適正代案의 選定을 위한 統計的 決定理論*

金　安　濟

(專　任　講　師)

目　次

1. 머리말
2. 基本前提
3. 統計的 決定理論
(1) 緖言：表現의 約束
(2) 單一段階의 決定理論
(3) 二個段階의 決定理論
(4) 複數段階의 決定理論
(5) 混合戰略理論
(6) 未知先行確率의 定決方法
4. 社會現象에 있어 統計的 決定理論의 利用上의 問題點
5. 맺는말
參考文獻

1. 머리말

決定理論(decision theory)은 그 歷史가 오래인 非計量的 決定理論(non-quantitative decision theory)과 日淺한 歷史를 지닌 計量的 決定理論(quantitative decision theory)으로 分類될 수 있다. 여기서 우리의 關心의 對象인 計量的 決定理論은 바로 決定作成을 위한 計量的 技法(quantitatve techniques for decision-making)이라고 할 수 있으며 이 技法은 主로 產業, 商業, 經營, 軍事 및 政府分野의 決定作成을 위하여 약 20餘年前부터 硏究開發된 것이다. 이와 같은 計量的 決定理論을 다루는 主된 學問分野가 바로 管理科學(management science)과 O.R.(operations research)이며, 오늘날 美國에 있어 *Management Science*, *Operations Research*, *Journal of Decision Sciences*와 같은 雜誌는 이러한 決定作成을 위한 計量的 技法을 主題로 하는 이 分野의 專門誌들이다.

---

* 本稿는 筆者가 1972年 6月 23日 韓國行政學會에서 發表한 同題目의 內容을 補完整理한 것이다.

計量的 決定理論은 決定되어야 할 對象의 성질이나 狀況에 따라 크게 두가지로 나누어지며, 여기서 對象의 성질이나 狀況이란 그 對象에 대한 情報의 確實有無를 말한다. 即, 對象의 性質의 未來狀況이 確實한가 不確實한가에 따라 問題解決의 接近方法은 상이하다는 것이다. 確實한 狀況下(under certainty)에 있는 경우에는 確定的 決定理論(deterministic decision theory)이 利用되고 不確實한 狀況下(under uncertainty)에 있는 경우에는 統計的 혹은 確率的 決定理論(statistical or probabilistic decision theory)이 利用된다. 前者는 導函數나 其他 適正索出方法(optimum seeking method)으로서 어떤 決定値를 구하는 分析的 接近方法(analytic approach)과 線型計劃(linear programming), 非線型計劃(non-linear programming), 動的計劃(dynamic programming)등에 의 하여 決定値를 구하는 計數的 接近方法(numerical approach)등을 포함하며, 後者인 統計的 決定理論가운데서 代表的인 것들은 確率計劃(stochastic programming), 在庫理論(inventory theory), 待期理論(queueing theory) 및 「게임」理論(game theory)등이다.

本稿에서는 統計的 決定理論가운데에서 몇 가지 段階別 決定理論만을 考察하는데 主眼을 두되, 本決定理論에 前提되는 몇 가지 基本的인 事項을 먼저 살펴 보고, 끝으로 統計的 決定理論을 社會現象硏究에 適用함에 惹起 될 수 있는 몇 가지 難點을 提起하고자 한다.

2. 基本前提

未來의 狀況에 대한 어떤 決定을 해야하는 경우에 統計的 決定理論이 利用되는데 이 決定理論의 利用에는 먼저 몇 가지의 條件이 前提되어야 한다.

첫째의 前提는 어떤 事象(event)이 不確實한 狀況 아래(situations under uncertainty) 있다는 事實이다. 事象發生의 不確實性은 確率論的으로 말하면 그 事象이 發生할 確率이 1 이 아니라는 것이며, 萬一 그것이 1이라면 그 事象發生은 確實性을 가지는 것이며, 따라서 確定的 決定理論이 摸索되어지게 된다.

事象發生의 確率은 先驗的 確率(a priori probability) 또는 先行確率(prior probability)과 經驗的 確率(posterior probability)로 區分되는데, 先驗的 確率은 母集團의 크기나 試行回數를 無限大로 했을 경우에 當該 事象이 갖는 確率이고, 先行確率은 先驗的 確率을 포함하여 새로운 試行이나 操作을 요하지 않고 이미 알고 있는 既知의 確率이며 經驗的 確率은 실제 새로운 試行이나 操作에 의하여 발견되어지는 것으로서 條件確率(conditonal probability)과 「베이샨」確率(Bayesian probability)등과 관련되어지는 것이다.

한 事象의 發生確率은 언제나 0보다는 적을 수 없고 1을 超過할 수는 없는 것이므로 모든 發生可能한 事象들의 確率들은 여러 相異한 값들을 가지며, 一定한 分布의 形態를 보이게 된다. 이러한 確率의 分布(probability distribution)는 確率數値의 성질에 따라 不連續確率分

布(discrete probabilily distribution)와 連續確率分布(continuous probability distribution)로 나누어질 수 있는데, 前者의 것으로는 「베누리」(Bernoulli)確率分布, 二項(binomial)確率分布, 多項(multinomial)確率分布, 幾何(geometric)確率分布, 超越幾何(hypergeometric) 確率分布, 「패스칼」(Pascal)確率分布, 「포아슨」(Poisson)確率分布등이 있으며, 後者인 連續確率分布로는 均等(uniform) 確率分布, 指數(exponential) 確率分布, 「감마」(gamma) 確率分布, 「베타」(beta) 確率分布, 正常(normal)確率分布등이 있다.

