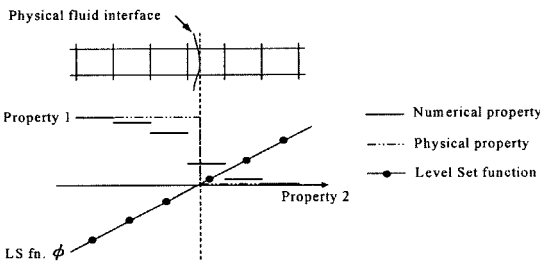


Fig. 1. Numerical property in Level Set approach.

$$\delta = \delta(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\phi/\varepsilon))/\varepsilon, & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

식 (10)은 경계면 근처의 경계두께 2ε 내에서 표면장력이 작용하도록 한 것이다(Brackbill et al., 1992).

한편 식 (7)을 풀어나가는 동안에도 Level Set 함수를 거리함수로 유지하기 위하여 다음과 같은 재초기화 식을 풀어 $|\nabla \phi| = 1$ 을 만족시키도록 ϕ 의 값을 수정한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \quad (11)$$

식 (11)을 푸는 주기는 상 경계면이 움직이는 양상에 따라 경험적으로 주어진다. 본 연구에서 4.1, 4.2절의 수치 예제에서는 물리적인 시간간격 Δt 가 10번 지날 때마다, 4.3절의 수치 예제에서는 가상 시간간격 $\Delta \tau$ 가 500번 지날 때마다 식 (11)을 경계두께 내에서 수행시켰다.

2.4 일반좌표계에서 이상유동의 지배방정식

임의의 형상에 대한 유동해석을 위하여 $\xi - \eta$ 일반 곡선 좌표계에 대하여 식을 전개하였다. $x-y$ 좌표계에서 $\xi - \eta$ 좌표계로의 변환은 다음과 같다(Hoffmann, 2000).

$$\begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ 는 변환 metric 이고, $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ 이다.

이제 유동장의 지배방정식 (4), (5)와 Level Set 함수의 이동식 (7)을 일반좌표계에서 벡터형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = S_v + S_g + S_s - S_t \quad (12)$$

$$Q = \begin{bmatrix} p'/\rho(\phi) \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix}, \quad E = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + \xi_x p'/\rho(\phi) \\ uU + \xi_y p'/\rho(\phi) \\ \phi U \end{bmatrix}$$

$$S_{ij} = \frac{\mu(\phi)}{J\rho(\phi)} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ u_{xx} + u_{yy} & & & \\ v_{xx} + v_{yy} & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad S_s = \frac{1}{J\rho(\phi)} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \tau\kappa(\phi)\delta(\phi)n_x(\phi) & & & \\ \tau\kappa(\phi)\delta(\phi)n_y(\phi) & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$S_t = \frac{1}{J\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \phi \end{bmatrix}$$

위 식에서 S_v 는 점성항, S_g 는 중력항, S_s 는 표면장력항을 나타내며, S_t 는 물리적인 시간 t 에 대한 미분항으로 본 연구에서는 2차의 후방차분을 사용하였다. $J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$ 로 주어지며, 반전속도 $U = \xi_x u + \xi_y v$, $V = \eta_x u + \eta_y v$ 로 각각 $\xi, \eta = \text{const.}$ 인 면에 수직이다.

3. 수치해석 방법

3.1 시간 적분 방법

효율적인 계산을 위해 비점성 플럭스 E, F 를 내재적으로 계산하면, 식 (12)는 다음과 같이 정리된다(Hoffmann, 2000).

$$\left(\frac{1}{J\Delta\tau} + \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) \Delta Q = \left[- \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + S_v + S_g + S_s - S_t \right]^n = -R^n \quad (13)$$

여기에서 $\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n$ 이고, n 은 가상시간의 time level이다. 미지량 Q^{n+1} 을 효율적으로 구하기 위해 ΔQ 값의 행렬을 푸는 데는 Yoon and Jameson (1988)의 LU-SGS 방법을 사용하였다. Jacobian 행렬 $A = \frac{\partial E}{\partial Q}$, $B = \frac{\partial F}{\partial Q}$, 이고, 3.2절에 자세히 기술하였다. 가상시간에 대해서는 정상(steady) 상태의 결과만 의미가 있으므로, $\Delta\tau$ 의 결정에는 국소 시간 전진법을 사용하였다(Hirsh, 1989).

