論文

AUSM계열 수치기법의 수치적 불안정성에 대한 분석

김규홍*, 이경태*, 김종암**, 노오현**

Analysis of Numerical Instability of AUSM-type Schemes

Kyu Hong Kim*, Kyung-Tae Lee*, Chongam Kim** and Oh Hyun Rho**

ABSTRACT

Numerical stability is studied based on numerics and mathematics. It is frequently observed in the region where velocity is zero. In that region, the Euler equations have numerous solutions and, thus, it is impossible to determine a unique solution with only governing equations. However, a unique solution can be determined by additional outer flow conditions or outer numerical disturbances. This peculiarity of Euler equations can cause shock instability in shock discontinuity calculation since the information or a unique solution under undisturbed conditions is lost by disturbances. In this reason, the numerical scheme consistent with Euler equations cannot remove shock instability completely.

초 록

AUSM계열 수치기법의 수치적 불안정성에 대한 원인과 해결방안에 대한 연구를 수행하였다. Euler 유동에서 수치적 불안정성은 제어면에 수직한 방향의 유동속도가 영인 영역에서 발생하며 이 영역에서 Euler 방정식은 근본적으로 부정해를 가지게 되어 무수히 많은 해를 가지게 된다. 지배방정식 자체로는 유일해를 찾는 것이 불가능하고 주위의 유동조건이나 외부교란에 의해 유일해를 결정하게 된다. 이러한 특징은 충격파 영역에서 교란이 존재할 경우 초기 상태에 대한 정보를 상실하게 되어 충격파 불안정성을 유발하게 된다. slip 유동을 정확히 계산할 수 있는, 즉 유일해를 결정할 수 없는, 수치기법은 충격파 불안정성을 근본적으로 제거할 수 없다.

Key Words : AUSM, M-AUSMPW+, numerical instability(수치적 불안정성), shock instability(충격파 불안정성), slip flow(미끄럼 유동), contact discontinuity (접촉불연속면)

Ⅰ. 서 론

수치기법을 개발하는데 있어 중요한 문제 중의 하나는 수치적 불안정성으로, 이를 제거하기 위해 많은 연구가 수행되어 왔다. 현재 압축성 유동 해석에 있어 주류를 이루고 있는 upwind 수치기법 역시 수치적 불안정성 해결이 주요한 연구 주제가 되어 왔다. Upwind 수치기법은 크게 FVS와 FDS로 나뉘어 진다. FDS계열 수치기법은 제어면에서 물리현상을 비교적 정확히 반영하기 때문에 제어면 좌우 물성치의 정보 교환이 가능하고 이를 토대로 정확한 플럭스 계산이 가능하다는 장점이 있는 반면, 초음속이나 극초음속 유동에서는 충격파 불연속면 계산시 수치적 불안정성에 의해 계산 자체가 불가능하거나 잘못된 해를 보여주는 문제점이 있다. 이에 반해 FVS계열

† 2001년 8월 9일 접수 ~ 2001년 10월 5일 심사완료
* 정회원, 세종-록히드 마틴 우주항공연구소
연락저자, E-mail : aerocfd1@sejong.ac.kr
서울시 광진구 군자동 98번지
** 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

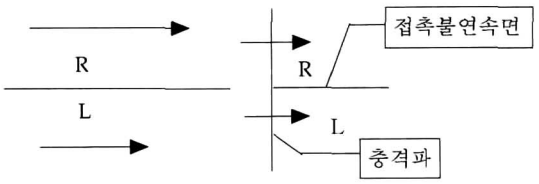
수치기법은 강건성과 단조성을 동시에 만족하면서 충격파를 포착하는 것이 가능하다. 반면 충격파 포착시 과도한 수치점성으로 인해 정확성이 떨어지는 단점이 있다. 이런 이유로 FDS계열 수치기법의 경우 대부분 수치적 불안정성이 극복과제이고 FVS경우 정확성 향상이 연구 대상이 되어 왔다. Roe's FDS[1]의 경우 Quirk[2] 등에 의해 수치적 불안정성에 대한 많은 연구와 해결방법이 제시되어 왔다. FVS계열 수치기법 역시 정확성 향상을 위해 많은 연구가 있어 왔다. 90년대 들어 FDS와 FVS의 장점을 결합시킨 AUSM계열 수치기법이 개발되었다. AUSM계열 수치기법[3][4][5][6][7]은 advection 성질을 가지며 이로 인해 정확성이 향상되어 점성경계층 계산을 정확하게 수행할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 정확성 향상으로 Roe's FDS와 마찬가지로 수치적 불안정성에 대한 문제가 다시 부각되어 이에 대한 연구가 수행되어 왔다. 본 연구에서는 AUSM계열 수치기법의 수치적 불안정성에 대한 연구에 주된 관심을 두었고 수치적 불안정성이 AUSM계열 수치기법에서는 어떠한 형태로 나타나는지 이에 대한 해결방안은 무엇인지에 대한 연구를 수행하였다.

