

Black Hole에서 입자의 운동과 phase space

소 광 섭 · 광 윤 · 항
(서울대학교 사범대학 물리교육과)

1. 서 론

Black hole은 Einstein의 일반상대성 이론에 의해서 예언된 것인데, 그 후로 몇가지 black hole에 대한 해가 발견되었다. 그 중에서 Schwarzschild는 구대칭이고 정적인(static) black hole의 해를 발견하였고, Reissner-Nordström은 전하를 가진 black hole의 해를 발견하였다. 각 운동량을 가진 black hole의 해도 발견되었다.

이 해들은 시공간의 길이로 표현되며, 좌표계마다 각각 다른 형태로 나타난다. black hole에서 입자의 운동을 서술할 때 어떤 좌표계를 택하느냐에 따라서 black hole의 특징은 새롭게 나타난다. 예를 들면 Schwarzschild 시공간 좌표계에서는 event horizon이 있고, Kruskal-Szekeres 시공간 좌표계에서는 black hole이 만드는 시공간이 확장됨을 알 수 있다.

phase space에서는 입자의 위치와 운동량이 동시에 좌표로 주어짐으로써 시공간 좌표계에 비해 입자의 역학적 상태를 보다 분명히 나타낼 수 있고, 입자의 운동을 통계적으로 취급하는데 용이하다.

이러한 장점을 고려하여 이 논문에서는 phase space를 도입하여 black hole에 대한 다른 측면의 이해를 돕고자 하였다.

2절에서는 black hole에 의해서 나타나는 입자의 phase flow를 조사하여 black hole의 특징을 살펴보고, 3절에서는 phase space에서의 입자의 밀도를 구하여 black hole의 성질을 알아보았다. 4절에서는 결론을 주었다.

2. black hole에 의해서 나타나는 입자의 phase flow

1. Schwarzschild black hole의 경우

구대칭이고 정적인(static) Schwarzschild black hole의 해는 구좌표계(t, r, θ, ϕ)에서 다음과 같은 metric으로 표현된다.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \dots\dots\dots(1)$$

M 은 black hole의 질량이다.

이 중력장에서 geodesic의 tangent vector를 4-momentum vector $\dot{p}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ 로 하면, metric (1)식으로부터 대칭성을 이용하여 운동상수 $p^t=0$, $p_r=-E$, $p_\theta=\pm L$ 을 발견한다. 여기서 E 는 무한대에서 입자의 에너지이고, L 은 입자의 총각운동량이다. 이들 운동상수와 (1)식의 metric 성분 $g_{\mu\nu}$ 와 energy-momentum에 관한 식 $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu + m^2=0$ (m 은 입자의 정지질량)을 사용하면 입자의 운동방정식을 구할 수 있다.

$\tilde{E} \equiv \frac{E}{m}$, $\tilde{L} \equiv \frac{L}{m}$ 로 하고, 입자의 고유시간 $\tau=m\lambda$ 를 도입하면 r 방향 운동방정식은

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) = \tilde{E}^2 \dots\dots\dots(2)$$

이 되고, t 방향 운동방정식은

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} \dots\dots\dots(3)$$

가 된다. (2)식에서

$$\tilde{V}^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \dots\dots\dots(4)$$

은 Schwarzschild 중력장에서 입자의 effective potential을 나타낸다.

$\tilde{L}=0$ 일 때 입자의 고유시간 τ 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (2)식으로부터

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{d\tau} = \pm \left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(5)$$

이 된다. (+)부호는 black hole로부터 멀어지는 입자의 운동량을 의미하고, (-)부호는 black hole에 가까워지는 운동량을 의미한다. 운동량 $\dot{r} \equiv \frac{dr}{d\tau}$ 은 입자와 함께 운동하는 관측자가 보는 운동량이다.

위치좌표 r , 운동량 \dot{r} 을 좌표축으로 하는 phase space(r, \dot{r})에서의 한점을 한개의 입자와 대응시켜 (5)식을 나타내면 <그림 1>과 같다.

