서울大學校 師大論叢 第41輯(1990. 12. 30)

微積分 教材의 再吟味

禹 正 皓
(數學教育科)

I. 序 言

學校數學에서 微積分 指導의 문제가 중점적으로 논의되기 시작한 것은 20세기 초에 數學教育 改革 運動을 주도한 J. Perry와 F. Klein에 의해서이었다. 1901년 영국학술협회의 글라스고우 회의에서 행한 J. Perry의 "數學教育"이란 제하의 강연은 數學教育 近代化 運動의 정신을 대변한 것으로 유명한 바, 그 내용 가운데에서 Perry는 知力을 開發하고 情緖를 涵養하며 自然의 神秘를 파헤치는 精神的 道具로서의 微積分 指導의 중요성을 강조하였다.(1) 또한 1905년 F. Klein의 주도로 제시된, 近代 獨逸 學校數學의 憲章이라고 할 수 있는 Melan 教育課程에서는 학생들의 心理的인 發達을 고려하여 嚴密性을 점진적으로 증대시켜 갈 것과 函數 概念을 統合 概念으로 도입하여 直觀的인 형태로 微積分까지 총괄하도록 할 것, 應用을 통하여 실생활과 밀접하게 관련지울 것을 요구하였으며, Klein은 그가 數學的 思考의 心臟이요 魂이라고까지 주장한 函數的 思考의 開發을 위해 微積分이 學校數學의 본질적인 부분이 되어야 한다고 주장하였다.(2)

그 후 반 세기가 지난 후 數學教育 現代化 運動이 일어나면서 '새 數學'에서는 學校數學의 現代 數學化라는 정신에 따라 보다 嚴密한 지도를 하자는 암묵적 제안이 微積分 教材의 바탕에 깔려 있었다고 생각되며, 그러한 입장은 그 후 高等學校 微積分 教材의 밑바탕을 흐르는 경향성을 형성하게 되었다고 생각된다. 이러한 경향은 1970년대 중반에 최고점에 달하였으며 그 후 數學教育的 論議에서는 반대의 경향이 점차 의미를 갖게 되었다. 權威主義的인 演繹的 展開와 嚴密性을 포기하고 直觀的인 關聯性과 지적으로 변조되지 않은 單純化를 강조하여 보다 '知的으로 誠實한' 취급을 하고, 問題 解決과 數學의 應用을 보다 강조하자는 주장이 최근 점차 강해지고 있다.(3) 微積分 教材의 鍾는 새로운 차원에서 다시

(1) J. Perry, "The Teaching of Mathematics", J.K. Bidwell & R.G. Glason (ed.), Readings in the History of Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics, 1970, pp. 220-245.
(2) H.R. Hamley, Relational and Functional Thinking in Mathematics, NCTM, The Ninth Yearbook, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1934, pp. 50-58.
(3) The Working Groups of the Commission on Standards for School Mathematics of NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989.

20세기 초의 상황을 맞고 있는 것이다.

學校數學에서 微積分은 다음과 같은 여러가지 방법으로 지도될 수 있다.[4] 첫째, Leibniz 식의 傳統的인 無限小 方法을 생각할 수 있다. 이 방법에서는 函數 $y=f(x)$에서 $f'(x)$는 微分商 dy/dx이고 이를 계산할 때 모든 無限小量은 결과에서 무시된다. 둘째, 현재 우리 나라에서 다루어지고 있는 極限 方法을 생각할 수 있다. 이 방법에서는 實數 變數 h가 0으로 접근할 때 $f(x+h)-f(x)/h$ 곧, $\Delta y/\Delta x$가 어떤 극한값에 접근할 경우 그 극한값을 $f'(x)$로 택한다. 여기서 dy/dx는 微分의 몫이 아니라 $(d/dx)y$의 의미이며 dx, dy는 아무 의미가 없으므로 그 몫으로 생각해서는 안된다고 보고 있다. 셋째, 컴퓨터를 이용한 數値的 方法을 생각할 수 있다. x의 특정한 값에 대하여 x의 增分 h가 양쪽 방향으로부터 0에 收斂할 때 $f(x+h)-f(x)/h$의 값의 변화 상태를 표로 만들어 그 收斂하는 값을 계산으로 보여 줌으로서 極限 方法으로 정의한 $f'(x)$의 의미를 확인시키는 방법이다. 네번째, 컴퓨터의 그래프를 이용하는 방법을 생각할 수 있다. 近似的인 입장에서는 曲線은 짧은 折線의 연쇄로 볼 수 있고 微分 dx는 매우 짧은 區間으로 그 區間에서는 曲線은 接線과 명확히 구분할 수 없다. 이 방법은 컴퓨터의 그래픽 기능을 이용하여 점 x를 포함하는 작은 區間 $[x+a, x-a]$에서 函數 $y=f(x)$의 그래프를 그리도록 하고 다시 훨씬 작은 區間에서 그래프를 확대시켜 그래프가 直線으로 보이도록 함으로서 dy/dx가 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$임을 시각적으로 보여주는 방법이다. 다섯 번째로, $\epsilon-\delta$ 方法을 생각할 수 있다. 이 방법은 h가 0에 收斂할 때 $f(x+h)-f(x)/h$가 실수 $f'(x)$에 收斂한다는 것을 算術的 計算에 의해 嚴密하게 證明하는 방법으로 Weierstrass로부터 연유한다. 여섯 번째로 現代的인 無限小 方法을 생각할 수 있다. 이 방법은 Leibniz의 無限小 方法과 같이 微分商을 계산한 다음 標準 部分 곧, 그에 무한히 가까운 實數를 택하여 微分係數를 구하는 것으로 A. Robinson의 非標準 解析學에 연유하는 것이다.

이들 각 방법은 다음과 같은 장단점을 갖는다.[5] Leibniz의 無限小 方法은 단순하고 直觀的이며 發見的 價値가 크나 18세기 이후 논리적 결함 때문에 포기된 방법이다. Berkeley는 無限小를 사용하여 微分係數를 계산할 때 처음에는 無限小가 變數에 주어진 0이 아닌 增分이라고 생각하다가 나중에는 0이며 따라서 제거될 수 있다고 생각하는 論理的 誤謬에 빠지고 있다고 비판하였다. 增分 h가 演繹 過程에서 내내 0이라면 그것으로 나눌 수 없으며, 演繹 過程에서 0이 아니라면 演繹의 끝에 그것을 버릴 수 없다는 것이다. 演繹 過程에서 增分 h의 의미를 변경시켜 論理的 誤謬를 범하면서도 그것을 옳은 결과를 얻기 위하여 용인하고 있다는 것이다. 無限小의 사용에 대한 Berkeley의 비판은 일반적으로 받아들여졌으며 微積

(4) D. Tall, "Comments on the Difficulty and Validity of Various Approaches to the Calculus," For the Learning of Mathematics, vol. 2, num. 2, 1981, pp. 16-21.

(5) D. Tall, ibid.
P. Marchi, "Can Heuristic be Taught?", For the Learning of Mathematics, vol. 1, num. 2, 1981, pp. 35-42.