II. Euler 방정식의 특징

다음은 벡터형태의 2차원 Euler방정식이다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0. \tag{1}$$

지배방정식의 특징으로 흔히 trivial solution으로 생각하는 속도가 영인 해를 생각해보면, 속도를 영으로 점근시키면 지배방정식은 $0=0$ 인 형태가 되고 해가 무수히 많은 부정해를 가지게 된다. 즉 속도 이외의 물성치는 지배방정식에 의해 결정되지 못하고 추가적인 외부조건에 의해 결정된다. 이러한 부정형의 방정식은 실제로 전산유체역학에 적용할 때 여러 응용문제에서 나타나게 된다. 정체점 부근에서 속도가 거의 영인 영역이나 경계층에서 벽면에 수직한 방향 등에서 부정형 방정식으로 인한 문제가 야기된다.



(a) slip 유동 (b) 충격파

Fig. 1. slip유동과 충격파 영역에서 접촉불연속면

Fig. 1은 slip 유동과 수직충격파에 대한 그림이다.

Slip 혹은 접촉불연속면에서 지배방정식을 적분형으로 써보면 다음과 같다.

$$\rho_L v_L=\rho_R v_R \tag{2}$$

$$\rho_L u_L v_L=\rho_R u_R v_R \tag{3}$$

$$\rho_L v_L^2+p_L=\rho_R v_R^2+p_R \tag{4}$$

$$\rho_L H_L v_L=\rho_R H_R v_R \tag{5}$$

여기서, $v_L, v_R \to 0$을 적용해보면, $p_L=p_R$이기만 하면, 위 방정식은 항상 성립하는 것을 알 수 있다. 즉 ρ와 u와 H는 유일해를 가지지 못하고 부정해를 가지게 된다. 지배방정식은 유일해를 결정해 줄 수 없으며 초기조건이나 외부조건에 의해 유일해가 결정되게 된다.

L과 R의 물성치가 Euler 방정식의 해라고 가정하자. Fig. 1(a)와 (b)에서 R영역이 교란되었다고 가정해보면, (a)의 경우 교란이 $\rho_d=\rho_R+\delta\rho$이고 $T_d=\frac{p_R}{\rho_d R}$을 만족시키기만 하면 이 역시 Euler 방정식의 해가 된다. 일단 교란이 들어오게 되면 초기조건에 대한 정보를 상실하기 때문에 이전의 수렴해가 아닌 새로운 해를 계산하는 것을 의미하고 원래 상태로 복원되는 것이 불가능하다는 것을 의미한다. Fig. 1(b)에 적용해보면, 접촉불연속면에서 지배방정식은 Fig. 1(a)의 slip 유동과 마찬가지로 유일한 ρ와 u와 H를 결정할 수 없다. 그러나 이 경우는 충격파 지배방정식 즉, 수직충격파 전후의 관계를 통해 물성치 값을 유일하게 결정할 수 있다는 점이 다르다. 이와 같이 부가적인 외부유동조건이 있다면 유일해를 결정할 수 있다. 교란이 $\rho_d=\rho_R+\delta\rho$ 이고 $T_d=\frac{p_R}{\rho_d R}$을 만족시킨다 하더라도 x방향의 수직충격파 지배방정식을 만족시키지 못하기 때문에 어떠한 교란이 들어오더라도 원래의 수렴해를 보여주게 된다. 정리하면, Euler 방정식은 제어면에 수직한 방향의 속도가 영인 영역에서는 부정형의 해를 가지며 이를 유일하게 결정하기 위해서는 초기조건이나 부가적인 유동 조건이 요구되는 것을 알 수 있다. 바꿔 설명하면 부가적인 유동 조건 없이 유일해를 결정할 수 없다는 것을 의미한

다. 따라서 수렴해 조건을 모르는 slip유동에 교란이 가해질 경우 유일해를 결정할 수 없고 수렴해와 다른 값을 가지게 된다. 이러한 Euler방정식과 consistency를 만족시키는 수치기법은 위에서 설명한 Euler 방정식의 특징을 그대로 나타내준다. AUSM계열 수치기법은 Euler 방정식과 consistency를 만족시키는 수치기법으로 Euler방정식 자체의 문제점을 고스란히 보여준다.