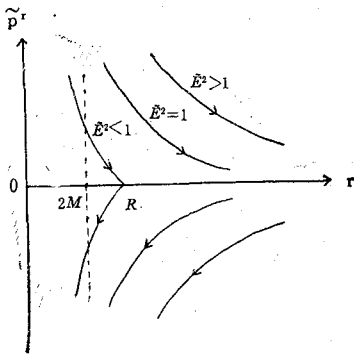
$\tilde{L}=0$ 일 때 좌표시간 t 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (2)식과 (3)식으로부터

$$\dot{r}' \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \frac{1}{\tilde{E}^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(6)$$

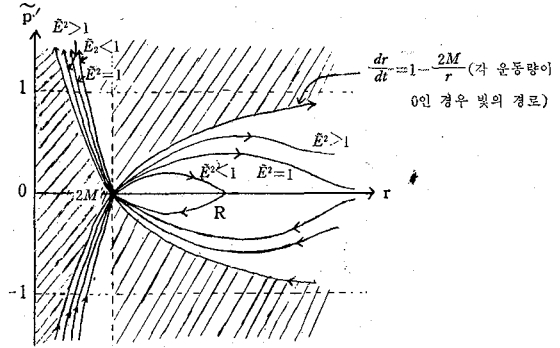
이 된다. 운동량 $\dot{r}' \equiv \frac{dr}{dt}$ 은 무한대에서 정지해 있는 관측자가 보는 운동량이다.

(6)식을 r, \dot{r}' 를 좌표축으로 하는 phase space(r, \dot{r}')에 나타내면 <그림 2>와 같다.

<그림 2>에 나타난 것처럼 phase space(r, \dot{r}')에서는 어떤 에너지를 가진 입자도 빛의 경로인 $\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r}$ 을 벗어나지 못한다. 즉 빗금친 부분은 $d\tau^2 < 0$ 이므로 timelike 입자가 존재할 수 없는 영역이다.



<그림 1> Schwarzschild 중력장에서 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space (r, \tilde{p}') 에 나타나는 입자의 phase flow. R 은 입자의 turning point 이다.



<그림 2> Schwarzschild 중력장에서 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space (r, \tilde{p}') 에 나타나는 입자의 phase flow. R 은 입자의 turning point 이다.

모든 timelike 입자는 $r=2M$ 에서 $\tilde{p}'=0$ 가 되어 상태의 구별이 없어진다. 이것은 Schwarzschild 중력장에서 phase space (r, \tilde{p}') 가 $r=2M$ 에서 특이점을 가진다는 것을 말해준다. 결국 black hole로부터 무한대에 있는 관측자에게는 $r=2M$ 에서 입자는 정지해 보이고, 특이점으로 보인다는 것이다. parameter η 을

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) \dots\dots\dots(7)$$

와 같이 도입하여 (6)식을 적분하면 turning point R 에서 $r=2M$ 까지 입자가 운동하는데 걸리는 좌표시간은 $\Delta t = \infty$ 가 된다. 이 결과는 무한대에 있는 관측자에게는 입자가 $r=2M$ 에 도달하지 못하는 것처럼 보이며, $r=2M$ 에서 특이점이 나타난다는 것을 다시 한번 말해준다.

그러나 <그림 1>에서 보는 것처럼 phase space (r, \tilde{p}') 에서는 $r=2M$ 에서 $\tilde{E}=0$ 인 입자를 제외하고는 $\tilde{p}' \neq 0$ 이므로 입자와 함께 있는 관측자는 입자가 $r=2M$ 을 자연스럽게 통과함을 보게 된다. 또한 (7)식의 parameter η 을 도입하여 (5)식으로부터 turning point R 에서 $r=0$ 까지 입자가 운동하는데 걸리는 고유시간을 구하면 $\Delta \tau = \frac{\pi}{2} R \left(\frac{R}{2M} \right)^{\frac{1}{2}}$ 이 되고, 유한한 시간이 걸림을 알 수 있다. 이것은 입자와 함께 운동하는 관측자에게는 무한대에 있는 사람이 보는 것처럼 이상한 현상은 나타나지 않으며, $r=2M$ 에서 물리적인 특이점이 존재하지 않음을 말해준다. 즉 $r=2M$ 에서 나타나는 특이점은 겉보기만의 특이점임을 의미한다.