3.2 공간 이산화 방법

식 (13)에서 비점성 플럭스 E 와 F 를 Rogers and Kwak (1990)의 풍상차분법으로 계산하였다. 이 방법은 제어면에서의 플럭스 차이를 지배방정식의 고유값에 따라 나누게 되며, 본 연구에서 이상유동 해석을 위해 Level Set 함수의 이동식을 포함하여 다시 유도하였다.

ξ 방향의 플럭스 E 에 대한 차분 $\frac{\partial E}{\partial \xi} = E_{i+1/2} - E_{i-1/2}$ 에서 $i+1/2$ 제어면에서의 플럭스는 다음과 같이 결정된다(Rogers and Kwak, 1990).

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2}(E_i + E_{i+1}) - \frac{1}{2}(\Delta E_{i+1/2}^+ - \Delta E_{i+1/2}^-) \quad (14)$$

$$\Delta E_{i+1/2}^\pm = A^\pm(\bar{Q})\Delta Q_{i+1/2} \quad (15)$$

\bar{Q} 는 경계면에서의 물성치로, 양쪽 격자의 물성치를 산술평균한 값이다. 이상유동 지배방정식의 Jacobian 행렬 A 는 다음과 같이 유도된다.

$$A = \frac{\partial E}{\partial Q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 & \beta \xi_x & \beta \xi_y & 0 \\ \xi_x U + \xi_x u & \xi_x u & 0 & 0 \\ \xi_y & \xi_x v & U + \xi_y v & 0 \\ 0 & \xi_x \phi & \xi_y \phi & U \end{pmatrix} \quad (16)$$

이제 식 (15)의 A^\pm 는 다음과 같이 행렬 고유값의 부호에 따라 분할된다.

$$A^\pm = \frac{1}{J} \Lambda^\pm X^{-1} \quad (17)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U+D \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D(U+D) & -D(U-D) \\ 0 & -\xi_y & \xi_y V - \xi_x D & \xi_y V + \xi_x D \\ 0 & \xi_x & -\xi_x V - \xi_y D - \xi_x V + \xi_y D \\ 1 & 0 & \phi(\xi_x^2 + \xi_y^2) & \phi(\xi_x^2 + \xi_y^2) \end{pmatrix}$$

이 때 Λ 의 대각성분이 행렬 A 의 고유값이며, Λ^\pm 는 고유값의 부호에 따라 나뉜다. X 는 고유값에 따른 고유 벡터 행렬이고, 위 식에서 $D = \sqrt{U^2 + \beta(\xi_x^2 + \xi_y^2)}$ 이다. η 방향의 플럭스 F 에 대한 Jacobian 행렬 B 의 분할 과정은 위에서 ξ 와 η 방향의 성분만 서로 바꾸어주면 된다.

고차의 공간 정확도를 얻기 위해 제어면 왼쪽과 오른쪽의 물성치는 3차의 MUSCL 방법을 사용하였다(Hirsh, 1989). 이 때 급격한 물성치의 변화가 있는 영역에서 수치적인 안정성과 정확성을 확보해주기 위하여 minmod와 van Leer 제한자(limiter)를 사용하였다(Hirsch, 1989). 한편 점성 플럭스의 경우에는 2차의 중심차분을 사용하였다.

3.3 경계조건

4.1절과 4.2절의 해석 예제에서 벽면은 모두 점착(non-slip) 조건을 사용하였다. 4.3절에서는 비점성 해석을 수행하였으므로, 미끄럼(slip) 벽면 조건을 사용하였다. 원방 조건으로는 유동이 유입류인 경우에 압력을 외삽하고, 유출류인 경우에는 배압을 부여하였다. 본 연구에서는 두 상의 유동을 모두 풀기 때문에 상 경계면의 경계조건은 따로 부여할 필요가 없다.