둘째의 前提는 效用函數(utility function)가 存在해야 한다는 것이다. 效用(utility)은 利潤(profit)이나 費用(cost)에 關聯되어 있으며, 이 利潤이나 費用은 價格(price)과 關聯되어 있으므로 效用은 價格의 函數라고 볼 수 있다. 即, 發生可能한 事象 j의 效用을 U_j라 하고 그의 價格을 Q_j라 하면 이들은 $U_j=U(Q_j)$로 表示되는 關係를 가진다. 萬一 費用이나 利潤과 달리 分明히 數字的 價値로 表示될 수 없는 경우에는 하나의 便法으로 效用函數의 값을 가장 바람직한 경우의 價格을 1이라 하고 그 反對의 경우를 0이라 하여 餘他의 경우는 모두 0과 1사이의 어떤 값들을 가지는 것으로 規定하는 方法을 쓰고 있다.

效用函數의 存在와 관련하여 한 가지 더 알아두어야 할 事項은 效用의 期待値(expectation of utility) 혹은 期待效用(expected utility)이다. 一般的으로 期待値는 數字로 表示될 수 있는 어떤 價値에 그 價値가 發生될 수 있는 確率을 乘하여서 얻어지게 된다. 事象 j의 效用値를 U_j라하고 그의 發生確率을 P_j라 하면 그의 期待效用 $\bar{U}_j$ (혹은 $E(U_j)$)는 다음과 같이 表示된다.

$$\bar{U}_j=E(U_j)=U_jP_j$$

그리고 $j=1$에서 $j=m$에 걸친 發生可能性을 가진 한 行爲(action)의 總期待效用 $\bar{U}$는 다음의 값을 가진다.

$$\bar{U}=\sum_{j=1}^{m}\bar{U}_j=\sum_{j=1}^{m}U_j\ P_j$$

세번째의 前提는 決定作成者의 合理的行態(decision maker's rational behaviors)이다. 다시 말하면 決定作成者는 언제나 合理的으로 行動한다는 것이다. 여기서 合理的 行態란 期待效用이 最大가 되는 代案을 選擇하는 行態를 말하는 것으로서, μ_a를 對案 a의期待效用이라 하고 μ_b를 對案 b의 期待效用이라 하면 $\mu_a>\mu_b$인 경우는 代案 a를 擇하고, $\mu_a<\mu_b$인 경우는 代案 b를 擇하며, $\mu_a\sim\mu_b$인 경우는 두 代案에 대하여 優劣을 가릴 수 없게 되는 決定作成者의 行態이다.

3. 統計的 決定理論

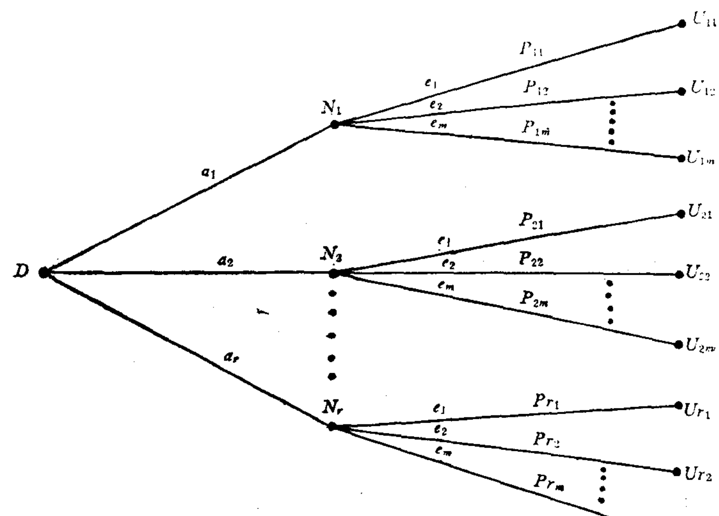
(1) 緖言：表現의 約束

決定作成의 過程은 두개의 段階로 區分될 수 있는바, 그 첫째의 段階는 考慮될 수 있는

一團의 代案 (a set of alternatives)을 設定하는 것이고, 두번째의 段階는 그 一團의 代案으로부터 주어진 目的을 가장 잘 成就할 수 있는 最適의 代案(the best or optimum alternative)을 가려내는 것이다.

이와 같은 一連의 決定作成過程에서 說明과 表現의 便宜를 위하여 몇 가지 約束을 할 필요가 있다. 먼저 一團의 代案을 行爲(actions)라 부르고 各 行爲들을 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ 이라 記號化하고 이 行爲의 集團을 A로 표시한다. 즉, $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. 다음에 이러한 行爲는 모두 어떤 發生狀況과 關聯되어지는데 이들 發生 狀況을 自然狀態(states of nature)라고 부른다. 例를 들어 今週日曜日의 休息方法으로 郊外에 나가거나 映畵館에 가는 것으로 생각 했다면, 이들은 두개의 行爲가 되고 그 날 비가 오는 것과 날이 개이는 것은 두개의 自然狀態가 되는 것이다. 이러한 一團의 自然狀態는 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_m$ 등으로 表示하고 그의 集團을 E로 表示한다. 即, $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 그리고 各 行爲와 이에 附隨된 自然狀態別로 數字로 表示되는 效用이 存在하게 되는데, 一般的으로 이를 U_{ij} 라 하며 이는 行爲 i 와 自然狀態 j 의 效用이라는 의미를 가진다. 같은 方法으로 行爲 i 에서 自然狀態 j 가 發生할 수 있는 確率을 P_{ij} 라 表現한다.

代案을 行爲라 부르고 이에 附隨되는 自然狀態와 效用 및 確率을 圖表로 나타내면 훨씬 그 理解가 빨라지게 된다. 單一段階의 決定作成의 경우에 限하여 一般的인 두 가지 圖表化 方法을 表示코저 한다. 한 方法은 決定樹型(decision tree)이라는 것으로서 다음과 같이 圖式된다.



(D는 decision, N_i는 node i를 말함)

또 하나의 表現方法은 正常表(normal table) 또는 配分表(payoff tableau)라고 하는 것을 作成하는 것으로서 다음과 같이 圖式된다.