$r < 2M$ 영역에서는 $r=0$ 로 향하는 입자는 $\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{dt}$ 가 양의 값이 되는데, $dr < 0$ 이므로 $dt < 0$ 이어야 한다. $r=0$ 로부터 나오는 입자에 대해서도 $dt < 0$ 이 된다. 이것은 $r < 2M$ 영역에서는 좌표시간이 역으로 흐름을 말해주며, 무한대에 있는 사람에게서는 $r < 2M$ 영역이 전혀 다른 세계가 됨을 의미한다.

Phase space(r, \tilde{p}')에서의 이러한 현상들은 black hole이 만드는 시공간 구조를 무한대에 서는 제대로 관찰할 수 없음을 의미한다.

$\tilde{L} \neq 0$ 일 때 고유시간 τ 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (2)식으로부터

$$\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{d\tau} = \pm \left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(8)$$

이 되고, 좌표시간 t 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (2)식과 (3)식으로부터

$$\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \frac{1}{\tilde{E}^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(9)$$

이 된다. (8)식과 (9)식을 각각 phase space(r, \tilde{p}')과 phase space(r, \tilde{p}')에 나타내어 phase flow를 조사하면 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 같이 $r=2M$ 에서 겹보기 특이점이 나타난다. Phase space (r, \tilde{p}')에서의 중요한 특징은 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 같다.

ㄴ. Reissner-Nordström black hole의 경우

구대칭이고 정적(static)이며 전하 Q 를 가진 Reissner-Nordström black hole의 해는 구좌 표계(t, r, θ, ϕ)에서 다음과 같은 metric으로 표현된다.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (10)$$

Reissner-Nordström field에서도 Schwarzschild중력장에서와 마찬가지로 방법으로 입자의 운 동방정식을 구할 수 있다.

r 방향 운동방정식은

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \tilde{E}^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

이 되고, t 방향 운동방정식은

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \tilde{E} \quad \dots\dots\dots(12)$$

이 된다. (11)식에서

$$\tilde{V}^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad \dots\dots\dots(13)$$

은 Reissner-Nordström field에서 입자의 effective potential을 나타낸다.

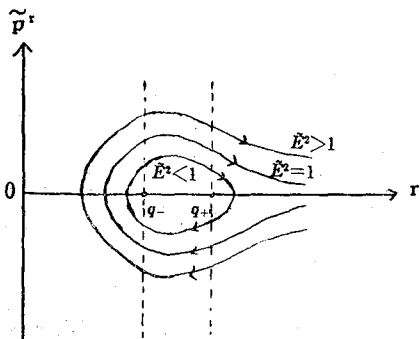
$\tilde{L}=0$ 일 때 고유시간 τ 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (11)식으로부터

$$\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{d\tau} = \pm \left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(14)$$