4.3절의 파도 생성 예제에서는 유출류 경계에서 반사파를 최소화시키기 위한 부가 감쇄 영역(sponge layer, or absorbing beach)을 다음과 같이 설정하였다(Barone 2003).

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + R(Q) = -a(x)(Q - Q_{ref}) \quad (18)$$

$$a(x) = a_0 \left[\frac{x+L-x_0}{L} \right]^3, x_0 - L \leq x \leq x_0$$

본 연구에서는 선형이론에서 예측된 파장의 길이를 부가 감쇄 영역의 길이 L 로 하였고, 강도 a_0 는 8로 설정하였다. Q_{ref} 는 Q 벡터의 초기값이다.

4. 수치해석 결과

4.1절과 4.2절에서는 점성력과 중력, 표면장력을 포함한 해석코드를 검증하기 위하여 수중의 기포 상승 문제를 해석하였다. 기포 상승 문제에서는 유동 조건에 따른 기포의 형상 특징과 상승 속도가 주요 검증 대상이 된다. 4.3절에서는 수중익에 의한 파도 발생 문제를 통해 개발된 해석코드가 일반 곡선 좌표계에서 작동함을 보이고, 바람과 해수의 큰 밀도차를 동시에 고려하는 해양과학 문제에 대한 적용 가능성을 살펴보았다.

4.1 Chang의 기포 상승 문제

Chang et al.(1996)은 Level Set 방법을 사용하여 두 개의 밀도가 같은 기포가 부력에 의해 떠오르며 병합하

는 문제를 해석하였다. 이때 지배방정식은 Boussinesq 가정을 하였고, 무차원화된 격자간격 0.004로 256×256의 정방 직교격자를 사용하였다. 초기에 아래쪽의 기포는 (0.5, 0.35)를 중심으로 반지름이 0.1이고, 위쪽의 기포는 (0.5, 0.65)를 중심으로 반지름이 0.15이다. 기포와 주위 유체의 밀도는 각각 1과 10이며, 무차원 점성계수는 0.00025와 0.0005이다. 표면장력 계수 $\sigma=0.005$ 로 비교적 표면장력이 크지 않아 skirt와 같은 현상이 발생하였다.

Fig. 2에 Chang et al.(1996)의 결과를 0.1초 간격으로 나타내었고, Fig. 3에 본 연구의 결과를 도시하였다. 기포의 상승 속도와 형상이 거의 일치함을 확인할 수 있다.

4.2 Unverdi의 기포 상승 문제

Unverdi et al.(1992)은 경계면을 직접 추적하는 방법을 사용하여 밀도가 각각 1과 40인 예제를 해석하였다. 무차원 점성계수는 기포에서 0.0002614, 주위 유체는 0.0230043이고, 표면장력 계수 $\sigma= 0.0882$ 로 비교적 표면 장력이 큰 문제이다. 사용 격자계는 격자간격 0.001의 64×128 정방 직교격자이다. Fig. 4에 Unverdi et al.(1992)의 결과를 제시하였는데, 원 논문에 시간 간격에 대한 언급은 없었다.

Fig. 5는 본 연구에서 해석한 결과이다. 기포의 병합시 두 기포가 맞닿는 부분의 곡률이 매우 커지므로, 표면장력이 크게 발생하여 병합이 급격히 이루어졌다. 하지만

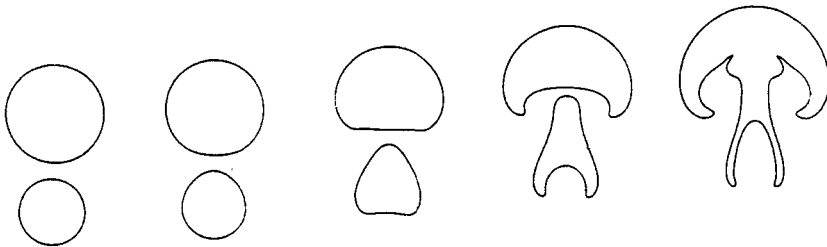


Fig. 2. Bubble shape of Chang et al. at t=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 sec.