		自然狀態			
		e_1	e_2	....	e_m
行爲	a_1	P_{11} U_{11}	P_{12} U_{12}	....	P_{1m} U_{1m}
	a_2	P_{21} U_{21}	P_{22} U_{22}	....	P_{2m} U_{2m}
	⋮	⋮	⋮	⋯⋮⋯	⋮
	a_r	P_{r1} U_{r1}	P_{r2} U_{r2}	....	P_{rm} U_{rm}

理解를 돕기위하여 위에서 列擧한 今週日曜日休息方法決定作成行爲를 두가지 圖表로 表示하여 보기로 한다.

<記號化>

a_1=郊外에 나가서 쉬는 方法

a_2=映畵舘에 가서 映畵鑑賞을 하며 쉬는 方法

e_1=今週日曜日에 비가 오지 않는 狀態

e_2=今週日曜日에 비가 오는 狀態

$P_{11}=P_{21}$=今週日曜日에 비가 오지 않을 確率

$P_{12}=P_{22}$=今週日曜日에 비가 올 確率

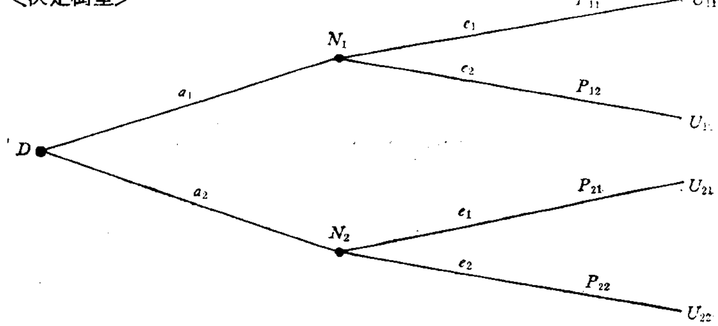
U_{11}=今週日曜日에 비가 오지 않을 경우, 郊外에 나갔을 때의 效用(休息의 滿足度등)

U_{12}=금주일요일에 비가 올 경우, 郊外에 나갔을 때의 效用

U_{21}=금주 일요일에 비가 오지 않을 경우, 영화관에 갔을 때의 效用

U_{22}=금주 일요일에 비가 올 경우, 영화관에 갔을 때의 效用

<決定樹型>



<配 分 表>

	e_1	e_2
a_1	P_{11} U_{11}	P_{12} U_{12}
a_2	P_{21} U_{21}	P_{22} U_{22}

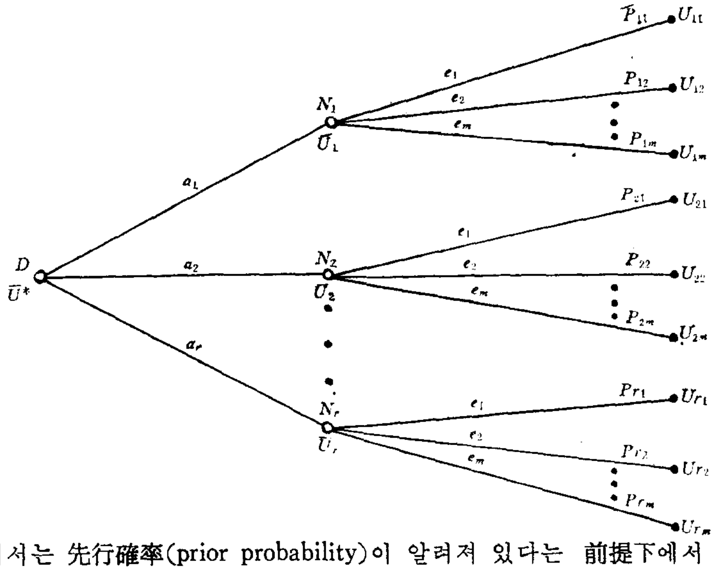
(2) 單一段階의 決定理論

單一段階의 決定理論이란 行爲(代案)와 自然狀態 및 그에 관련된 確率과 效用만을 가지고서 가장 適正한 行爲를 決定하는 理論이다. 이것은 먼저 各行爲가 갖는 期待效用을 計算하고, 다음에 그 期待效用 가운데 가장 큰 값을 가진 것을 擇하여 그의 行爲를 가장 適正한 것으로 決定하는 方法이다. 各 行爲의 期待效用은 그 行爲에 附隨되는 各 自然狀態가 갖는 效用과 確率을 乘한 것을 모두 合한 것이 된다. $\bar{U}_i$ 를 行爲 i 의 期待效用이라 하고 $\bar{U}^*$ 를 適正한 期待效用(optimum expected utility)이라 하면, 이들은 다음과 같이 表示된다.

$$\bar{U}_i = E(U_i) = \sum_{j=1}^{m} U_{ij}\ P_{ij}$$

$$\bar{U}^* = \max_i \bar{U}_i$$

이러한 單一段階의 決定作成方法을 圖式化하여 理解에 돕고자 한다. 이와 같이 單一段階의



決定理論에서는 先行確率(prior probability)이 알려져 있다는 前提下에서 成立되는 것이다.

(3) 二個段階의 決定理論

이것은 앞선 單一段階의 決定理論에 實驗에 의한 새로운 情報를 加味하여 實際에 보다 가까운 決定을 얻고자 하는 方法이다. 即 行爲에 부수된 自然狀態에 대한 旣知의 確率에 滿足

하지 않고 어떠한 自然狀態가 보다 確實히 發生할 것인가를 알기 위하여 하나의 標本을 抽出·調査함으로써 그 結果로부터 各 自然狀態의 發生確率을 事實에 近似하도록 修正하는 것이다. 이렇게 하여 얻게 되는 새로운 確率을 經驗的確率 或은 後行確率(posterior probaiblity)이라고 부른다.