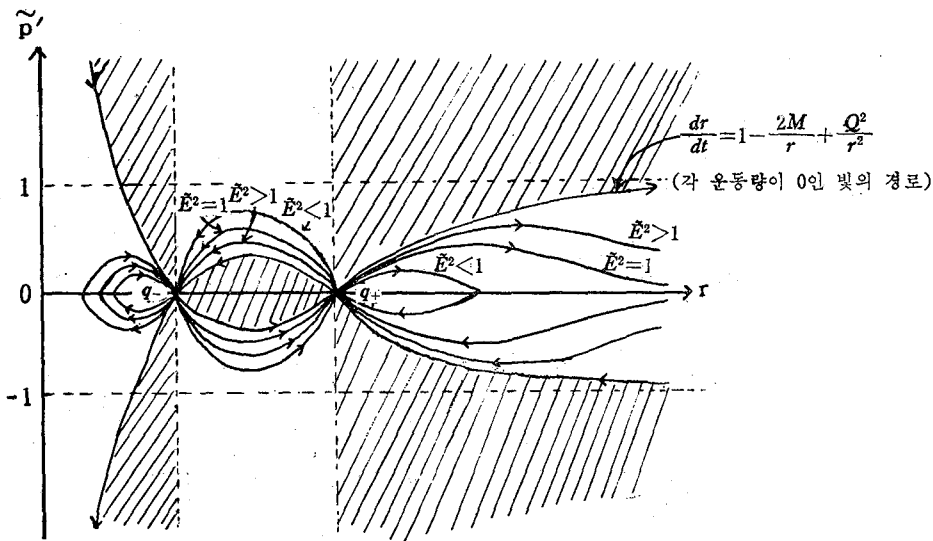
이 된다. (14)식을 phase space(r, \tilde{p}')에 나타내면 <그림 3>과 같다.

<그림 3>에 나타난 것처럼 Reissner-Nordström field에서는 $\tilde{L}=0$ 인 경우에 Schwarzschild 중력에서의 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 달리 $\tilde{E}^2 < 1$ 인 입자에 대해 닫힌 phase curve가 나타난다.

$\tilde{L}=0$ 일 때 좌표시간 t 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (11)식과 (12)식으 로부터



<그림 3> Reissner-Nordström field에서 $M^2 > Q^2$ 이고 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에 나타나는 입자의 phase flow. q_+ 와 q_- 는 (13)식이 0가 되는 r 의 값이고 $q_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ 이다. $M^2 = Q^2$ 일 때는 $q_- < r < q_+$ 영역이 없어진다.



<그림 4> Reissner-Nordström field에서 $M^2 > Q^2$ 이고 $\tilde{L}=0$ 인 경우에 phase space(r, \tilde{p}')에 나타나는 입자의 phase flow. q_+, q_- 는 <그림 3>에서와 같은 점들이다. $M^2 = Q^2$ 때는 $q_- < r < q_+$ 영역이 없어진다.

$$\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left[1 - \frac{1}{\tilde{E}^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (15)$$

이 된다. (15)식을 phase space(r, \tilde{p}')에 나타내면 <그림 4>와 같다.

<그림 4>에서 빗금친 부분은 Schwarzschild경우처럼 timelike입자가 존재할 수 없는 영역이다.

$M^2 > Q^2$ 일 때에 모든 timelike입자는 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 $\tilde{p}'=0$ 이 되어 한가지 상태로 된다. 이것은 Reissner-Nordström field에서 phase space(r, \tilde{p}')가 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 특이점을 가짐을 말해준다. 즉 black hole로부터 무한대에 있는 관측자에게는 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 특

이점이 나타난다.

〈그림 3〉에서는 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 $\tilde{E}=0$ 인 입자를 제외하고는 $\tilde{p}' \neq 0$ 이므로 입자와 함께 운동하는 관측자는 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 입자가 아무 이상 없이 통과함을 보게 된다. 따라서 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 물리적 특이점은 존재하지 않는다.

$q_- < r < q_+$ 영역에 대해서는 Schwarzschild경우와 같은 이유로 시간의 흐름이 역으로 되어 무한대에 있는 관측자에게는 전혀 다른 세계가 된다. $r < q_-$ 영역은 시간의 흐름이 우리 세계와 같으나, $r=q_+$ 에서 관측의 한계를 가져와 역시 무한대 관측자에게는 보여질 수 없는 세계이다. $M^2=Q^2$ 일 때는 무한대 관측자에게 $r=q_+=q_-=M$ 에서 특이점이 나타난다.