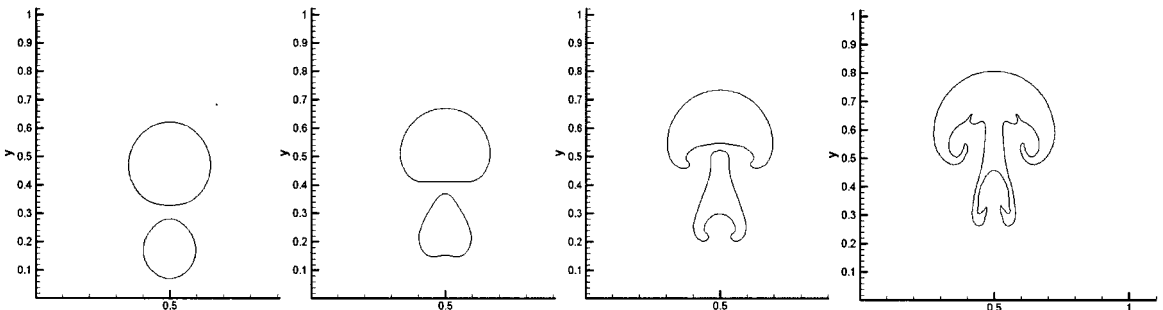


Fig. 3. Bubble shape of present approach at t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 sec.(non-dimensional size)

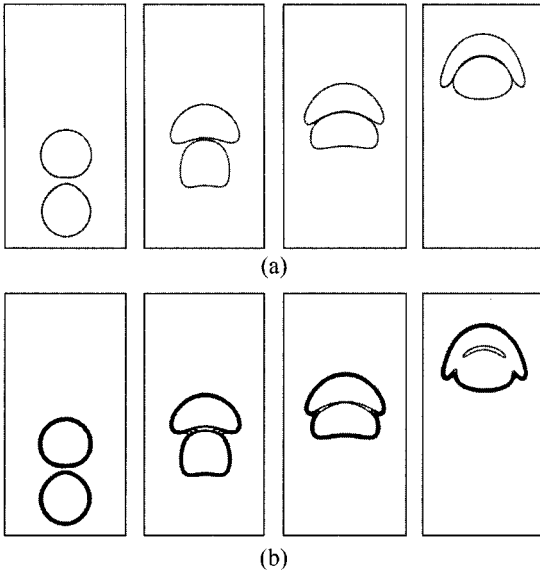


Fig. 4. Bubble shape (a) and indicator function (b) of Unverdi et al.(1992).

Fig. 4에서는 경계면 추적 방법의 한계로 상의 병합이 잘 이루어지지 않아, 상의 병합 이후에도 경계면을 나타내는 indicator 함수가 내부에 남아있는 것을 볼 수 있다. Unverdi et al.(1992)은 같은 논문의 단일 기포 상승 문제에서 유동영역에 따른 기포의 최종 형상에 대한 연구를 수행하였는데, 본 예제 조건의 경우에는 최종적으로

spherical cap 형태가 된다. 따라서 Fig. 5의 최종 결과 역시 타당한 것으로 판단된다.

4.3 수중익에 의한 파도 발생 문제

마지막 해석 예제로 수심 $c^* = 1.034$ m에 잠겨있는 길이 $L_0 = 1$ m의 익형이 $U_0 = 1.8049$ m/s의 속도로 전진하면서 파도가 생성되는 문제를 해석하였다(Liou, 2001). 수치해석에서는 Fig. 6에 도시한 바와 같이 바람과 해류의 자유류 속도를 U_0 로 하였다. 바람의 속도가 낮기 때문에 바람이 해류에 주는 영향은 크지 않지만, 본 연구에서 개발된 코드를 일반 좌표계에 적용하고, 향후 바람과 해류와 같이 밀도차가 큰 문제를 동시에 모사해야 하는 연구에 대한 적용 가능성을 살펴보기 위하여 예제 문제로 채택하였다. Liou(2001)는 비정렬 적용 격자를 사용하여 물에 대한 부분만 비점성으로 해석하였는데, 이처럼 물만을 해석하고 자유면에 경계조건을 부여하는 접근법은 국내에

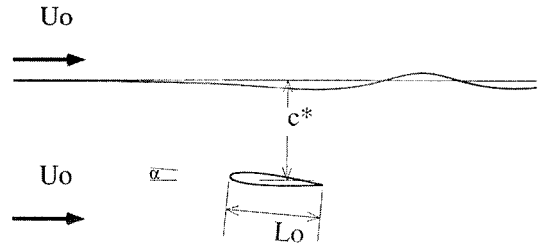


Fig. 6. Surging wave problem.