分을 전개하는 다른 방법을 찾게 되었다. Leibniz의 無限小 方法에서는 無限小는 量이었으나, Cauchy의 極限 方法에서는 無限小는 函數이며 흔히 0에 무한히 접근하는 變數로 간주되고 $f(x)=x\sin(1/x)$와 같은 函數의 '非正常인' 無限小를 다루게 될 경우 誤謬가 발생하기 쉽다. 그러나, 微積分을 다루는 學校數學에서는 그러한 복잡한 例를 도입할 필요가 없는 한 모든 無限小는 正常인 無限小이므로 이는 대체로 學校數學과는 무관한 것이다. 極限 方法은 $\epsilon-\delta$ 方法에의 자연스러운 도입이 될 수 있다는 장점이 있으나, 函數의 增分 $\varDelta x, \varDelta y$의 極限이 dx, dy인 듯한 암시를 주며, 導函數 公式에서 微分을 約分하듯이 다루는 것이 편리하게 되어 있고, 置換積分을 할 때 계산의 편의상 $\int f(x)dx$에서 $x=g(t)$, $dx=g'(t)dt$로 놓고 계산하도록 지도하는 경우가 있어 概念의 이해에 혼란을 일으키기 쉽게 되어 있다. 現代的인 標準 解析學의 기초가 되는 Weierstrass의 $\epsilon-\delta$ 方法에서는, 有限이며 0이 아닌 量으로, 變數에 부가된 增分을 제거하기 위하여 0으로 변경할 필요가 없는 그러한 量만을 사용하여 微積分의 결과를 엄밀하게 이끌어 낸다. $\epsilon-\delta$ 方法은 오늘날 微積分學의 올바른 기초로서 일반적으로 받아들여지고 있으나, 복잡하고 직관적이지 못하며 지도하기가 매우 어렵다는 단점이 있다. 곡선 $f(x)$의 점 a에서의 接線의 기울기를 구하고자 할 때 $\epsilon-\delta$ 方法에서는 $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$의 극한값과 주어진 ϵ에 대한 올바른 δ의 값을 추정해야 하므로 복잡하고 직관적이지 못하다. δ는 ϵ에 의존하지만 ϵ이 주어졌을 때 δ를 결정하는 알고리즘이 없으며, δ가 ϵ에 의존하는 방식은 경우마다 독특하게 추정되어야 하며 이것이 $\epsilon-\delta$式 證明을 지도하기 어렵게 만든다. 이 방법은 解析學에서 概念의 의미를 명확히 하고 嚴密한 전개를 하는 데 커다란 기여를 하였으나, 간단한 函數에서조차 ϵ에 대하여 적절한 δ를 결정하기 위해서는 상당한 지적인 훈련이 요구되므로 微積分學의 학습을 시작하는 학생들에게는 너무 난해하다는 결함이 있다. 바람직한 것은 $\epsilon-\delta$ 方法보다 간단하고 직관적이며 동시에 모순 없고 엄밀한 微積分의 전개 방법이다. A. Robinson의 非標準 解析學은 無限小를, 논리적인 오류를 범하지 않고 微積分의 결과를 얻을 수 있도록, 재도입함으로서 이를 가능하게 하였다. 이 現代的인 無限小 方法에서는 超實數系에서 無限小를 사용하여 微分係數를 계산하지만 答을 實數로 해석하여 논리적 오류를 피한다. 이러한 現代的인 無限小 方法은 보다 더 직관적이면서도 엄밀한 微積分學의 이해를 가능하게 할 수 있지만 超實數의 順序體의 구성과 論理的 言語 및 一階 述語 計算의 통찰을 요하므로 초보자에게는 번거롭고 난해하다.

이러한 論議에서 드러난 흥미로운 사실은 初期 微積分學의 發見者의 思考 方法이, 비록 그것이 數學的으로 缺陷이 있는 방법이긴 하지만, 微積分의 學習을 시작하는 初步者의 자연스러운 접근 방법으로 간주되고 있어 歷史 發生的 原理를 따르지 않을 수 없다는 점이다. 學校數學에서 微分法을 도입하는 極限 方法은 컴퓨터를 이용한 數值的 方法과 컴퓨터 그래픽 기능을 이용한 방법을 보충하면 數學 內的인 입장에서 볼 때에는 標準 解析學의 $\epsilon-\delta$ 方法에 의한 嚴密한 論理的 展開의 直觀的인 準備가 된다는 점에서 바람직한 방법이라고 생

각되지만, 위에서 논의한 問題點과 함께, 現實과의 關係로 충만한 應用 가능한 學校數學[(6)] 이 되어야 한다는 數學 敎育的인 입장에서 볼 때 문제점이 제기되며 나머지 한 가지 대안인 無限小 方法에 대한 보다 상세한 敎育的 考察이 요구되는 것이다.

本稿는 數學敎育의 發生的 展開에 관한 硏究의 일환으로 歷史 發生的 原理에 입각한 微積分의 指導 方法과 數學 敎師를 위한 微積分學 敎材 構成의 문제를 다룬 것이다. 먼저 學校數學에서의 無限小 接近 方法의 장점을 고찰함으로서 그 敎育的 適切性을 주장하고자 한다. 다음에는 數學 敎師 敎育에서 바람직한 敎材觀을 형성시키기 위한 한 방안으로서 O. Toeplitz와 I. Lakatos의 理論에 대한 고찰을 통해 微積分學 敎材의 發生的 構成을 제안하고자 한다. 그리고, 끝으로 근래 離散數學의 중요성에 대한 인식으로 제기된 學校數學에서의 微積分 敎材의 위치에 대해 考察해 보기로 한다.

Ⅱ. 微積分의 無限小 接近 方法

오늘날 學校數學에서의 微積分의 論理的 基礎가 되는 원칙적인 생각은 微積分이 일반적인 極限 概念의 應用이라는 것이다. 微分係數는 變數의 增分과 그에 대응하는 函數의 增分과의 몫이 極限을 가질 때 그러한 극한값으로서 정의되며, 定積分은 上合 下合의 극한값으로 정의된다. 그리고, Leibniz의 微積分 記號를 사용하고 있는데 이는 微分商을 나타내었던 Leibniz의 원래의 의도와는 다르게, 포함되어 있는 極限 過程에 대한 소박한 직관을 암시하는 記號로 사용되고 있다. F. Klein이 지적한 바와 같이[(7)] 微分商에 대한 記號 dy/dx는 그것이 몫에서 유래한다는 것을 생각나게 하며, 有限差에 대한 통상적인 記號 Δ에 대하여 d는 極限 移行이라고 하는 의미가 부여되어 있다. 마찬가지로 $\int ydx$는 微小量의 合에서 유래하는 積分의 기원을 시사하고 있다. 合을 나타내는 記號 Σ를 사용하지 않고 S를 뜻하는 $\int$ 이 사용되고 있어 無限小量의 合의 뜻이 암시되고 있는 것이다. 그러면서도 현행 교과서에서는 微積分은 無限小라는 概念 대신에 한없이 0에 접근한다는 極限 過程으로 도입되고 있다. 그리고, 현대적인 抽象 數學의 形式主義的인 觀點이 강하기 때문에, 微積分이 어떤 現實的인 意味를 갖는가 혹은 일반적으로 現實的인 意味를 갖는가 어떤가 하는 것은 아무래도 좋은 것이며, 그러한 경향은 微積分의 應用에서 기껏해야 速度, 加速度, 速度와 거리, 넓이, 부피 정도를 다루는 것으로 그치고 있는 현재의 敎材 構成을 정당화하고 있다고 보여 진다.

그러나, 學校數學에서 微積分 指導의 주요 目的은 函數的 思考의 育成에 있으며 이는 科

(6) H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, D. Reidel Publishing Company, 1973, pp. 74-80.

(7) F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, erster Band, Verlag von Julius Springer, Nachdruck 1968, S. 223-255.

學的 思考를 위한 강력한 道具의 개발을 위한 것이라면, 微積分은 도입시부터 現實과의 關係로 충만하여야 하며, 기본적인 概念이 그러한 문맥 가운데에서 學習되어야 할 것이다. 어떤 函數를 微分하고 積分한다는 것이 무엇을 뜻하는가는 그 函數가 무엇을 뜻하는가에 달려있다. 函數를 그래프로 나타내고 微積分을 생각하면 曲線의 기울기나 넓이, 부피를 뜻하게 된다. 그러나 두 量 사이의 關係를 나타내는 函數를 생각하면 微積分은 物理的인 의미를 갖는다. 速度, 加速度와 경과거리, 立體의 단면적 函數나 표면적 函數와 부피 函數, 質量과 密度, 確率과 確率 密度, 容量 概念 등도 微積分 概念으로 설명된다. 더욱이 역사적으로 積分法은 넓이나 부피를 無限小量의 합으로 파악하여 그 公式을 발견하는 것으로 시작되었으며, 마찬가지로 速度와 曲線의 接線으로부터 微分法에 이르게 되었다. 고대 바빌로니아, 이집트, 中國의 數學이 이른바 '實際數學'이었으며, 이는 실제적 소재를 택하여 전개된 數學이었다는 점을 생각하면[8] 歷史 發生的 原理에 따른 微積分의 指導에서 '實際數學的인' 接近을 시도하는 것은 극히 자연스럽다. 이러한 측면에서 物理學에서 다루는 實際數學의 가치와 타당성을 논하고 그 교육적 중요성을 강조한 H. Freudenthal의 주장은 매우 주목할 만하다. 그에 따르면, 150km, 3g 등 物理學에서 사용되는 量을 나타내는 "구체적인 數는 절대적으로 엄밀하며 그에 대한 몇몇 數學者들의 저항은 순전히 獨斷이다."[9] 그는 微分의 教育的 適切性과 物理學 研究에서의 중요성을 다음과 같이 논하고 있다.[10]