$\tilde{L} \neq 0$ 일 때 고유시간 τ 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (11)식으로부터

$$\tilde{p}' \equiv \frac{dr}{d\tau} = \pm \left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(16)$$

이 되고, 좌표시간 t 를 parameter로 하는 단위질량에 대한 운동량은 (11)식과 (12)식으로부터

$$\dot{p}' \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left[1 - \frac{1}{\tilde{E}^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots(17)$$

이 된다. (16)식과 (17)식을 각각 phase space(r, \tilde{p}')과 phase space(r, \dot{p}')에 나타내어 phase flow를 조사하면 $\tilde{L}=0$ 인 경우처럼 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 겉보기 특이점이 나타난다. phase space(r, \tilde{p}')에서의 중요한 특징은 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 같다.

3. black hole에 의해서 phase space에 나타나는 입자의 밀도

black hole의 특징을 좀 더 알아보기 위해 phase space에서 운동하는 입자의 밀도를 구해보기로 한다.

한 set의 같은 종류의 입자들(각 입자는 고립된 계)로 이루어진 통계적 ensemble을 생각하자. 이 ensemble이 phase space(r, \tilde{p}')에서 운동할 때, ensemble내의 어떤 입자 근처의 밀도 ρ 는 그 입자의 고유시간 τ , 위치좌표 r , 운동량 \tilde{p}' 로 나타낼 수 있다.

$$\rho = \rho(r, \tilde{p}', \tau)$$

ensemble을 이루는 입자들이 어떤 입자의 고유시간 τ 에서 r 과 $r+\delta r$, \tilde{p}' 과 $\tilde{p}'+\delta\tilde{p}'$ 사이에 있는 phase space체적소 내의 위치와 운동량을 가진다면 ensemble을 이루는 입자의 수는 $\rho(r, \tilde{p}', \tau)\delta r\delta\tilde{p}'$ 이 된다. 고정된 r 과 $r+\delta r$, \tilde{p}' 과 $\tilde{p}'+\delta\tilde{p}'$ 사이의 체적소 $\delta r\delta\tilde{p}'$ 내의 입자 수가 $\delta\tau$ 시간 동안에 변화하는 양은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} \delta\tau\delta r\delta\tilde{p}' \dots\dots\dots(18)$$

$r=\text{const}$ 인 face를 통해서 $\delta\tau$ 시간 동안에 체적소 내로 들어가는 입자의 수는

$$\rho \frac{dr}{d\tau} \delta\tau \delta\tilde{p}' \dots\dots\dots (19)$$

이고, $r + \delta r = \text{const}$ 인 face를 통해서 $\delta\tau$ 시간 동안에 체적소로부터 나오는 입자의 수는

$$\left[\rho \frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{dr}{d\tau} \right) \delta r \right] \delta\tau \delta\tilde{p}' \dots\dots\dots (20)$$

이 된다. face $r = \text{const}$ 와 face $r + \delta r = \text{const}$ 를 통해서 $\delta\tau$ 시간 동안에 체적소로 들어가는 순수한 입자의 수는 (19), (20)식에 의해 다음과 같이 된다.

$$\rho \frac{dr}{d\tau} \delta\tau \delta\tilde{p}' - \left[\rho \frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{dr}{d\tau} \right) \delta r \right] \delta\tau \delta\tilde{p}' = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{dr}{d\tau} \right) \delta\tau \delta r \delta\tilde{p}'$$

face $\tilde{p}' = \text{const}$ 와 face $\tilde{p}' + \delta\tilde{p}' = \text{const}$ 를 통해서 $\delta\tau$ 시간 동안에 체적소로 순수하게 들어가는 입자의 수도 마찬가지로 생각할 수 있다.

따라서 고정된 체적소 $\delta r \delta\tilde{p}'$ 로 $\delta\tau$ 시간 동안에 들어가는 총입자의 수 (18)식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \delta\tau \delta r \delta\tilde{p}' = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{dr}{d\tau} \right) \delta\tau \delta r \delta\tilde{p}' - \frac{\partial}{\partial \tilde{p}'} \left(\rho \frac{d\tilde{p}'}{d\tau} \right) \delta\tau \delta r \delta\tilde{p}'$$

이 식은

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{p}'} \frac{d\tilde{p}'}{d\tau}$$

을 이용하면 결국 다음과 같이 된다.