便宜上 實驗의 結果 (experimental outcomes)는 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s$등으로 나타내고 이의 集團을 F라 하여 $F=\{f_1, f_2, \cdots\cdots f_s\}$와 같이 표시한다. 이러한 實驗의 可能한 結果가운데 실제 우리가 抽出한 標本으로부터 얻는 結果는 단 한가지가 될 것이므로 이를 f_k 라 표시키로 한다. 따라서 後行確率이란 實驗의 結果가 f_k 일 때 自然狀態가 e_j 로 될 確率을 말하는 것이며, 이를 $P(e_j|f_k)$로 表示하게 된다. 이 後行確率 $P(e_j|f_k)$는 「베이스」의 法則(Bayes' Law)이라고 불리우는 다음의 式에 의하여 計算된다.

$$P(e_j|f_k)=\frac{P(e_j)P(f_k|e_j)}{P(f_k)}$$

위 式에서 $P(e_j)$는 自然狀態 j 의 先行確率이고, $P(f_k|e_j)$는 주어진 自然狀態 j 에 대한 實驗結果 f_k 의 條件 確率이며, $P(f_k)$는 f_k 의 限界確率 (marginal probability)로서 不連續狀態인 경우는 $\sum_{v=1}^{m} P(e_v)\ P(f_k/e_v)$에 의하여 계산되고, 連續狀態인 경우는 $\int_a^b P(e_v)P(f_k|e_v)dP$에 의해 算出된다.

二個段階의 決定理論에서는 期待效用이 效用과 後行確率을 乘하여 얻어지게 되므로 다음과 같이 要約될 수 있다.

$$\bar{U}_i=\sum_{j=1}^{m} U_{ij}P(e_j|f_k)$$

$$\bar{U}^*=\max_i \bar{U}_i$$

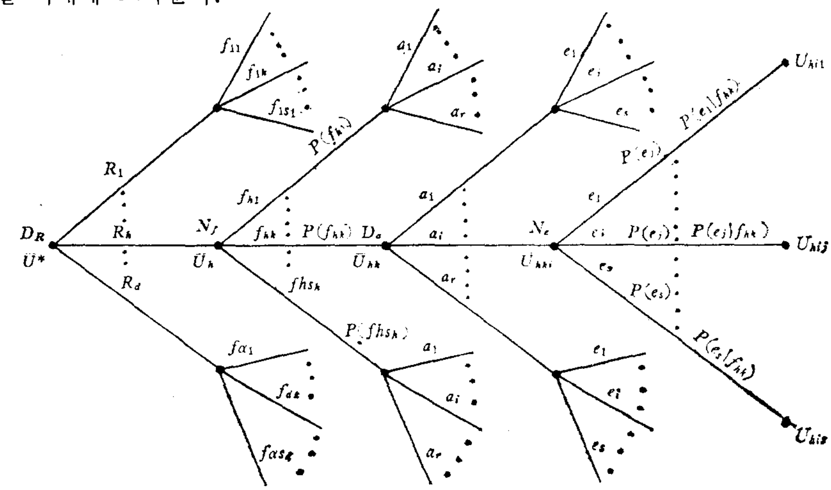
二個段階의 경우는 自然狀態와 實驗結果의 數値가 連續的인가, 不連續的인가에 따라 네가지의 경우로 나누어질 수 있으니 첫째는 두가지 모두가 不連續인 경우이고, 둘째는 自然狀態는 不連續이고 實驗結果는 連續인 경우이며, 셋째는 그 反對의 경우이고, 넷째는 두 가지가 共히 連續인 경우이다. 連續이나 不連續이냐에 따라 利用되는 確率分布 역시 앞서 略述한 連續確率分布와 不連續確率分布에 準하게 된다.

(4) 複數段階의 決定理論

複數段階(multi-stages)의 決定理論은 單一段階와 二個段階의 決定理論과는 決定의 對象에 있어 다르다. 後者의 두 개가 바로 適正한 行爲를 決定하고자 하는데 反하여 前者는 適正한 行爲를 決定하기 위하여 實施하고자 하는 여러 個의 實驗(alternative experiments)가운데 目的하는 바를 가장 잘 達成시킬 수 있는 最適의 實驗을 찾아내고자 하는 것이다. 實驗의 代案이 여러 개 될 수도 있고, 혹은 單純히 實驗을 할 것인지 하지 않을 것인지의 두 개만의

實驗代案이 될 수도 있다.

우리는 d 개의 實驗代案을 無作爲實驗(random experiments)이라 하고 R_h 로 表示하며, $h=1,2,\cdots\cdots, d$ 이다. 無作爲實驗 R_h 는 S_h 개의 實驗結果를 나타내는 것으로 보고 그 各各의 結果를 f_{hk} $(k=1,2,\cdots, S_h)$로 表示한다. 먼저 說明과 理解의 便宜를 위하여 複數段階의 決定樹型을 아래에 그려둔다.



여기에서 이미 알고있어야 하거나 찾아내어야 할 確率은 (1) 自然狀態 j 의 確率 $P(e_j)$ $(j=1,2,\cdots, s)$, (2) 實驗結果 f_{nk} 의 條件確率 $P(f_{hk}|e_j)$ $(h=1,2,\cdots, d;\ k=1,2,\cdots,S_h)$, (3) f_{hk} 의 限界確率 $P(f_{hk})=\sum_{j=1}^{s}P(e_j)P(f_{hk}|e_j)$, (4) f_{hk} 의 後行確率 $P(e_j|f_{hk})$등이다. 後行確率 $P(e_j|f_{hk})$는 Bayes 의 法則에 따라 다음에 의하여 算定된다.