AUSM계열 수치기법의 일반적인 형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{F}_{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Phi}_L \overline{M_L^+} c_{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\Phi}_R \overline{M_R^-} c_{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{P}_L P_L^+ + \boldsymbol{P}_R P_R^- \tag{6}$$

유동이 완전히 수렴되었다고 가정하면, 다음과 같이 제어면에서 플럭스는 모두 같아진다.

$$\rho_{i-1}\overline{M_{i-1}^+} c_{i-\frac{1}{2}} + \rho_i \overline{M_i^-} c_{i-\frac{1}{2}} = \rho_i \overline{M_i^+} c_{i+\frac{1}{2}} + \rho_{i+1}\overline{M_{i+1}^-} c_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\rho_{i-1} u_{i-1}\overline{M_{i-1}^+} c_{i-\frac{1}{2}} + \rho_i u_i \overline{M_i^-} c_{i-\frac{1}{2}} = \rho_i u_i \overline{M_i^+} c_{i+\frac{1}{2}} + \rho_{i+1} u_{i+1}\overline{M_{i+1}^-} c_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\rho_{i-1} v_{i-1}\overline{M_{i-1}^+} c_{i-\frac{1}{2}} + \rho_i v_i \overline{M_i^-} c_{i-\frac{1}{2}} + p_{i-1} P_{i-1}^+ + p_{i-1} P_{i-1}^+ = \rho_i u_i \overline{M_i^+} c_{i+\frac{1}{2}} + \rho_{i+1} u_{i+1}\overline{M_{i+1}^-} c_{i+\frac{1}{2}} + p_i P_i^+ + p_{i+1} P_{i+1}^-$$

$$\rho_{i-1} H_{i-1}\overline{M_{i-1}^+} c_{i-\frac{1}{2}} + \rho_i H_i \overline{M_i^-} c_{i-\frac{1}{2}} = \rho_i H_i \overline{M_i^+} c_{i+\frac{1}{2}} + \rho_{i+1} H_{i+1}\overline{M_{i+1}^-} c_{i+\frac{1}{2}}$$

slip유동의 경우 u에 관한 항등식 형태이므로, 각 계수가 영이 되어야 한다.

$$\overline{M_{i-1}^+} = 0,\ \overline{M_i^-} - \overline{M_i^+} = 0,\ \overline{M_{i+1}^-} - \overline{M_{i+1}^+} = 0,\ \overline{M_{i+2}^-} = 0 \tag{7}$$

그리고

$$p_{i-1} P_{i-1}^+ + p_i P_i^- + -p_i P_i^+ - p_{i+1} P_{i+1}^- = 0 \tag{8}$$
$$p_i P_i^+ + p_{i+1} P_{i+1}^- + -p_{i+1} P_{i+1}^+ - p_{i+2} P_{i+2}^- = 0$$

AUSM+의 경우에는 마하수 내삽함수가 다음과 같다.

$$\overline{M_{i-1}^+} = M_{i-1}^+ + M_i^- = 0 \tag{9}$$
$$\overline{M_{i-1}^+} = 0$$
$$\overline{M_i^+} = M_i^+ + M_{i+1}^- = 0$$
$$\overline{M_i^+} = 0$$

위 식의 해를 구해보면,

$v_{i-1} = v_i = v_{i+1} = v_{i+2} = 0$ 이고,

$P_{i-1}^+ = P_i^- = P_{i+1}^+ = P_{i+2}^-$이므로 식(8)로부터 압력은 다음과 같다.

$$p_{i-1} = p_{i+1} \tag{10}$$
$$p_i = p_{i+2}$$

식(10)은 중요한 정보를 가지고 있다. AUSM+의 경우 제어면에 수직한 방향의 유동속도가 영일 때 압력의 홀짝 분리현상이 일어나고, 이로 인해 Euler방정식과 달리 밀도뿐만 아니라 압력까지도 유일하게 결정하지 못한다. 압력의 홀짝 분리현상은 인접한 셀 간의 압력에 대한 구속조건이 없음을 의미하며 압력 진동현상을 일으키는 원인이 된다. 식(10)은 AUSM+가 경계층에서 압력진동현상을 보여주는 이유를 직접적으로 설명해 주고 있다. 압력은 역시 외부유동 조건에 의해 유일하게 결정될 수 있는데 외부조건에 따라 압력진동현상이 일어나는 해로 수렴하기도 하고 진동현상이 보이지 않기도 한다. 외부요인은 격자계나 외부로부터 유입되는 교란 등 여러 가지 요인이 있다.