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \left[\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \tilde{p}'} \left(\frac{d\tilde{p}'}{d\tau} \right) \right] \dots\dots\dots (21)$$

(21)식은 phase space(r, \tilde{p}')에서 어떤 입자의 고유시간 τ 의 변화에 대한 입자의 밀도 ρ 의 변화율을 나타낸다.

phase space(r, \tilde{p}')에서 ensemble내의 어떤 입자 근처의 밀도 ρ 는 그 입자의 위치좌표 r , 운동량 \tilde{p}' , 좌표시간 t 로 나타낼 수 있다.

$$\rho = \rho(r, \tilde{p}', t)$$

phase space(r, \tilde{p}')에서 좌표시간 t 에 대한 밀도 ρ 의 변화율 $\frac{d\rho}{dt}$ 는 (21)식에서 $\tau \rightarrow t$ 로 $\tilde{p}' \rightarrow \tilde{p}'$ 로 대치시킴으로써 얻을 수 있다.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left[\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \tilde{p}'} \left(\frac{d\tilde{p}'}{dt} \right) \right] \dots\dots\dots (22)$$

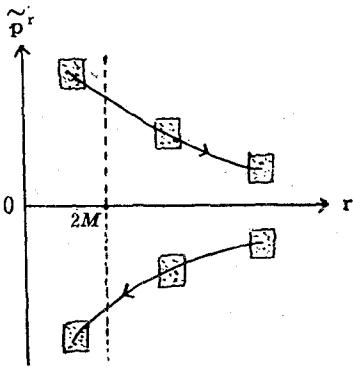
7. Schwarzschild black hole의 경우

Schwarzschild중력장에서 $\tilde{L} = 0$ 일때 phase space(r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도를 (5)식과 (21)식에 의해서 구하면

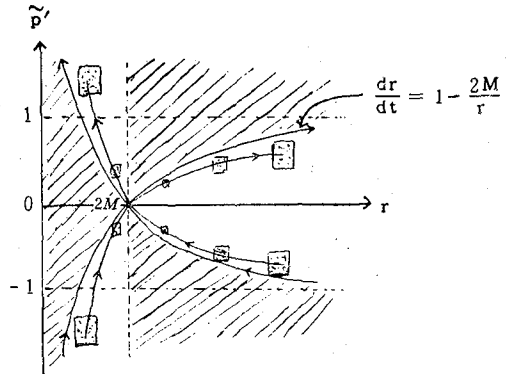
$$\rho = c = \text{const} \dots\dots\dots (23)$$

이 된다. (23)식은 한 입자의 운동을 따라가면서 phase space에서의 입자의 밀도를 보면 변하지 않는다는 것을 의미한다. 이것은 phase space(r, \tilde{p}')에서 운동하는 어떤 ensemble의 체





<그림 5> Schwarzschild 중력장에서 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에 나타나는 ensemble의 체적은 고유시간 t 에 관해 일정하다.



<그림 6> Schwarzschild 중력장에서 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에 나타나는 ensemble의 체적은 r 에 따라 변한다.

적은 일정함을 말해준다. 이것을 phase space(r, \tilde{p}')에 나타내면 <그림 5>와 같다.

$\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도는 (6)식과 (22)식에 의해서 구할 수 있으며, 그 결과는 r 만의 함수로 된 다음과 같은 식이 된다.

$$\rho = c \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|^{-1} \dots\dots\dots (24)$$

여기서 c 는 $r=\infty$ 에서의 밀도를 나타내는 상수이고 (23)식의 c 와 같다. (24)식으로부터 phase space(r, \tilde{p}')에서는 입자의 밀도가 r 에 따라 변함을 알 수 있다. 이것을 ensemble의 체적을 가지고 그림으로 나타내면 <그림 6>과 같다.