函數 $f(x)$가 x에서 微分可能할 때, $f'(x)$를 微分係數라고 부르는 것은 微分式 $dy=f'(x)dx$에서 연유한 것이며, $f'(x)=dy/dx$이므로 $f'(x)$를 微分商이라고도 부른다는 사실은 極限에 의한 微分法 指導의 문제점을 말해주는 것이다. 微分 記號는 合成函數의 微分 公式이나 置換積分 公式에서 편리하게 이용되고 있다. 더욱이 微分에 대한 계산은 微分方程式 풀이에서 편리하게 이용되고 있다. 微分에 대한 논의가 소멸되지 않는 것은 無限小量을 다루고 그러한 量을 서로 나누는 物理學의 理論 때문이라고 생각할 수 있으나, 그 이유는 실제적인 자료를 解析學으로 數學化하면 微分이 나타나기 때문이다. 增分 $\Delta x, \Delta y$가 서로 대응하며 $\Delta y/\Delta x$가 dy/dx에 收斂한다고 말하는 대신에 無限小 變化 dy, dx와 그 몫 dy/dx를 말하는 것이 物理學의 표현 방식이다. 그러나, 物理學에서 사용되는 dy/dx에서 y는 函數 記號이고 x는 變數 記號임을 뜻하지는 않는다. 量을 文字로 나타내고 한 量의 다른 量에 대한 微分을 나타내는 記號가 dy/dx이므로 그 逆인 dx/dy를 구성할 수 있으며, 量과 函數的 觀點을 혼용하고 있음을 알 수 있다. 그러나 物理學에서는 실제적인 상황과 관련된 그 의미가 분명하므로 量的인 解釋과 函數的인 解釋이 혼동을 일으키지는 않는 것이다.

현재 우리나라 고등학교 物理 教科書에도 기본적으로 이러한 입장을 취하고 있다. 예를 들어, "매우 짧은 시간 간격 Δt 사이에 이동한 거리를 Δs라 하면 순간 속력 v는 $v=\Delta s/\Delta t$가

(8) 平林一榮, 數學教育の 活動主義的 展開, 東洋館出版社, 1987, pp.57-68.
(9) H. Freudenthal, op. cit., p.207.
(10) ibid., pp.553-559.

된다."[11]와 같이 定義하고 있어 數學 教科書에서의 극한값에 의한 定義와 같지 않다. 이러한 乖離 현상은 微積分을 物理的인 내용과 관련성을 갖도록 直觀的으로 다루려면 微分商을 다루는 것이 편리하기 때문에 생긴 것이라고 보아 그 원인을 物理學에 돌리기 보다 오히려 嚴密性을 추구하여 언어적 재구성을 시도해 온 數學의 발전에 그 근원적인 이유가 있다. 物理學 硏究에 적용되던 Leibniz의 無限小 理論의 몰락은 그 矛盾에 기인하는 바도 있지만 그 이론 자체가 한정된 발달 밖에 할 수 없었다는 데 기인한다는 Lakatos의 주장은 흥미롭다.[12] 그에 따르면, 無限小 方法의 沒落을 가져 온 것은 Seidel이 발견한 證明-分析에 의한 反駁의 방법에 이르게 한 Weierstrass 理論의 설명력과 발견적 잠재력이었다. 證明의 批判으로부터 생긴 숨겨진 補助定理가 독립적으로 검토될 수 없었던 점이 無限小 옹호자를 낙담시켰으며 이것이 無限小를 일세기 동안 數學史로부터 사라지게 하였다는 것이다. 그러나, A. Robinson의 非標準 解析學은 신용이 떨어진 無限小 理論을 현대적인 嚴密性의 요구를 만족시키는 강력한 理論으로서, Weierstrass에 의한 현대적인 標準 解析學의 성립 이전의 無限小 理論에 대한 教育的 歷史的 評價를 혁신시켰다.

數學은 유용하기 때문에 發展되고 教育되어 왔고 앞으로도 그러할 것이며, 더욱 더 순수한 嚴密한 형식으로, 따라서 현실과 더욱 유리된 數學을 가르치기를 고집하는 것은 教育的으로도 그렇고 數學 자체를 위해서도 바람직한 일은 아닐 것이라는 점이 '새 數學'의 좌절이 남긴 큰 교훈 가운데 하나이다. 物理學에서의 微分 概念과 그 記號 사용법은 現代 微積分學과 조화를 이루지 못하는 것이지만 모든 것을 標準 解析學的인 體系속으로 들어넣고자 하는 것은 獨斷이라고 생각되며, 이들은 物理學 硏究에서 매우 유용한 道具이므로, 教育的으로 양자를 조정할 수 있는 방안을 생각해야 할 것이며, 그 방안이 微積分의 無限小 接近法이다.

그런데, 微分의 사용은 현실적인 형태로 존재하는 實無限으로 無限小量을 받아들이는 것으로 極限 過程을 사용할 때와는 無限 觀念이 다른 것이다. 微積分學을 창시한 Newton은, 微分을 사용한 Leibniz와 달리, 實無限의 존재를 인정하는 데 주저하고 極限값에 무한히 접근하는 그러나 결코 완결되지 않는 潛在的 無限을 수용하는 極限 方法을 택하게 되었다. 微積分學은 그후 이러한 極限 方法을 사용하여 상당한 발전을 이루어 왔으나 그 基礎論的인 危期를 맞게 되고, Weierstrass의 $\epsilon-\delta$ 方法의 도입으로 비로소 엄밀한 전개가 가능하게 되었는데, $\epsilon-\delta$ 條件은 實無限을 받아들인 것으로 볼 수 있다. 無限集合을 實無限으로 받아들여 그 등급을 구분하고 演算을 정의하여 實無限에 관한 理論을 정립한 G. Cantor의 集合論이 나오면서 現代 數學은 결정적인 발전을 이룩하게 되었다. 최근 A. Robinson의 非標準 解析學에서는 無限小와 無限大를 實無限으로 간주하여 實數의 集合을 超實數의 集合으로

(11) 엄정인, 정풍호, 권재술, 고등학교 과학 Ⅱ(상), 금성교과서(주), 1990, p.15.
(12) I. Lakatos, Mathematics, science and epistemology, edited by J. Worrall & G. Currie, Cambridge University Press, 1978, pp.53-54.

확장함으로서 모순 없는 새로운 無限小 方法을 발전시킬 수 있었다.[13]

連續體가 不可分量인 無限小로 이루어졌다고 생각하면 Democritos의 파라독스와 같은 矛盾을 일으키게 되지만, 그러한 생각은 Cavalieri의 原理가 보여주드시 數學的인 發見과 學習에서 매우 중요한 역활을 한다는 點에 주목해야 할 것이다. 區分 求積法을 발견한 Archimedes의 思考 過程의 결정적인 단계도 입체의 단면의 넓이인 無限小 부피로부터 立體 全體의 부피로 곧, 微分에서 積分으로 이행한 推測 過程이었는 바, 이는 無限小 方法의 발견적인 힘을 보여주는 典型的인 例이며, 敎育的으로 매우 중요한 것이다.[14] 이를테면, G. Polya가 例示하고 있듯이, 三角形을 밑변과 평행인 무한이 좁은 平行四邊形 곧 無限小의 總合으로 생각하면, 三角形의 무게 중심은 그 三角形을 이루는 그러한 모든 平行四邊形의 무게 중심을 지나는 線 곧, 中線 위에 있으므로 三角形의 무게 중심은 세 中線의 交點임을 直觀的으로 理解시킬 수 있으며, 四面體의 무게 중심에 대해서도 類推를 통해 마찬가지로 생각하여 直觀的으로 이해시킬 수 있는 것이다.[15]