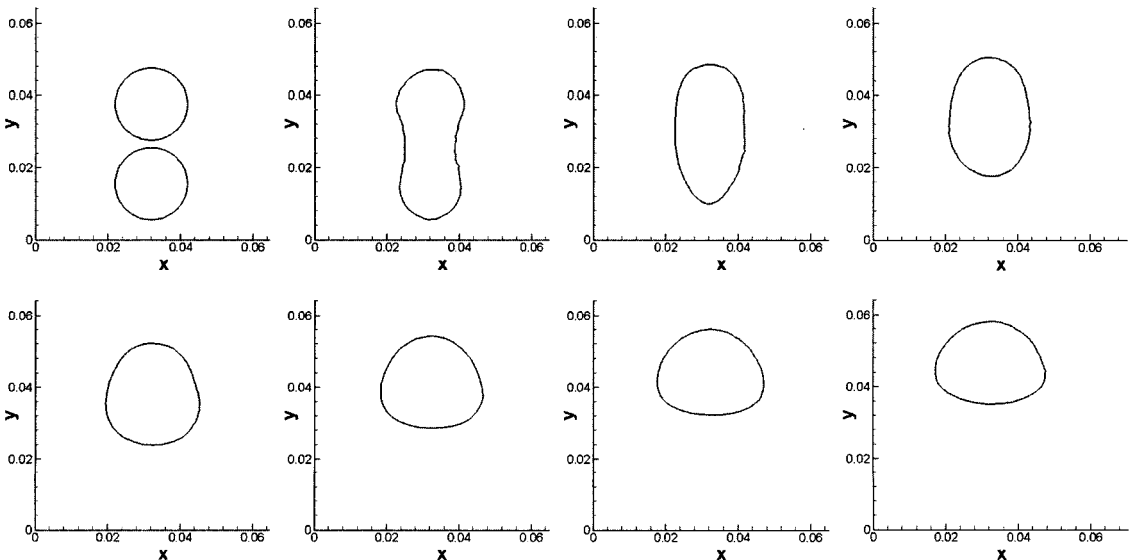


Fig. 5. Present result at every 0.02 sec. (non-dimensional size)

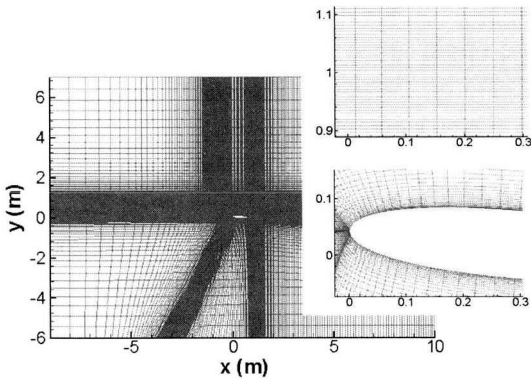


Fig. 7. Computational region and grid.

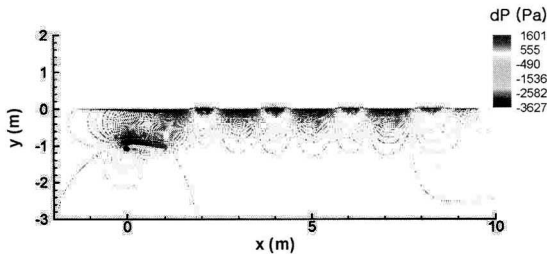


Fig. 8. Pressure variation due to hydrofoil.