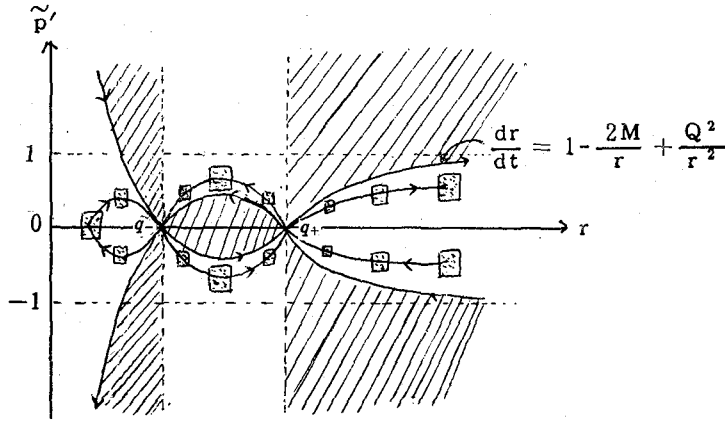
(24)식으로부터 phase space(r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도는 $r=2M$ 에서 ∞ 가 됨을 알 수 있다. 즉 <그림 6>에서 보는 것처럼 ensemble의 체적은 0가 되는데, 이것은 무한대 관측자에게 일어나는 현상이다. <그림 2>에서는 $r=2M$ 에서 모든 입자의 phase flow가 한점에 모이는 것과 대응된다.

(24)식에 의해 $r \rightarrow 0$ 일 때는 $\rho \rightarrow 0$ 가 되고 ensemble의 체적은 ∞ 로 되는데, 이것은 ensemble을 이루는 이웃한 입자간의 운동상태가 무한한 차이를 가지게 된다는 것이다. 그러나 입자 자신이 주위를 보면 (23)식이 말해주는 것처럼 입자의 밀도는 항상 일정하다.

phase space(r, \tilde{p}')에서 입자의 밀도가 $r=\infty$ 에서의 밀도 c 의 2배가 되는 곳은 (24)식에 의해 $r=4M$ 이다. $r=4M$ 에서 ensemble을 이루는 입자들이 가질 수 있는 상태는 $r=\infty$ 에서 가질 수 있는 상태에 비해 $\frac{1}{2}$ 의 영역으로 축소된다. 따라서 $r=4M$ 부터 r 이 감소함에 따라 밀도는 급격히 커지며 입자들이 가지는 상태영역은 급격히 작아진다. $\tilde{L} \neq 0$ 일 때 각 phase space에서의 입자의 밀도는 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 같다

ㄴ. Reissner-Nordström black hole의 경우

Reissner-Nordström field에서 $\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도는 (14)식



<그림 7> Reissner-Nordström field에서 $M^2 > Q^2$ 이고 $\tilde{L}=0$ 인 경우에 phase space(r, \tilde{p}')에 나타나는 ensemble의 체적은 r 에 따라 변한다. $M^2=Q^2$ 인 경우는 $q_- < r < q_+$ 영역이 없어진다.

과 (21)식에 의해서 구할 수 있고, 그 결과는 (23)식과 같다.

$\tilde{L}=0$ 일 때 phase space(r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도는 (15)식과 (22)식에 의해서 구할 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\rho = c \left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right|^{-1} \dots\dots\dots (25)$$

여기서도 c 는 무한대에서 입자의 밀도를 나타내는 상수이며, (23)식의 c 와 같다. 이것을 r 에 따른 ensemble의 체적변화로 나타내면 <그림 7>과 같다.

(25)식에 의해서 $M^2 > Q^2$ 일 때는 phase space (r, \tilde{p}')에서의 입자의 밀도는 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 ∞ 가 된다. 이것은 <그림 4>에서 모든 입자의 phase flow가 $r=q_+$ 와 $r=q_-$ 에서 한 점에 모이는 것과 대응된다.