Ⅲ. 數學 敎師를 위한 微積分學 敎材의 發生的 展開

현재 師範大學에서 다루어지고 있는 數學 敎材는 전통적인 數學 敎科書와 마찬가지로 公理, 定義, 補助定理, 定理, 證明으로 이었지는 演繹的인 展開 樣式에 따라 구성되어 있다. 이러한 演繹的인 展開 樣式은 최종적으로 다듬어진 현대적인 槪念과 定理를, 그것을 탄생시킨 發生의 過程을 숨긴채, 論理的인 展開 順序에 따라 제시한다. 이러한 敎材를 통해서는 數學의 內容的 命題에 대한 '一次元的 理解' 수준의 추구에 머물 수 밖에 없으며, 數學의 哲學的 歷史的 分析과 數學的 思考의 發達 및 그 社會 文化的 背景 나아가 그 敎育的 價値와 原理에 관한 '二次元的 理解'를 기대하기는 어려울 것이다.[16] 오늘날 數學 敎師 敎育의 근본적인 문제의 하나는 이러한 演繹的인 敎材 構成에서 비롯되는 바, 이는 일찍이 F. Klein이 한탄한 소위 '二重斷絕'의 문제이다. 高等學校를 졸업하고 師範大學에 진학하여 "젊은 學生은 硏究를 시작하면서 어떤 점에서도 學校에서 배운 것을 생각해 내지 못하는 문제에 부닥치게 된다. 그러나 硏究를 마치고 敎職에 들어서면서 그는 갑자기 관습적인 初等數學을 규칙 바르게 가르쳐야 한다. 그는 거기서 이러한 과제를 大學 數學과 자력으로 관련지울 수 없으므로 대부분의 경우 옛날부터 사용한 敎育의 傳統을 곧바로 넘겨받게 된다."[17] 무엇보다 심각한 문제는 師範大學을 졸업하고 다시 中高等學校로 돌아가면서 곧바

(13) A. Robinson, Non-standard Analysis, North-Holland Publishing Company, 1966, pp. 260-282.
(14) G. Polya, Induction and Analogy in Mathematics, Princeton University Press, 1973, pp. 155-158.
(15) G.Polya, 禹正晧 譯, 어떻게 문제를 풀 것인가, (주)천재교육, 1986, pp. 234-237.
(16) 李敦熙, '敎科敎育學의 性格과 課題", 師大論叢, 第34輯, 서울大學校 師範大學, 1987, pp. 1-17.
(17) F. Klein, op. cit., S. 1.

로 大學에서 배운 數學을 무관계하고 불필요한 듯 잊어버리고 수년 전에 불필요하다고 여겨 끊어 버렸던 실마리를 체념섞인 서글픈 마음으로 다시 찾아 묶는 것이다.

이와 같이 數學을 論理的으로 展開된 完成된 知識 體系로 보고 이를 가르치는 形式主義的인 教育의 결함을 극복하기 위하여 일찍부터 제기되어 온 教授學的인 原理가 歷史 發生的 原理이다. Euclid 原論을 教科書로 한 형식적인 幾何 教育에 대한 批判으로 1741년에 출판된 A.C. Clairaut의 *"幾何 原論"에서 幾何의 歷史的 發生의 동기와 과정을 교재 구성*에 이용하려는 첫번째 시도가 이루어졌다.[18] 20세기에 들어와 發生的 原理를 강력히 옹호한 사람은 數學教育 近代化 運動의 선구자 가운데 한 사람인 F. Klein[19]과 H. Poincaré[20]이었다. 그들은 個體 發生은 種族 發生을 再現한다는 生物 發生的 原理인 E. Haeckel의 '再現의 原理'를 근거로 歷史 發生的 原理에 따른 數學教育을 옹호하고 教師 教育에서의 數學史의 중요성을 강조하였다.

數學 教師 教育을 위한 歷史 發生的 原理에 따른 數學 教材의 구성은 실질적으로 Hilbert의 문하생으로 無限小 計算의 指導 過程을 구상한 O. Toeplitz에 의해 최초로 이루어졌다. Toeplitz는 數學의 진정한 理解는 數學的 事實의 단순한 전달을 통해서는 달성될 수 없으며, '觀點'의 전달 곧, 數學과 그 方法의 특성에 대한 올바른 파악을 통해서만 가능하다고 보고, 그러한 '觀點'을 教師는 大學에서 획득해야 하며, 본질적인 것은 知識 자체가 아니라 그 觀點이라고 보고 이를 터득시키기 위한 수단으로서 '間接的인 發生的 方法'을 제기하였는 데, 이는 數學史의 세세한 내용을 전달하려는 것이 아니고 數學의 내용적인 發達과 問題 發生의 본질을 전달하고자 한 것이다.[21] 그는 다음과 같이 말하고 있다." 오늘날 우리가 規範的인 必須 要目으로 간주하여 가르치고 있는 無限小 計算의 이러한 모든 대상들, 곧 平均값의 定理, 테일러 級數, 收斂 概念, 定積分, 특히 微分商 자체, 이들에 관해서 결코 다음과 같은 質問은 제기되지 않는다. 왜 그러한가? 어떻게 그들에 이르게 되었는가? 이러한 모든 必須 要目은 또한 한 때 흥미진진한 探究의 目的이었으며, 자극적인 행위이었음에 틀림없다. 곧, 그들이 創造되었을 당시에 말이다. 概念의 근원으로 거슬러 올라갈 때, 時間의 먼지와 오랜 사용의 상처가 그로부터 떨어져 나가고 그들은 다시 생기 넘치는 存在로 우리 앞에 다시 蘇生하게 된다. 그리고 이 때 그로부터 두 가지 實踐 方法이 제기된다. 그 완전한 戲劇化를 통해 학생을 직접 發見에 안내하고 그렇게 함으로서 問題 設定, 概念 및 事實이 그들에게 生成되도록 할 수 있거나 —그것을 나는 直接的인 發生的 方法이라고 부를 것이다— 혹은 그러한 歷史的 分析을 통하여 그 본래의 意味와 모든 概念의 실제적인 核

(18) G. Schubring, Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik, Klett-Cotta Typoscript, 1978, S. 45-46.
(19) F. Klein, op. cit., S. 289.
(20) H. Poincare', 吉田洋一 譯, 科學と 方法, 岩波文庫, 1953, p. 135.
(21) G. Schubring, op. cit., S. 272-299.

心이 무엇인가를 스스로 배울 수 있으며 그로부터 이들 槪念에 대한, 더 이상 歷史와 아무런 관계도 없는, 敎授를 위한 結論을 이끌어 낼 수 있다. 이를 間接的인 發生的 方法이라고 부를 것이다."[22]

Toeplitz에게는 數學의 歷史가 문제가 아니라 問題, 事實 및 그 證明의 發生이 문제이며, 이러한 發生의 결정적인 方向 轉換이 문제이다. 그는 發生的 方法에 의한 指導가 高等學校에서 가르쳐지는 數學과 大學 課程의 數學 사이의 다리를 놓는데 가장 적합하다고 확신하고, 發生的 原理에 따른 無限小 計算에 관한 敎科書의 집필을 구상하였으며, 미완성작인 遺著 "無限小 計算의 發達"[23]을 남겼다. 歷史的 發生에 대한 고찰을 통해 획득된 微積分의 基本的인 槪念에 대한 적절한 觀點과, 槪念에 대한 메타 知識이 敎育 問題의 解決을 가져올 것이라는 입장에서 執筆된 이 책은 數學 敎師 敎育을 위한 數學의 歷史 發生的 展開의 한 典型이 될 수 있다고 생각된다. 책의 구성은 間接的인 發生的 方法에 대한 그의 해석과 대응하여 歷史的 發生 過程에 따라 각 觀點에 대한 상세한 분석이 이루어지고 있다. 먼저 無限小 計算의 發達은 서로 결합된 세 가지 槪念 곧, 無限 過程, 無限 過程의 본질적인 基礎가 되는 實數 槪念 및 函數 槪念의 발달로 성취되는 것으로 보고 그 歷史的 發生을 분석 기술하고 있으며, 다음에는 歷史的 發生의 순서에 따라 定積分의 發生에 대한 분석을 微分과 不定積分 보다 앞서 다루고 있으며, 끝으로 力學 問題에의 適用 單元이 나오고 있다.