AUSMPW+의 경우를 살펴보면,

$$\overline{M_{i-1}^+} = M_{i-1}^+ + M_i^- + \frac{(p_i - p_{i-1})}{p_{i-\frac{1}{2}}} M_i^- = 0 \tag{11}$$
$$\overline{M_{i-1}^+} = 0$$
$$\overline{M_i^+} = M_i^+ + M_{i+1}^- + \frac{(p_{i+1} - p_i)}{p_{i+\frac{1}{2}}} M_{i+1}^- = 0$$
$$\overline{M_{i-1}^+} = 0$$

경계조건을 적용하면, $v_{i-1} = v_i = v_{i+1} = v_{i+2} = 0$ 이고,

$$p_{i-1} = p_i \tag{12}$$
$$p_{i+1} = p_{i+2}$$

식(8)로부터

$$p_{i-1} = p_{i+1}$$
$$p_i = p_{i+2}$$
$$p_{i-1} = p_i = p_{i+1} = p_{i+2} \tag{13}$$

그러므로 AUSMPW+는 압력진동을 유발하는 수렴해는 가지지 않는다는 것을 알 수 있다. 연속방정식의 압력 항에 의한 수치점성항은 압력진동현상을 제거하는 역할을 하는 것을 확인할 수 있다.

III. 수치적 검증

3.1 Slip 유동에서의 불안정성

다음은 slip 유동에 대한 수치실험이다. 수렴된 초기조건에 압력을 교란시킨 뒤 결과를 살펴보았다. 초기조건은 다음과 같다.

$$(\rho, u, v, p)_L = (1, 0.25, 0, 0.714)$$
$$(\rho, u, v, p)_R = (1, 0.5, 0, 0.714)$$

압력 교란은 접촉불연속면에 유입되었다.

$$(\rho, u, v, p)_d = (1, 0.5, 0, 0.775)$$

그림에서 알 수 있듯이 AUSM+는 앞에서 증명한 바와 같이 압력의 홀짝 분리현상에 의해 압력의 진동현상이 일어나고 이에 따라 밀도나 속도의 진동현상까지 보여준다. AUSM+가 벽면 근처에서 보여주는 진동현상 역시 위와 같이 유일한 해를 결정할 수 없는 상태에서 외부교란에 의해 어떠한 임의의 해로 수렴하게 되어 나타나는 것이다. 반면, Roe's FDS나 AUSMPW+의 경우를 살펴보면, 수렴된 압력이나 속도는 초기의 수렴해와 같은 값을 가지나 밀도는 전혀 다른 값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. Roe's FDS, AUSMPW+ 같이 Euler 방정식과 consistency를 유지하는 수치기법은 일단 교란이 들어오게 되면 초기의 수렴해로 복원시키는 것이 불가능하다는 것을 보여준다. 이는 제어면에 수직한 방향의 속도가 영인 영역에서 유일해를 결정할 수 없다는 Euler 방정식 고유의 특징에서 기인한 것으로 수치기법과는 무관한 것이다.

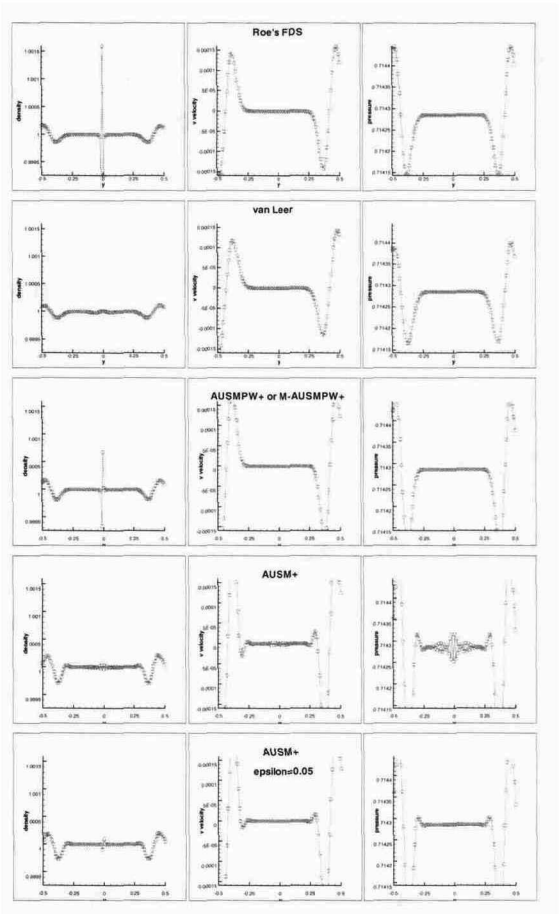


Fig. 2. 수치기법에 따른 압력교란 영향; (a) Roe's FDS; (b)van Leer; (c) AUSMPW+; (d) AUSM+; (e) AUSM+ with ε=0.05

여기서 AUSM+의 진동현상 제거 방법에 대해 살펴보자. 진동현상 제거를 위해서는 수렴된 압력의 홀짝 분리 현상을 제거해야 한다.