$$P(e_j|f_{hk})=\frac{P(e_j)P(f_{hk}|e_j)}{P(f_{hk})}$$

$$=\frac{P(e_j)P(f_{hk}|e_j)}{\sum_{v=1}^{s}P(e_v)P(f_{hk}|e_v)}$$

이들 確率과 數量化된 效用函數를 가지고 複數段階의 決定作成을 하는 過程은 위의 그림에서 오른쪽으로부터 왼쪽으로 가면서 適正한 길을 찾아내 가는 것이다. 처음에는 結節地點인 N_e 에서의 各 行爲의 期待確率을 計算해 낸다. 卽, 無作爲實驗 R_h 로부터 f_{hk} 의 實驗結果를 얻었을 경우의 行爲 i 의 期待效用은 行爲 i 의 各 自然狀態가 갖고 있는 效用에 그의 後行確率을 乘한 값을 모두 合한 값이 된다. 數式으로는 $\bar{U}_{hki}=\sum_{j=1}^{s}U_{hij}\ P(e_j|f_{hk})$이 된다. 두 번째로는 決定段階 D_a 에서 주어진 實驗結果 f_{hk} 에서의 適正行爲를 決定한다. 곧 f_{hk} 의 期待效用 $\bar{U}_{hk}$ 를 찾아내는 것으로서 이것은 $\bar{U}_{hk}=\max_i\bar{U}_{hki}$ 이 된다. 세번째로 結節 N_f 에서 無

作爲實驗 R_h의 期待效用을 算出해 내는데, 이것은 R_h의 모든 實驗結果가 갖고 있는 期待效用에 그의 限界確率을 乘한 것을 모두 合하여 구한다. 即, $\bar{U}_h=\sum_{k=1}^{Sh}\bar{U}_{hk}P(f_{hk})$이 된다. 그리고 네번째의 마지막 段階는 決定段階 D_R에서 最適의 無作爲實驗을 決定하는 것으로서 그것은 $\bar{U}^*=\max_h\bar{U}_h$로 表示될 수 있다. 이 네가지 段階를 數式으로서 要約하면 다음과 같다.

① $\bar{U}_{hki}=\sum_{j=1}^{s}U_{hij}\ P(e_j|f_{hk})$

② $\bar{U}_{hk}=\max_i\bar{U}_{hki}$

③ $\bar{U}_h=\sum_{k=1}^{Sh}\bar{U}_{hk}\ P(f_{hk})$

④ $\bar{U}^*=\max_h\bar{U}_h$

이와 같은 最適實驗을 決定하는 過程을 先經驗戰略(preposterior strategy)이라 부르고 $S=\{R_h,\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{Sh}\rangle\}$로 表示한다. 여기서 S는 戰略을 의미하고, R_h는 無作爲實驗을 나타내며, α_{Sh}는 實驗結果가 f_{Sh}일때의 適正行爲를 뜻한다. 最適한 R_h를 決定하는 것이 바로 先經驗戰略인 것이다.

(5) 混合戰略理論

混合戰略(mixed strategy)이란 行爲를 對案으로 보지않고 要素로 보아 適正한 分擔化(fraction)를 決定하는 方法의 하나이다. 따라서 우리가 目的하는 最終產物은 어느 하나의 行爲로서 이루어지는 것이 아니고 여러 行爲가 混合되어져서 비로소 完成되는 것 (mixed product)이다. 이러한 理由로 여기서 말하는 行爲 (action)는 오히려 要素 (factor) 혹은 構成分子(component)의 의미를 가지고 있는 것으로 理解되어야 옳을 것이다.

먼저 混合戰略理論의 說明을 위해 配分表 (payoff tableau)를 作成키로 한다. 이 表에서

	$e_1\ e_2\cdots\cdots e_j\cdots\cdots e_s$	a_i의 確率
a_1	$U_{11}\ U_{12}\cdots\cdots U_{1j}\cdots\cdots U_{1s}$	q_1
a_2	$U_{21}\ U_{22}\cdots\cdots U_{2j}\cdots\cdots U_{2s}$	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	$U_{i1}\ U_{i2}\cdots\cdots U_{ij}\cdots\cdots U_{is}$	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_r	$U_{r1}\ U_{r2}\cdots\cdots U_{rj}\cdots\cdots U_{rs}$	q_r
$P(e_j)$	$P_1\quad P_2\cdots\cdots P_j\cdots\cdots P_s$	
期待效用	$\bar{U}_1\quad \bar{U}_2\cdots\cdots\bar{U}_j\cdots\cdots\bar{U}_s$	

U_{ij}는 行爲(여기서는 要素의 意味) i에 關聯되어 나타날 自然狀態 j의 效用函數이고, P_j는

自然狀態 j 의 先行確率이며, $\bar{U}_j$ 는 自然狀態 j 가 갖는 期待效用이다. 그리고 이 表의 最右側에 있는 a_i 의 確率 q_i 란 a_i 가 하나의 要素로서 全體에서 차지하는 分擔比를 말하는 것이며, 따라서 q_i 는 바로 우리가 求하고자 하는 數値인 것이다.

q_i 를 決定하기 위한 混合戰略은 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있으니, 하나는 先行確率 P_j 를 모르고 있는 경우이고 또 하나는 그것을 事前에 알고 있는 경우이다. 前者의 경우는 自然狀態 j 가 갖는 期待效用 $\bar{U}_j$ 가 다음과 같이 表示된다. 먼저 $\bar{U}_j$ 가운데 가장 작은

$$\bar{U}_j = U_{11}q_1 + U_{21}q_2 + \cdots\cdots + U_{r1}q_r = \sum_{i=1}^{r} U_{i1}q_i;\quad j=1,2,\cdots\cdots,s$$

값을 想定하고, 그것을 W 라고 한다면 先行確率을 모르는 경우에는 이 W 의 값을 最大化하는 q_i 들의 값을 決定하는 것이다. 卽, $\bar{U}_j$ 中 最少가 되는 것을 最大化시키는 操作을 하는 것이다. 따라서 이 戰略을 最少效用最大化戰略(max-min utility strategy)라 한다. 이 戰略을 위해서는 線型計劃(linear programming)의 利用이 바람직하다고 하겠다. 곧, $W = \min_j \bar{U}_j$ 이므로 目的函數는 $Z = W$ 로 表示될 수 있기에 이 戰略의 線型計劃의 基本型은 다음과 같이 된다.