Toeplitz에 따르면, 定積分을 발견한 것은 그리스 사람들이고 Archimedes는 그것을 성숙한 理論의 수준까지 끌어 올렸으나 Leibniz의 記號와 函數 槪念 그리고 임의의 曲線에 대한 생각만이 결여되어 있었을 뿐이었다. 그는 不可分量을 微積分學의 發見的인 方法論의 기초로 보고, 이를 이용한 Archimedes의 求積法을 현대적인 微積分學의 샘으로 간주하고 있다. 그리고 不可分量의 方法은 Cavalieri와 Kepler 및 Leibniz의 方法이었으며, 不可分量을 無限小 計算의 기초로 간주하는 입장은 그 후 Euler, Bernoulli 兄弟들, Tayler 등에 의해 嚴密하지는 않지만 發見的인 方法으로 사용되어 微積分學의 바탕이 마련되었음을 강조하고 있다.

그러나, Toeplitz의 硏究는 未完成作으로, Fourier 이후의 微積分學의 發達에서의 決定的인 問題 狀況을 고려하지 못하였으며, 累積的이고 連續的인 發達觀에 입각하여 指導 內容의 통일적인 觀點을 강조하도록 요구하고 있어, 數學史에서의 辨證法的인 發生의 論理를 등한시하고 있다. 이러한 점에서 數學의 歷史 發生的 原理를 옹호하면서 解析學에서의 平等收斂과 有界變動 函數 및 可測集合 槪念을 例로 들어 演繹的인 敎材 構成을 비판하고 證明과 反駁의 論理에 따른 發見的인 敎材 構成을 예시하고 있는 Lakatos의 硏究는 주목할만 하다.[24]

(22) O. Toeplitz, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, translated by L. Lange, The Calculus-A Genetic Approach, The University of Chicago Press, 1963, p. v.
(23) ibid.
(24) I. Lakatos, Proofs and Refutations—The Logic of Mathematical Discovery, edited by J. Worrall & E. Zahar, Cambridge University Press, 1976.

Lakatos에 따르면, 數學의 演繹的인 展開 樣式은 槪念의 定義와 定理를 그것을 탄생시킨 '論理', 곧 問題 狀況과 推測, 證明, 反例, 證明-分析, 理論的 槪念의 도입과 定理의 출현이란 發生 過程을 숨기고, 演繹的 展開란 구실아래 불시에 權威主義的으로 제시한다. Lakatos는 이러한 演繹的 展開 樣式이 敎育的으로 數學에 대한 獨立的이고 批判的인 思考를 저해해 왔다는 이유로 Euclid를 數學敎育에 대해 邪惡한 天才라고 비판한다. 그리고 Leibniz의 無限小 方法에서 Weierstrass의 $\epsilon-\delta$ 方法으로 이행하는 微積分學의 歷史的 發生 過程에서 일어난, 證明-分析 方法이란 數學的 發見의 論理의 出現 契機가 된, 平等收斂 槪念의 發生 過程을 재현하는 發見的 展開 方法을 예시하고 있다. 數學的인 槪念에 대한 意味의 理解를 염두에 두고 있는 다른 著者들처럼 W. Rudin은 그의 "解析學의 諸原理"(25)에서 平等收斂의 槪念을 도입하기 전에 '主要 問題에 대한 論議'란 절 속에서 推測과 그에 대한 反例를 제시하고 나서 平等收斂의 定義를 도입하는 형식을 취하고 있다. 그러나, Lakatos가 批判하고 있는 것은 이러한 敎材 構成에는 진정한 問題 狀況과 推測은 없고 제시된 質問과 그에 대한 例가 있을 뿐이며, 平等收斂 槪念이 證明으로부터 생긴 證明-生成 槪念임을 보이고 있지 못하고, 도리어 定義가 證明에 선행하는 演繹的 展開 樣式을 취하고 있다는 점이다. Lakatos는 '連續 函數의 임의의 收斂하는 數列의 極限 函數는 連續이다'라는 원초적인 推測, Cauchy의 證明과 Fourier의 全面的인 反例의 제시, Weierstrass의 連續體에 대한 理論의 發達에 의한 Cauchy의 證明에 대한 分析과 '有罪인' 補助定理의 發見, 推測과 證明의 改善에 의한 定理와 平等收斂 槪念의 도입의 순서로 전개되는 發見的 展開 方法을 예시하고 있다. 또한 Lakatos는 有界變動 函數와 Riemann-Stieltjes積分 可能性이란 槪念이 '임의의 函數는 Fourier 展開 가능하다'는 Fourier 推測에 대한 Dirichlet의 證明과 Jordan과 Riemann에 의한 그 證明의 分析을 통해 비롯된 證明-生成 槪念이라는 것과, 測度論에서 可測集合에 대한 Caratheodory의 定義가 測度의 확장에 관한 Caratheodory의 定理에 필요한 證明-生成 槪念임을, 그가 제시하고 있는 數學的 發見의 論理의 다음 단계인, 다른 여러가지 定理의 證明-分析을 통한 새로운 定理와 證明-生成 槪念의 출현 단계의 例로 제시하고 있으나, 그 다음 단계 곧, 그 동안에 발달된 理論의 재검토 단계를 거쳐 Lebesque理論이란 새로운 探究 分野가 출현하는 단계의 決定的 契機에 대한 만족스러운 分析을 하지는 못하고 있다.

Lakatos에 따르면, 數學史家들은 흔히 數學的 思考의 歷史에서의 推測과 反駁의 패턴을 간과하고 數學을 영원히 변치 않는 眞理의 축적으로 간주하며 과거의 數學者의 업적을 현대적인 관점에서 해석하려는 오류를 범하고 있다.(26) Toeplitz의 연구는 이러한 입장에서 보면 Weierstrass 이전의 微積分學을 그리스 數學과 그 당시까지 발달된 無限 過程, 實數 槪念, 函數 槪念의 歷史的 發達을 바탕으로 發生的으로 해석하려 한 것으로 볼 수 있으며,

(25) W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
(26) I. Lakatos, Mathematics, science and epistemolgy, op. cit., pp. 43-60.

따라서 과거의 이론을 당대까지의 이론으로 발전해 온 連續的인 成長線 上에서 評價하려는 입장에 서 있으며 推測, 證明, 反駁, 경쟁적인 이론과의 鬪爭을 통한 辨證法的인 歷史的 發達 패턴을 간과한 것으로 볼 수 있다.

M. Wagenschein은 發生的 原理를 發生的—소크라테스적—例題式의 原理를 포괄하는 原理로 보고 있으며, H. Freudenthal이 '典型的인 경우'의 觀察과 分析을 강조하고 있드시, 본보기는 知識의 일부분이라기보다 그 일반적인 양식인 操作的 schéme의 형성을 가능하게 하는 apprehensive한 理解(28)를 돕는 것이다. 이러한 관점에서 Lakatos의 '證明과 反駁'은 數學 敎師 敎育을 위한 또 하나의 典型的인 敎材가 될 수 있다고 생각된다.

한편, A. Robinson의 非標準 解析學은 고전적인 無限小 方法을 嚴密한 理論으로 재구성 함으로서, Leibniz의 無限小 理論을 歷史的으로 새롭게 評價하지 않을 수 없게 하였다. 그러나, Lakatos에 따르면, 非形式的인 理論은 틈이 있으며 감추어진 槪念이나 補助定理를 부주의로 생략한 形式的인 理論이라는 관점은 數學의 歷史的 發生에 대한 진정한 理解를 어렵게 한다.(29) Leibniz와 Robinson의 無限小 理論의 결정적인 차이점은, Robinson의 理論은 實解析學의 확장으로 非標準 解析學을 고안함으로서 이를 檢査 可能하게 하는 양자 사이의 다리가 있다는 점이며 이러한 진전은 Weierstrass 이전에는 이루어질 수 없었다는 점이다. 微積分의 無限小 接近法은 이러한 현대적인 無限小 理論과 그 歷史 發生的인 觀點을 파악한 敎師에 의해서 보다 의미있게 다루어질 수 있을 것으로 생각된다. 그러나, Robinson의 非標準 解析學 理論에 따라 구성된 현대적인 無限小 計算에 대한 敎材 역시 演繹的 展開 樣式에 따라 전개되고 있는 바(30), 數學 敎師 敎育을 위한 無限小 計算에 대한 歷史 發生的 展開에 관한 연구가 요망된다.