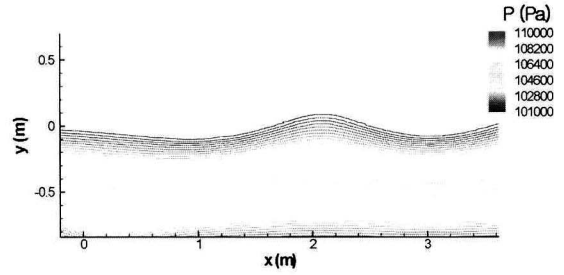


Fig. 9. Pressure around wave surface.

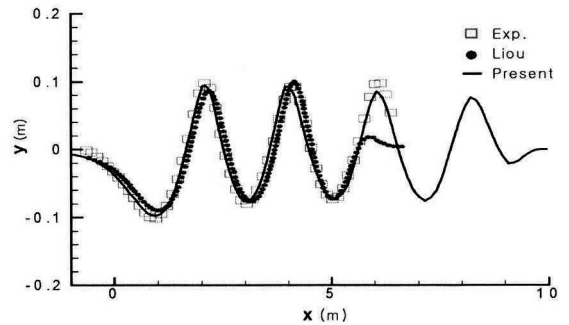


Fig. 10. Comparison of wave elevation.

서도 VOF 방법으로 해석된 바 있다(김도삼 등, 2002; 허동수·김도삼, 2003). 본 연구에서는 물과 공기의 이상유동 영역을 모두 해석하였으며, Liou와 마찬가지로 비점성 유동을 가정하였다.

해석문제의 수중익형은 받음각 $\alpha=5^\circ$ 인 NACA0012를 사용하였다. Froude 수 $Fr = U_0/\sqrt{gc^*} = 0.567$ 이므로, 선형이론에 의한 수면파의 길이 $\lambda=2\pi Fr^2 = 2.02$ m로부터 3.3 절에서 언급한 부가 감쇄 영역을 $7.98m \leq x \leq 10m$ 에 설정하였다. 물과 공기의 밀도는 각각 1.226 kg/m^3 과 1000 kg/m^3 이고, 표면장력 계수 $\sigma = 0.0882 \text{ kg/s}^2$ 을 사용하였다(노오현, 1992). Fig. 7에서 전체 계산 영역에 대한 231×201 의 해석격자와 수중익 및 수면 근처의 격자를 보여주고 있다. 수면 근처에서 수면에 수직인 방향의 격자 간격이 0.01 m 미만이 되도록 해주었기 때문에, Level Set 함수의 경계두께 $\epsilon = 0.02$ m로 하였다.

해석 결과 Fig. 8~11에서는 편의상 수면의 위치를 $y=0$ 으로 하여 나타내었다. Fig. 8 수중익에 의한 압력 변화량에서, 수중익 상부의 압력이 낮아짐에 따라 수면이 아래로 내려오게 되고, 이후 파도가 발생한 것임을 알 수 있다. Fig. 9에 수면 근처의 실제 압력(대기압은 101325Pa)을 도시하였다. 물의 밀도로 인해 $-y$ 방향으로의 압력이 증

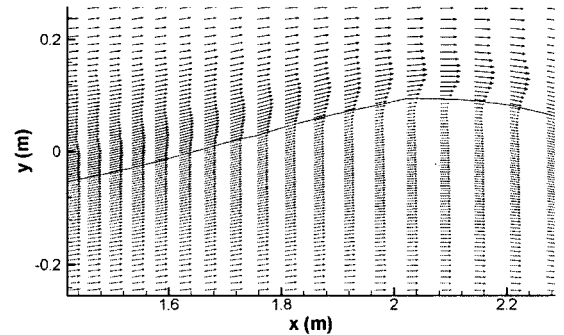


Fig. 11. Velocity vectors near the interface.