$$\text{Maximize}\quad Z = W$$

$$\text{Subject to}\quad \begin{cases} U_{11}q_1 + U_{21}q_2 + \cdots + U_{r1}q_r - W \geq 0 \\ U_{12}q_1 + U_{22}q_2 + \cdots + U_{r2}q_r - W \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{1s}q_1 + U_{2s}q_2 + \cdots + U_{rs}q_r - W \geq 0 \\ q_1 + q_2 + \cdots + q_r = 1 \\ q_1, q_2, \cdots, q_r \geq 0 \\ W \geq 0 \end{cases}$$

先行確率 P_j 를 알고 있는 後者인 경우는 行爲 i 가 가지는 期待效用 $\bar{U}_i$ 는 다음과 같이 計算된다. 그러므로 總期待效用을 Ω

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= U_{i1}q_iP_1 + U_{i2}q_iP_2 + \cdots\cdots + U_{is}q_iP_s \\ &= \sum_{j=1}^{s} U_{ij}q_iP_j;\quad i=1,2,\cdots\cdots,r \end{aligned}$$

라 表示하면, 이 Ω 는 各 行爲의 期待效用을 모두 合한 것으로 된다. 卽,

$$\begin{aligned} \Omega &= \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \cdots + \bar{U}_r \\ &= \sum_{i=1}^{r} \bar{U}_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} U_{ij}q_iP_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} U_{ij}P_j \right) q_i \end{aligned}$$

여기서 $q_i(i=1,2,\cdots,r)$는 Ω 가 最大의 값을 가지도록 決定되어져야 하며, 이 戰略을 「베이

스」의 混合戰略(Bayes' mixed strategy)이라 부른다.

(6) 未知先行確率의 決定方法

統計的 決定作成의 過程에서는 先行確率(prior probability)이 알려져 있는 것으로 看做하고 있다. 그러나 實際는 이 先行確率, 即 어떤 自然狀態의 發生可能度는 언제나 사전에 주어지는 값이 아니며, 새로이 決定되어져야 할 경우가 많다.

그러면 行爲와 관련된 自然狀態의 效用만 알고 그의 先行確率을 알지 못하는 경우에는 어떻게 適正한 行爲를 決定할 수 있는가? 單一段階의 決定過程에 있어 一般的으로 利用되는 5가지의 方法을 說明코자 한다.

첫째의 方法은 「라프라스」 基準(Laplace criteria)이라는 것이다. 이것은 가장 簡單한 方法으로서 各各의 自然狀態는 모두 同一한 確率을 가지는 것으로 看做하는 것이다. 即, 均等한 確率을 가지는 것이다. S 個의 自然狀態가 豫見되는 경우라면 $P(e_j)=\frac{1}{S}$이 될 것 이므로 適正한 行爲는 다음으로 얻어질 것이다.

$$\max_i \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{s} U_{ij}$$

두번째의 方法은 最少效用最大化基準(max-min criteria)이다. 이것은 各 行爲에서 가장 작은 값의 效用을 찾아낸 뒤에 그 最少의 값들 가운데 가장 큰 값을 가진 것을 찾아 그 값에 該當되는 行爲를 適正한 것으로 決定하는 方法으로서 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$\max_j \min_i U_{ij}$$

세번째는 最大效用最大化基準(max-max criteria)이라는 方法이다. 이것은 各 行爲의 最大値效用중에서 가장 큰 값을 찾아 그 가장 큰 값에 해당하는 行爲를 適正한 것으로 決定하는 方法이다. 다음과 같이 表示될 수 있는 것이다.

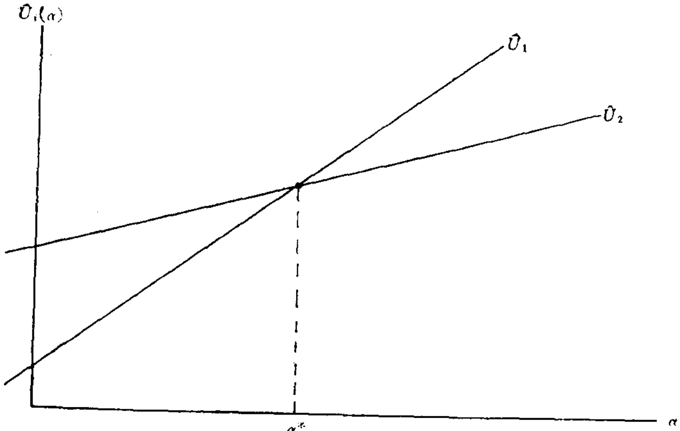
$$\max_i \max_j U_{ij}$$

네번째는 適正指數化(optimism index)의 方法이다. 먼저 行爲 i에 있어서의 最大效用을 찾아 U_i^+ 라 하고 最少效用을 U_i^- 라 한 다음에 다음과 같은 關係式을 만든다.

$$\hat{U}_i(\alpha)=\alpha U^+{}_i+(1-\alpha)U^-{}_i$$
$$0\leq\alpha\leq1$$

이 式에서 α는 0과 1사이의 어떤 값을 가지는 것으로서 適正指數(optimism index)라 불리운다. 適正指數化의 方法은 바로 $\hat{U}_i(\alpha)$의 값을 最大로 만드는 α의 값을 찾아내는 것이다. 萬一 $\alpha=0$ 이면 $\hat{U}_i(0)=U^-{}_i$ 가 되어 最少效用最大化基準의 方法이 되고 $\alpha=1$ 이면 $\hat{U}_i(1)=U_i^+$ 가 되어 最大效用最大化基準의 方法이 되는 것이다. 위 식은 $\hat{U}_i(\alpha)=U_i^-+\alpha(U_i^+-U_i^-)$로 變形될 수 있으므로 $\hat{U}_i(\alpha)$는 α의 一次函數가 되어 線形을 나타내고 있다. 따라서 行爲

가 單 2個인 경우에는 圖面上에 쉽게 表示될 수 있어 決定이 용이하게 내려진다. 即, a_1과 a_2의 行爲만 있으면 $\hat{U}_1(\alpha)=U_1^-+\alpha(U_1^+-U_1^-)$과 $\hat{U}_2(\alpha)=U_2^-+\alpha(U_2^+-U_2^-)$으로 되어 다음 그림과 같이 表示될 수 있다.