Ⅳ. 微積分學 對 離散數學

美國의 數學敎師 全國 議會(NCTM)에서 1989년에 1990년대의 美國 學校數學의 개선 방향을 제시한 "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics"(31)에서는 다음과 같은 이유에서 微積分이 더 이상 學校數學의 절정으로 간주되지 않으며, 離散數學이 모든 학생을 위한 敎育課程에서 보다 더 중심적인 위치에까지 高揚되어야 한다는 입장을

(27) M. Wagenschein, Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band 2, Ernst Klett Verlag, 1970, S. 68.
(28) H. Freudenthal, Weeding and Sowing, D. Reidel Publishing Company, 1978, pp. 192-210.
(29) I. Lakatos, Mathematics, science and epistemolgy, op. cit.
(30) J.M. Henle & E.M. Kleinberg, Infinitesimal Calculus, The MIT Press, 1979.
H.J. Keisler, Foundations of Infinitesimal Calculus, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.
(31) The Working Groups of the Commission on Standards for School Mathematics of NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, op., cit., pp. 123-186.

취하고 있다. 21세기를 지향해 나아가면서 情報와 그 소통은 적어도 물질적인 산품만큼 중요하게 된다. 物理的이고 物質的인 世界는 連續數學 곧, 微積分學과 그 선행 요건이 되는 代數, 幾何, 三角法의 아이디어에 의해서 모델화되는 것이 보통이나, 情報 處理란 非物質的인 世界는 離散數學의 사용을 요구한다. 情報社會의 주역인 컴퓨터는 본질적으로 有限이며 離散的인 機械이므로, 有限個의 元素로 이루어진 集合이나 體系의 數學的인 性質을 연구하는 離散數學의 내용이 컴퓨터를 이용한 問題 解決에 불가결하게 된다. 이러한 사실에 비추어 모든 학생들은 有限 그래프, 行列, 數列, 組合, 漸化式, 歸納的 思考 方法, 알고리즘등과 같은 離散數學의 概念과 方法에 대한 경험을 하는 것이 매우 중요하다. 微積分學의 硏究를 위한 基礎를 마련하는 것은 여전히 大學에 진학할 학생들을 위한 高等學校 敎育課程의 주요한 목표이지만 離散數學의 硏究를 위한 基礎를 마련하는 것 또한 이들에게 마찬가지로 중요하다.

이에 대하여, 數學 敎育에서 微積分學이 中核的인 敎授要目으로 계속 그 위치를 유지해야 한다는 최근의 여러 학자들의 주장의 근거는 다음과 같이 요약된다.(32) 微積分은 數學의 여러 분야에 접근하는데 필수적으로 요구되고 數學 이외의 많은 분야에 광범하게 適用되며 創意的 思考와 獨創的인 適用 經驗을 제공하는 풍부한 學習 機會를 제공해 준다. 微積分은 數學的 아이디어와 그 適用 對象이 풍부하다는 점에서 아직까지 그와 대적할만한 분야가 없으며 따라서 數學敎育에서 본질적인 것이 되지 않을 수 없다. 특히, 數學 學習에서 無限 過程이란 매우 중요한 아이디어를 도입하는 최상의 機會가 된다. 數學에는 有限過程의 數學과 無限 過程의 數學이 있으며, 이 양자는 밀접히 관련되어 있고 매우 많은 것을 공유하고 아이디어를 교환하는 相補的인 存在이므로 한 쪽을 무시하는 數學敎育을 받는다는 것은 數學의 반이상을 잃는 것이다. 無限 過程을 대표하는 數學 分野인 解析學은 微積分의 直觀的인 準備 없이는 다루기 어렵다. 微積分은 科學 가운데 다양한 根源을 가진 體系的인 分野이나, 離散數學은 그래프 理論으로부터 數論에 이르기까지 여러가지 것으로 이루어진 잡다한 내용이며 이는 전체 내용의 一貫性을 상실함으로서 數學敎育의 質을 격하시킬 위험이 있다. 微積分은 體系的이고 一貫性이 있는 知識 體系이므로 離散數學보다도 가르치기 쉽다. 微積分 指導에 數値的인 方法을 사용하고 그래프 理論과 組合論을 도입하며 알고리즘을 강조하는 것은 좋지만 다음 世代에게서 귀중한 連續數學의 연장과 그것이 제공하는 數學에 대한 一貫된 觀點을 빼앗을 수는 없다. 오늘날 離散數學을 강조하는 상황은 1960년대의 '새 數學'의 대유행과 같다. 모든 數學 硏究는, 離散的인 分野라고 할지라도, 微積分을 공부할 때 처음 대한 모든 아이디어를 이용한다. 數學 內的 外的인 問題를

(32) M.E. Rayner, "Is Calculus Essential?", edited by M. Zweng et al., Proceedings of the *Fourth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser, *1983*, pp. 50-52.
A. Ralston, "Will Discrete Mathematics Surpass Calculus in Importance?", The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 5, 1984, pp. 371-381.

해결하고 數學的인 觀念을 형성하는 데 微積分의 중요성은 상실되지 않았다. 學校數學에서 微積分을 줄이려는 생각은 위험한 생각이며, 微積分을 희생하고 離散數學을 가르쳐서는 안 된다.

이에 대해, 微積分이 數學敎育에서 필수 불가결한 내용은 아니며 離散數學이 보다 중요하다는 최근의 여러 주장의 근거는 대략 다음과 같다.(33) 微積分은 現代 數學의 入門 課程으로, 폭넓은 바탕을 마련해 주는 概觀 課程으로, 다른 學問 分野의 硏究를 하는 데 필요한 道具를 제공하는 서비스 과정으로서의 역활을 하는 주요한 내용으로 간주되어 왔으나, 이러한 생각은 컴퓨터 科學의 폭발적인 발달에 의해 급속히 성장하고 있는 離散數學의 현대적인 應用數學 분야에서의 역활 때문에 재고되어야 한다. 微積分을 중심으로 한 數學 敎育 課程은 전통적인 微積分의 내용과 함께 離散數學을 포함한 現代 數學의 다양한 아이디어가 폭넓게 포함되도록 적절히 수정되어야 한다. 금세기에 들어와 純粹數學의 급속한 발달로 微積分을 근원으로하는 數學의 비율이 꾸준히 감소하여 왔으며, 그 결과 오늘날에는 數學의 많은 부분은 微積分과 거의 무관하게 되었다. 數學界에서의 微積分의 중요성의 감소는 가속되고 있으며, 특히 고전적인 應用數學의 중요성이 상대적으로 줄어드는 등, 應用數學界가 급속히 변화하고 있다. 고전적인 應用數學은 본질적으로 自然界를 이해하는 道具가 되어왔으나, 컴퓨터 科學의 발달로 離散數學을 이용하는 새로운 應用數學 분야가 크게 발달하였다. 처음에 數値解析의 폭발적인 성장이 초래되게 되었는 데, 이는 고전적인 解析學에서의 連續函數를 컴퓨터가 요구하는 離散的인 形態로 전환해야 할 필요성 때문이었다. 컴퓨터 科學에서 알고리즘과 그 解釋의 중요성이 인식되면서 離散的인 應用數學은 독자적으로 발달될 필요가 있는 영역으로 인식되게 되었다. 고전적인 微積分學이 一次 産業革命을 촉진하고 다시 그에 의해서 발달하지 않을 수 없었던 것과 꼭마찬가지로, 離散數學은 情報産業 革命이란 二次 産業革命을 뒷받침하고 그에 의해서 발달하고 있다. 컴퓨터 科學의 요구는 離散數學, 특히 組合論, 그래프 理論, 數理 論理學과 같은 내용을 급성장하는 硏究分野로 만들었다. 離散數學은 컴퓨터 科學뿐만 아니라, 社會科學, 經營學, 物理學, 工學 등 컴퓨터를 이용하여 問題를 解決해야 하는 모든 분야에 종사해야 할 학생들에게 필요하므로, 數學敎育에서 離散數學은 微積分과 동등한 역할을 해야 할 때가 되었다.