가하는 모습과 수중익 전두부가 존재하는 $x=0$ 직후의 압력강하를 확인할 수 있다. 해수면의 모습을 Fig. 10에서 실험치 및 Liou(2001)의 결과와 비교하였다. Liou (2001)의 계산 결과는 부가 감쇄 영역을 $x=5$ 부터 설정한 것이다. 이상유동을 모두 해석한 본 연구의 해석 결과 얻어진 파형이 실험치 및 Liou(2001)의 결과와 거의 일치함을 확인할 수 있다. 수면파의 파장 길이는 선형이론에서 예측한 값과 거의 일치한 2.01을 얻을 수 있었으며, 본 연구에서는 이상유동 결과로부터 Fig. 11과 같이 공기부의 유동 변화를 함께 살펴볼 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 비압축성 이상유동 해석을 위해 Level Set 함수의 이동식을 포함한 pseudo-compressibility 방법을 제시하였다. 질량 및 운동량 보존식과 함께 Level Set 함수의 이동식을 벡터형으로 함께 연계하여 풀어낼 수 있었으며, 다양한 문제에 적용이 가능하도록 일반좌표계에서 식을 유도하였다. 수치기법으로 사용한 내재적 시간적분과 풍상차분법에 사용되는 지배방정식의 Jacobian 행렬과 행렬의 고유값, 고유벡터를 제시하였다. 점성력과 중력, 표면장력을 고려한 해석코드를 수중 기포거동 문제와 파도생성 문제에 적용하여 검증하였다. 해양공학 문제는 난류 영역에 포함되는 경우가 많기 때문에, 향후 난류 효과를 포함하는 연구가 필요할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 '이어도 종합해양과학기치 활용연구(KORDI PE29200)' 사업의 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 김도삼, 이광호, 김정수 (2002). 수중투과성구조물에 의한 쇄파를 수반한 파랑변형 및 유속장 해석. 한국해양·해양공학회지, 14(2), 171-181.
- 노오현 (1992). 점성유체역학기초. 박영사.
- 임승원, 최영심, 김종암 (2003). 다상 유동 해석을 위한 Level Set 기법과 volume of fluid 기법의 비교 연구. 한국항공우주학회 추계학술대회 논문집, KSAS03-2214.
- 허동수, 김도삼 (2003). 경사수역에 설치된 잠체 주변의 유속장과 와의 발생에 대한 수치모의. 한국해양·해양공학회지, 15(3), 151-158.
- Barone, M.F. (2003). Receptivity of compressible mixing layers. Ph.D. Dissertation, Stanford Univ., U.S.A.
- Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C. (1992). A continuum method for modeling surface tension. J. Comput. Phys., 100, 335-354.

- Chang, Y.C., Hou, T.Y., Merriam, B. and Osher, S. (1996). A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flow. J. Comput. Phys., 124, 449-464.
- Chorin, A.J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. Comput. Phys., 2, 12-26.
- Hirsch, C. (1989). Numerical Computation of Internal and External Flows. John Wiley & Sons, U.K.
- Hirt, C.W. and Nichols, B.D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J. Comput. Phys., 39, 201-225.
- Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T. (2000). Computational Fluid Dynamics, 4th Ed. Engineering Education System, Kansas, U.S.A.
- Liou, B.H. (2001). Calculation of nonlinear free surface waves with a fully-implicit adaptive-grid method. Ph.D. Dissertation, Princeton Univ., U.S.A.
- Ok, H. (1993). Development of an incompressible Navier-Stokes solver and its application to the calculation of separated flow. Ph.D. Dissertation, Univ. of Washington, U.S.A.
- Osher, S. and Fedkiw, R.P. (2001). Level set methods: an overview and some recent results. J. Comput. Phys., 169, 463-502.
- Osher, S. and Sethian, J.A. (1988). Front propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J. Comput. Phys., 79, 12-49.
- Rogers, S.E. and Kwak, D. (1990). Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations. AIAA J., 28(2), 253-262.
- Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. J. Comput. Phys., 114, 146-159.
- Unverdi, S.O. and Tryggvason, G. (1992). A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. J. Comput. Phys., 100, 25-37.
- Yoon, S. and Jameson, A. (1988). Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA J., 26(9), 1025-1026.
- Zhu, J. and Sethian, J. (1992). Projection methods coupled to level set interface techniques. J. Comput. Phys., 102, 128-138.

Received February 18, 2005

Accepted July 26, 2005