위의 그림에서 直線 $\hat{U}_1$과 直線 $\hat{U}_2$가 서로 만나는 點이 α^*이므로 α의 값이 α^*보다 작으면 行爲 a_2를 擇하고, α^*보다 크면 行爲 a_1을 擇하게 된다.

끝으로 다섯번째는 最大機會損失을 最少化하는 方法(min-max regret or min-max opportunity loss)이다. 여기서 機會損失(regret or opportunity loss)이란 어느 行爲 i의 自然狀態 j가 가지는 效用 U_{ij}가 모든 行爲의 自然狀態 j가운데 가장 큰 값에 未及하는 값으로 定義되는데, 數式으로 表示하면 行爲 i의 自然狀態 j가 갖는 機會損失 L_{ij}는 다음과 같다.

$$L_{ij}=M_j-U_{ij}$$

$$M_j=\max_i U_{ij}$$

各 行爲에서 그 行爲가 갖는 機會損失가운데 가장 큰 값을 찾아낸 뒤에, 이들값중에서 가장 작은 값을 골라 이값을 가지는 行爲를 適正한 것으로 看做하는 것이다. 記號로서 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$\min_j \max_i L_{ij}$$

4. 社會現象에 있어 統計的 決定理論의 利用上의 問題點

確率理論을 그 根底로 하여 硏究開發된 統計的 決定理論은 社會現象에 못지 않게 自然現象에도 利用될 素地를 갖고 있다. 그러나 未來의 不確實性은 社會現象에서 더 두드러지게 나타나고 있으므로 統計的 決定理論은 社會現象의 問題를 다루는데 보다 더 有益하게 活用되리라고 생각된다. 그러나 그러한 높은 必要性에도 不拘하고 社會現象에 統計的 決定理論을 利用하는데는 몇가지 어려움이 놓여져 있으며, 이 難點의 充分한 解決없이는 지금까지 說明한 몇가지의 決定理論을 포함한 一切의 統計的 決定方法은 그것이 所期하는 바를 完全히 達

成할 수 없을 것이다.

첫째로 생각되는 어려움은 確率의 決定이다. 自然狀態의 先行確率을 위시한 條件確率, 限界確率, 實驗結果의 條件 및 限界確率 등은 事前에 다른 出處에 의하여 주어지지 않는 경우에는 그들의 決定自體가 매우 힘든 作業 가운데 하나이다. 一般으로 先行確率은 過去의 經驗이나 類似한 代象에 대한 實驗의 結果로부터 주어지는 것이 보통이지만 때로는 理論的으로나 假說的으로 規定되기도 한다. 先行確率의 決定이 도저히 不可能하면 前章의 마지막 節에서 說明한 다섯 가지의 便法中에서 적당한 것을 選擇하여 利用할 수 밖에 없을 것이다.

두번째로 惹起되는 難點은 效用函數의 決定이다. 社會現象가운데는 數量化가 容易한 것보다 어렵거나 不可能한 것이 더 많다. 例를 들면 效率, 士氣, 人間關係, 行態, 參與度, 滿足感 등은 그의 數量化가 극히 어려운 것들이다. 社會現象의 數量化는 命名的인 尺度(nominal scale)보다는 間隔的인 尺度(interval scale)에 의해서 하는 것이 바람직 하므로 效用函數 역시 間隔的인 尺度로서 나타내도록 努力해 볼 필요가 있다고 하겠다.

세번째의 問題點은 많은 關聯要素가 統計的 決定過程에서 除外되기 쉽다는 것이다. 하나의 事項에 대한 어떤 決定을 내리는데는 內的 및 外的인 여러 要因이 고려되어야 하며, 더욱이 將來의 問題를 決定하기 위해서는 社會的 變化와 政策的 變數가 아울러 고려되어야 할 것이다. 決定作成에 영향을 주는 이들 要因들은 영향의 程度가 모두 같을 수 없으므로 各要因들의 加重値 혹은 比重의 設定이 心要하다. 統計的 決定理論에 있어서 決定作成에 關聯되는 諸要因들은 效用函數에 包含되어진다. 그러나 이 效用函數는 반드시 數量的으로 表示되어져야 하므로 數量化가 어렵거나 不可能한 要因, 곧 變數는 函數化過程에서 除外되어지며, 또한 이 效用函數는 獨立變數와 關係性이 큰 從屬變數만으로 形成되므로 微弱한 關係性을 가진 變數는 除外되게 된다. 여기서 우리에게 苦悶을 주는 문제는 상당히 重要한 關係性을 가지되 數量化가 어려운 變數를 어떻게 取扱해야 하느냐 하는 것과 重要性이 약한 變數를 除外할 때 어느 基準에서 取捨를 하느냐 하는 것이다. 後者의 문제는 一般的으로 要因分析(factor analysis)이나 回歸分析(regression analysis)과 같은 技法들을 利用하여 解決 할 수 있을것이다. 그러나 前者의 문제는 社會現象의 數量化라는 累代의 宿題와 關聯되는 보다 어려운 課題의 하나라고 볼 수 있다.