$q_- < r < q_+$ 영역에서는 $r = \frac{Q^2}{M}$ ($\tilde{L}=0$ 일 때 (13)식이 극값을 가지는 r 의 값)에서 밀도가 가장 작고 ensemble의 체적은 가장 커진다. 또한 $r \rightarrow 0$ 때는 $\rho \rightarrow 0$ 가 되고 ensemble의 체적은 ∞ 로 된다.

밀도가 $r=\infty$ 에서의 밀도 c 의 2배가 되는 곳은 (25)식에 의해 $r = 2M \pm \sqrt{4M^2 - 2Q^2}$ 이 된다. $M^2=Q^2$ 일 때는 $r=q_+=q_-=M$ 에서 밀도가 ∞ 로 된다.

Reissner-Nordström field에서 $\tilde{L} \neq 0$ 일 때 각 phase space에서의 입자의 밀도는 $\tilde{L}=0$ 인 경우와 같다.

지금까지 phase space(r, \tilde{p}')에서는 Schwarzschild경우나 Reissner-Nordström의 경우에 모두 입자의 밀도는 일정하다. 이것은 phase space(r, \tilde{p}')에서 ensemble이 비압축성 유체처럼 운동하며 Liouville's theorem이 성립함을 의미한다. phase space(r, \tilde{p}')에서는 두 black hole의 경우 모두 입자의 밀도가 r 에 따라 변한다. 이것은 phase space(r, \tilde{p}')에서 Liouville's

theorem이 성립하지 않음을 의미한다.

4. 결 론

입자의 고유시간 τ 를 parameter로 하는 phase space(r, \dot{r})에서는 Schwarzschild black hole의 경우나 Reissner-Nordström black hole의 경우 모두 phase flow에 아무 이상이 없다. 무한대에 정지해 있는 관측자의 시간 t 를 parameter로 하는 phase space(r, \dot{r})에서는 Schwarzschild black hole의 경우 metric(1)식의 $g_{tt}=0$ 이 되는 $r=2M$ 에서 phase flow의 수렴이 일어나, $r=2M$ 에서 결보기 특이점이 나타남을 말해준다. Reissner-Nordström black hole의 경우는 metric (10)식의 $g_{tt}=0$ 이 되는 $r=M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ 에서 phase flow의 수렴이 일어나, $r=M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ 에서 결보기 특이점이 나타남을 말해준다.

Phase space(r, \dot{r})에서 ensemble을 이루는 입자의 밀도는 일정하다. 그러나 phase space(r, \dot{r})에서는 입자의 밀도가 Schwarzschild black hole의 경우 $\rho=c \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|^{-1}$ 이고, Reissner-Nordström black hole의 경우 $\rho=c \left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right|^{-1}$ 이다. 이와 같이 phase space(r, \dot{r})에서 r 의 변화에 따라 입자의 밀도가 변하는 것은 black hole이 만드는 시공간의 성질을 반영하는 것이다.

참 고 문 헌

1. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, "Gravitation" (1973).
2. S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, "The large Scale Structure of Space-time," 156 (1973).
3. V.I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics," 15-21 (1978).
4. H. Goldstein, "Classical Mechanics," 426-428 (1980).
5. F. Reif, "Statistical and Thermal Physics," 627 (1965).
6. D. Gannon, General Relativity and Gravitation, Vol. 7, No. 2, 230 (1976).
7. M. Szydowski and M. Heller, General Relativity and Gravitation, Vol. 16, No. 9, 880 (1984).

Motion of Particles in Black Hole and Phase Space

Soh, Kwang Sup

Kwack, Youn Hang

Abstract

Introducing phase space, we describe the motion of particles in the presence of the Schwarzschild black hole and the Reissner-Nordström black hole. The phase curves of particles are discussed and the apparent coordinate singularity is found. In phase space we obtain the density of particles in a statistical ensemble, investigating some properties of space-time in the presence of black hole.