여기서 주목해야 할 것은 離散數學의 중요성을 강조하는 것이 微積分의 數學的 敎育的 價値를 완전히 무시한다는 입장은 아니라는 점이다. 微積分의 高等學校 敎材로서의 정당성은 函數的 思考의 절정으로서의 微積分, 觀察 科學의 조직과 표현 형식으로서의 微積分, 차후의 연구와 직업의 관점에서의 微積分, 시의에 적합한 一般 陶冶의 일부분으로서의 微

(33) F.S. Roberts, "Is Calculus Necessary?", edited by M. Zweng, et al., Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser, 1983, pp. 52-53.
F.S. Roberts, "The Introductory Mathematics Curriculum: Misleading, Outdated, and Unfair", The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 5, 1984, pp. 383-399.

積分, 敎育 수단으로서의 微積分이란 다섯가지 근거로 뒷받침된다는 점은 오늘날에도 변함이 없다고 생각된다.[34] 離散數學은 1960년대의 '새 數學'과 달리 數學 내부로부터가 아니라 컴퓨터 科學이란 외적인 힘에 의해 동기 유발되고 있는 또 하나의 '새 數學'이며, 그 敎育的 價値를 주장하는 사람들에게 微積分에 필적할만큼 일관성있는 離散數學의 敎材 構成 方法을 찾는 것은 주요한 도전이 되고 있다. 그러나 분명한 것은 컴퓨터, 數値的 方法, 離散數學의 중요성이 증대하고 있는 현실을 외면하고 전통적인 微積分 중심의 敎育課程을 고수하려는 것은 타당하다고 보기 어려우며, 微積分과 離散數學을 적절히 조화시킨 敎育課程을 개발해야 할 것이다.

V. 結 言

우리나라 學校數學에 微積分 敎材가 도입된 것은 1946년 美軍政廳에 의해 中等學校 數學科 敎授要目이 공포되면서부터이며, 微積分은 그 이후 오늘날까지 高等學校 數學敎育의 주요한 내용이 되어 왔다. 더욱이 1960~1970년대에 學校數學의 '새 數學'으로의 개선 노력을 거치면서, 學校數學의 現代 數學化라는 정신에 따라 大學 數學과 學校數學 사이의 틈을 제거하는 것을 본질적인 목표로 추구하였는 바, 微積分 敎材의 정당성에 이의가 제기될 수 없었으며, 주로 大學 進學生을 위한 주요한 준비 敎材로 간주되어, 그간의 敎育課程 개선 노력에도 불구하고, 그 形式主義的인 敎育이 의연히 지속되어 왔다.

그런데, 1980년대로 접어들면서 이미 數學 敎育界에는 問題 解決과 適用 指向性에 대한 요구가 강하게 일어났다. '새 數學'의 嚴密性의 물결이 썰고 그 대신에 問題 解決과 應用 물결이 밀어닥치고 있는 것이다. 中等學校에서의 應用 指向性의 근거는, 數學 외적인 問題 解決에 도움을 주는 數學을 요구하는 實利主義的 根據, 일반적인 應用 能力 開發과 메타 知識의 開發에 도움을 주는 數學敎育을 요구하는 方法論的인 根據, 數學的인 內容을 안내하여 動機를 誘發하고 보다 낳은 理解와 강력한 把持를 가능하게 하는 數學 學習에 도움을 주는 問題 狀況을 요구하는 學習 心理學的인 根據, 數學의 文化的 歷史的인 참모습의 理解에 기여하는 應用 指向 敎育을 요하는 知識論的인 根據 등으로 요약될 수 있다.[35] 이러한 應用 指向的인 數學敎育은 應用된 數學의 제시와 전달보다, 應用되는, 應用 可能한 數學, 關係로 충만된 數學이 보다 중요하며 이러한 觀點에서의 微積分 敎材의 취급을 요구한다. 學校數學에서 問題 解決 및 應用 指向性과 함께 지금까지 거듭 제기되어 온 것이 論理보다 直觀을 강조하자는 주장이었다. 微積分 指導의 경우에도 일반적으로 論理的 嚴密性보다 直觀的인 理解를 중시하지 않을 수 없음은 명확하다. 예를 들어, 連續函數의 개념을 직관적으

(34) W. Blum & G. Törner, Didaktik der Analysis, Vandenhoeck & Ruprecht, 1983, S. 198.
(35) ibid., S. 245-247.

로 이해시키기는 어렵지 않을 것이지만, 이를 엄밀하게 $\epsilon-\delta$ 方法으로 指導하려면 全稱 限定詞와 存在 限庭詞의 존재를 파악하고 그 順序를 정하는 커다란 어려움을 극복해야 하는데, 이는 깊은 論理的 洞察을 요하는 것이다. 學校數學에서 微積分 敎材의 形式的 取扱은 보다 철저한 연구를 필요로 한다. 어떤 區間에서 導函數의 값이 0인 函數는 常數函數이며, 微分係數가 항상 陽인 函數는 單調 增加 函數임은 직관적으로 분명한데 이를 平均값의 定理를 사용하여 證明하는 까닭을 학생들은 이해하기 어려울 것이다. 學校數學에서의 微積分 敎材는 論理的인 嚴密性을 통해서가 아니라 直觀的으로, 더욱이 物理的인 內容과의 關聯性을 통해서 보다 의미있게 지도될 수 있을 것이다. A. Robinson의 非標準 解析學의 無限小 方法도 論理的으로 매우 세련된 방법으로, $\epsilon-\delta$ 方法보다 용이할런지 모르지만, 초보자에게는 난해하고 왜 그러한 세련이 요구되는지 이해하기 어려울 것이므로 學校數學으로서는 역시 적절한 방법이 못될 것이다.

개인의 數學의 學習은 人類의 大域的인 學習 過程을 따르는 것이 자연스러우며, 數學的 槪念의 發見者는 초보자이었으므로 그들의 접근법은 매우 자연스러운 指導 方法이 될 수 있다는 發生的 原理는 學校數學에서 無限小 方法이나 極限 方法으로 微積分을 指導할 것을 요구한다. 그런데 현재 사용되고 있는 極限 方法은 앞에서 고찰한 바와 같은 여러가지 問題點을 가지고 있으며, 이에 비해서 無限小 方法은 發生的 측면과 應用 指向的 측면 및 微積分 指導의 目的에 비추어 學校數學에서 보다 바람직한 接近法일 것으로 생각된다. 그러나 이는 理論的인 分析의 결과일 뿐이며 學校 微積分 敎材의 無限小 接近法에 대한 보다 구체적인 연구가 요망된다.

그러나 Robinson이 現代的인 無限小 方法을 제시하였기 때문에 學校數學에서 極限 方法이나 $\epsilon-\delta$ 方法보다 古典的인 無限小 方法에 새로운 의미를 부여하려는 것은 절대로 아니다. 과거의 理論을 현대적인 理論으로 이어지는 連續的인 成長線 위에서 평가하는 것은 Lakatos의 주장대로 數學의 올바른 理解와 數學의 發生 論理를 바르게 파악하는 데 장애가 될 수도 있을 것이다. '證明과 反駁의 論理'[36]를 받아들이지 않는다고 하더라도, 微積分의 올바른 指導를 위해서 數學 敎師는 微積分의 歷史的 發達에 대한 分析을 통한 그 觀點의 변화 과정을 명확히 이해할 필요가 있을 것이다. 결국, 數學 敎師 敎育을 위한 微積分學 敎材의 發生的 展開가 요구되며, 本稿에서 고찰한 O. Toeplitz와 I. Lakatos의 연구 결과는 그 典型이 될 수 있을 것으로 생각된다.

微積分學을 바탕으로 하는 連續인 數學은 지난 수 세기 동안에 걸쳐 物理學과 工學의 발달에 크게 기여하면서 그에 큰 은혜를 입어 왔는 데, 오늘날 離散數學이 새롭게 출연한 情報科學으로 말미암아 그 발달에 크게 기여하면서 그에 큰 은혜를 입고 있다. 17세기에 Galileo는 自然이란 數學的인 言語로 쓰여져 있다고 하였고, 20세기에 J. Piaget는 數學은

(36) I. Lakatos, Proofs and Refutations, op. cit.