5. 맺는 말

未來에의 決定은 未來가 갖는 不確實性으로 인하여 豫見되는 發生狀態의 可能程度가 가장 큰 영향을 갖게 되며, 따라서 未來에의 決定에 있어 發生될 確率의 重要性이 있는 것이다. 그러나 確率을 根據로 한 統計的 決定理論은 確率分布理論과 함께 아직 未洽한 段階에 있다. 그것은 이 方面에 對한 研究의 日淺에도 그 一因이 있지만, 보다 더 큰 原因은 主要研

究對象인 社會現象의 多變性과 複雜性에 있다고 볼 수 있다.

統計的 決定理論을 利用하여 將來의 어떤 事項을 決定하고자 함에는 위에서 指摘한 바와 같은 確率決定의 어려움과 效用函數設定의 어려움 및 關聯變數의 選擇과 數量化의 어려움이란 難題가 있어 이들의 解決 없이는 最上의 對案을 求하기가 어려운 것이다. 合理主義的이고 實利主義的인 美國에서 主로 開發된 이 統計的 決定理論을 傳統的 遺產이 상이하고 近代化의 途上에 있는 우리나라의 狀況에 適用코저 할때에는 좀 더 고려되어야 할 問題點이 있다고 하겠다.

그 첫째는 未來에의 不確實性이 더 크다는 것이다. 社會가 安定되어 있지 않는 所以로 將來에 對한 어떤 推測은 實際의 狀況과 一致 乃至 近似하기가 매우 어려우며, 이것은 바로 自然狀態의 先行確率을 不正確하게 만들게 됨으로써 統計的 決定過程의 基本을 弱化시키게 되는 것이다.

두번째로 야기되는 우리나라에서의 問題點은 合理的 行態에 대한 疑惧이다. 이미 言及한 바와 같이 統計的 決定理論은 合理的 行爲者를 그 前提要件으로하고 있어, 우리 나라와 같이 感情的으로나 不合理한 人間關係的 要素에 의하여 決定作成을 하는 事例가 많은 社會에서는 그 決定理論의 利用에는 많은 制約이 따르게 되는 것이다.

세번째의 問題點으로는 社會現象의 여러 事項에 對한 經驗的 乃至 實驗的인 結果의 體系的이고 統計的인 資料가 稀少하다는 것을 提起할 수 있다. 어떤 決定過程에서 必要로 하는 資料가 모두 새로이 觀察되거나 實驗되어야 할 것이라면 時間과 經費의 所要로 인한 科學的 方法으로의 接近을 주저하게 될 것이다. 이러한 科學的 接近에의 주저는 即興的 決定이나 보다 簡便한 方法의 利用을 초래하게 될 것이다.

그러나 이와같은 여러 가지의 問題點은 社會의 安定化와 더불어 決定理論의 계속적인 發展에 힘 입어 漸次 解決되어져 나갈 것으로 생각된다. 價值롭다고 認定된 理論이나 方法은 許多한 制約條件에도 不拘하고 發展되고 改善되어져 간다는 平凡한 歷史的 眞理를 우리는 알고 있기 때문이다. 이것은 우리나라의 狀況에 適合한 統計的 決定理論을 硏究開發해야 할 意義를 아울러 말하는 것이며, 우리들 社會科學徒의 責務가 重且大함을 깨닫게 하는 것이다.

參 考 文 獻

I. BOOKS

1. G. Hadley, *Introduction to Probability and Statistical Decision Theory*, San Francisco: Holden-Day, 1967.
2. Robert C. Shook and Harold J. Highland, *Probability Models: With Business Applications*, Homewood: Richard D. Irwin, Inc., 1969.
3. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, 2nd ed.,

New York: Wiley, 1957.
4. L. Weiss, *Statistical Decision Theory*, New York: McGraw-Hill, 1961.
5. M. Fisz, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3rd ed., New York: Wiley, 1963.
6. G.A. Wadsworth and J.G. Bryan, *Introduction to Probability and Random Variables*, New York: McGraw-Hill, 1960.
7. H. Chernoff and L.E. Moses, *Elementary Decision Theory*, New York: Wiley, 1959.
8. H. Raiffa and R. Schlaifer, *Applied Statistical Decision Theory*, Boston: Harvard University Press, 1961.
9. E.L. Grant, *Statistical Ouality Control*, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1964.
10. Dyckman, Smidt, and McAdams, *Management Decision Making under Uncertainty: An Introduction to Probability and Statistical Decision Theory*, New York: McMillan, 1969.
11. Schlaifer, *Analysis of Decisions under Uncertainty*, New York: McGraw-Hill, 1969.

II. ARTICLES

1. R.V. Brown, "Do Managers Find Decision Theory Useful," *Harvard Business Review*, May-June 1970, p.78.
2. J. Magee, "Decision Trees in Decision Making," *Harvard Business Review*, July-August, 1964, p.126.
3. P.E. Green, "Bayesian Decision Theory in Pricing Strategy," *Journal of Marketing*, Vol.27, No.1 (Jan. 1963), p.5.
4. J. Magu, "How to Use Decision Trees in Capital Investment," *Harvard Business Review*, Sep.-Oct. 1964, p.79.
5. M. Hamburg, "Bayesian Decision Analysis and Statistical Quality Control," *Industrial Quality Control*, Vol. 19, No.6 (Dec. 1962), p.10.
6. R.O. Swalm, "Utility Theory—Insights into Risk Taking," *Harvard Business Review*, Nov.-Dec. 1966, p.123.
7. J.S. Hammond, "Better Decisions with Preference Theory," *Harvard Business Review*, Nov.-Dec. 1967, p.123.
8. R. Wilson, "Investment Analysis under Uncertainty," *Management Science*, Vol.15, No.12 (Aug. 1969), p.650.
9. D.B. Hertz, "Risk Analysis in Capital Investment," *Harvard Business Review*, Jan.-Feb. 1964, p.95.