人間의 心的 考古學이라고 생각하였다.[37] 數學은 한 편으로는 보다 더 自然의 探究와 관련된 活動을 위해, 그리고 다른 한편으로는, 보다 더 情報 處理와 관련된 活動을 위해, 급속히 발전하고 있는 바, 이러한 數學의 주요한 바탕이 微積分과 離散數學임은 부정하기 어려울 것이다. 學校數學은 이러한 數學의 모습을 외면해서는 안될 것이며 傳統的인 微積分 教材와 離散數學을 적절히 조화시킨 敎育課程의 開發 硏究가 요구되는 것이다.

微積分은 高等學校 教材로는 너무 어려우며 학생들은 그 핵심을 이해하지 못하고 오로지 기계적으로 微分하고 積分하게 되어 形式主義에 빠지기 쉽다는 批判은 敎育的으로 중대한 일반적인 위험성 가운데 하나이지만, 이상의 論議에 비추어 이를 指導 方法上의 問題로 파악하지 않을 수 없는 것이다. 무엇보다도 微積分 教材를 그 起源이나 硏究 目的을 고려하지 않고 直觀과 適用에 등을 돌리면서 數學 內的인 體系로서 보다 嚴密하게 論理的으로 다루고자 하는 教師의 態度가 그러한 形式主義 教育을 초래한다고 생각되며, 이는 현재와 같은 數學 教師 教育의 필연적인 귀결이라고 생각된다. H. Freudenthal이 지적하고 있드시 "數學은 유용한 活動으로서 출발하였으며 오늘날 數學은 그 어느때 보다도 더욱 유용하다. 그러나 이는 삼가면서 하는 말이다. 다음과 같이 말해야 할 것이다. 數學은 유용하지 않았다면 존재하지 않았을 것이다. 이와 같이 數學의 有用性을 강조하는 이유는 무엇인가? 그 이유는 眞理만큼 쉽게 잊혀지는 것이 없기 때문이다. 指導와 教育에 책임이 있는 사람들조차 흔히 이 점을 잊는다. 그들이 그것을 부정할 수 있거나 부정하리라고 주장하지는 않는다. 그러나 指導와 教育은 실행이며 말로는 쉽게 인식되는 것이 행동에 영향을 주기까지에는 오랜 시간이 걸리는 것이 보통이다."[38] 그러나, 이미 오랜 시간이 지났다. 本稿에서 고찰한 微積分 教材의 問題는 學校數學과 數學 教師 教育이 당면한 問題의 핵심과 그 解決 方向을 상징적으로 나타내 주고 있다고 생각된다.

參 考 文 獻

1) 朴漢植, 數學教育史, 教學社, 1982.
2) 엄정인, 정풍호, 권재술, 고등학교 과학 Ⅱ(상), 금성교과서(주), 1990.
3) 李敦熙, "教科教育學의 性格과 課題", 師大論叢, 제34집, 서울大學校 師範大學, 1987, pp. 1-17.
4) 平林一榮, 數學教育の 活動主義的 展開, 東洋館出版社, 1987.
5) Beth, E. & Piaget, J., Mathematical Epistemolgy and Psychology, D. Reidel Publishing Company, 1966.

(37) E. Beth & J. Piaget, Mathematical Epistemolgy and Psychology, D. Reidel Publishing Company, 1966.
(38) H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, op. cit., p. 16.

6) Blum, W. & Törner, G., Didaktik der Analysis, Vandenhoeck & Ruprecht, 1983.
7) Freudenthal, H., Mathematics as an Educational Task, D. Reidel Publishing Company, 1973.
8) Freudenthal, H., Weeding and Sowing, D. Reidel Publishing Company, 1978.
9) Hamley, H.R., Relational and Functional Thinking in Mathematics, NCTM, The Ninth Yearbook, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1934.
10) Henle, J.M. & Kleinberg, E.M., Infinitesimal Calculus, The MIT Press, 1979.
11) Keisler, H.J., Foundations of Infinitesimal Calculus, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.
12) Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, erster Band, Verlag von Julius Springer, Nachdruck, 1968.
13) Lange, L., The Calculus-A Genetic Approach, The University of Chicago Press, 1963.
14) Lakatos, I., Proofs and Refutations-The Logic of Mathematical Discovery, edited by Worrall, J. & Zahar, E., Cambridge University Press, 1976.
15) Lakatos, I., Mathematics, science and epistemolgy, edited by Worrall, J. & Currie, G., Cambridge University Press, 1978.
16) Marchi, P., "Can Heuristic be Taught?", For the Learning of Mathematics, vol. 1, num. 2, 1981, pp. 35-42.
17) NCTM, The Working Groups of the Commission on Standards for School Mathematics of NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989.
18) Perry, J., "The Teaching of Mathematics", Bidwell, J.K. & Glason, R.G. (ed.) Readings in the History of Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics, 1970, pp. 220-245.
19) Poincaré, H., 吉田洋一 譯, 科學と 方法, 岩波文庫, 1953.
20) Polya, G., Induction and Analogy in Mathematics, Princeton University Press, 1973.
21) Polya, G., 禹正晧 譯, 어떻게 문제를 풀 것인가, (주) 천재교육, 1986.
22) Ralston, A., "Will Discrete Mathematics Surpass Calculus in Importance?", The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 5, . 1984, pp. 371-381.
23) Rayner, M.E., "Is Calculus Essential?, edited by M. Zweng et al., Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser, 1983, pp. 50-52.
24) Robersts, F.S., "Is Calculus Necessary?", edited by M. Zweng, et al., Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser, 1983,

pp. 52–53.

25) Roberts, F.S., "The Introductory Mathematics Curriculum: Misleading, Outdated, and Unfair", The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 5, 1984, pp. 383–399.

26) Robinson, A., Non-standard Analysis, North-Holland Publishing Company, 1966.

27) Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

28) Rucker, R., Infinity and Mind, Birkhäuser, 1982.

29) Schubring, G., Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik, Klett-Cotta Typoscript, 1978.

30) Tall, D., "Comments on the Difficulty and Validity of Various Approaches to the Calculus", For the Learning of Mathematics, vol. 2, num. 2, 1981, pp. 16–21.

31) Toeplitz, O., Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, translated by L. Lange, The Calculus—A Genetic Approach, The University of Chicago Press, 1963.

32) Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band 2, Ernst Klett Verag, 1970.

Re-examination of the Calculus in School Mathematics

Cheong Ho Woo

Abstract

In the early part of the 20th century, J. Perry and F. Klein insisted that the elementary principles of the calculus should be an essential element of school mathematics, from the standpoint of functional thinking, comprehending the physical phenomena, and mental training. And, since 1946 we have taught the calculus for all high school students as the capstone experience of school mathematics. But the need for reforming the school calculus has increased by the current trend of mathematics-educational thoughts, stressing the intuitive understanding, problem solving, application, and the importance of discrete mathematics.

The present study was undertaken to closely examine the phase of the calculus in school mathematics. The limiting approach to calculus now in use gives rise to a trouble in understanding the basic concepts of calculus using the symbols of the old infinitesimal method, and comes into question because of the alienation from the infinitesimal method in physics and the claim for the applicable mathematics fraught with relations to reality.

This study is going to propose that the infinitesimal method is an appropriate approach to school calculus on the ground that it is harmonious with the historical genetic principle, the concrete mathematical approach fraught with physical relations and modern mathematical thinking in terms of the actual infinities.

The formalistic deductive approach to mathematics in the college of education has brought forth the attitude of mathematics teachers who prefer rigorous systematic approach to school mathematics turning their backs to the historical origin, the goal of teaching, the intuition and the application. In order to dissolve the serious problem of 'double-forgetting' in mathematics teacher education caused by the formalistic approach to mathematics, this study is going to propose the historical genetic approach to the calculus in the college of education, taking examples by O. Toeplitz and I. Lakatos.

The growing importance of discrete mathematics for information processing resulted in the need for changes in the school calculus. But the development of the mathematics curriculum appropriately accentuating the positive aspect in both the calculus and the discrete mathematics is needed, because they are complementary not alterative.