AUSM+에 다음과 같은 ε으로 표현되는 미소의 압력차에 의한 항을 포함시켜보자.

$$\overline{M_{i-1}^{+}} = M_{i-1}^{+} + M_i^{-} + \varepsilon \frac{(p_i - p_{i-1})}{p_{i-\frac{1}{2}}} M_i^{-} = 0 \qquad (14)$$

$$\overline{M_{i-1}^{+}} = 0$$

$$\overline{M_i^{+}} = M_i^{+} + M_{i+1}^{-} + \varepsilon \frac{(p_{i+1} - p_i)}{p_{i+\frac{1}{2}}} M_{i+1}^{-} = 0$$

$$\overline{M_{i-1}^{+}} = 0$$

식 (14)에서 미소량의 압력에 의한 항을 추가하게 되면 식(14)를 만족하기 위해서는 $p_{i-1} = p_i = p_{i+1}$ 의 조건이 추가되어야 한다. ε에 의한 항이 압력의 홀짝 분리 현상을 제거 해주는 조건으로 작용하고 결과적으로 유일한 압력값을 정할 수 있다. 이에 대한 결과는 Fig.2(e)에 잘 나타나 있다. 미소량의 압력 항 추가에 의해서 진동현상이 제거되는 것을 알 수 있다. 수렴된 밀도를 Roe's FDS와 비교하여 보면, 초기 조건에 훨씬 근접한 값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. ε이 더욱 작아지게 되면 진동제거 시간은 오래 걸리나 초기 수렴해와 근접한 결과를 얻을 수 있다. 이 문제는 x 방향으로 물성치 구배가 전혀 없고 격자계와도 완전히 정렬된 경우로 v 속도가 0이기 때문에 식(14)에서 convection항과 압력 항이 분리된다. 따라서 ε>0 이기만 하면 압력진동현상 제거가 가능하다. 일반적인 응용문제의 경우 벽면근처에서의 경계층의 발달로 인해 미소한 v속도 성분이 존재하게 된다. 이런 경우 식(14)를 만족하는 해는 앞에 항과 뒤의 항이 독

립적이지 못하고 서로 연립하여 해를 구하게 되는데 압력항의 크기에 의해 진동현상이 생기기도 하고 제거되기도 한다. 1차원 문제의 경우 위에서 증명된 바와 같이 ε이 영이 아닌 양수이기만 하면 진동현상을 보이지 않으나 다차원 문제의 경우 진동제거를 위한 최소의 ε은 여러 셀의 물성치와 연관되어 있기 때문에 제어면에 인접한 좌우 물성치 정보를 토대로 직접적으로 구하는 것은 불가능하다. 수치실험 결과 0.5 이상이면 어떠한 경우에서도 압력진동현상이 보이지 않는다. 밀도를 살펴보면, Euler 방정식을 적용한 응용문제에서 x방향으로 구배가 없고 격자계가 유동과 완전히 일치된 경우 벽면 근처에서 밀도가 약간씩 튀는 모습을 볼 수 있는데 이것이 교란에 의한 영향으로 또 다른 교란이 유입될 경우 약간 다른 값으로 수렴하는 현상을 관찰 할 수 있다.

3.2 충격파 유동에서의 불안정성

참고문헌 [8]에 보면, mass플럭스에서 압력차에 의한 수치점성이 영이 아닐 경우 수치기법은 even-odd decoupling현상이나 carbuncle 현상을 일으킬 수 있다고 하였다. 압력차에 의한 수치점성의 역할을 보다 정확히 알아보기 위해 다음과 같은 수치실험을 해보았다.

그림은 정상 수직충격파 초기해에 압력을 교란시킨 문제이다.

Fig. 1(b)와 같이 x방향으로는 수직충격파 관계식을 만족하고 y방향으로는 접촉불연속면 조건을 만족하는 문제이다. 앞의 slip유동 현상과 다른 점은 x방향으로 물성치 구배가 존재한다는 점이다. y방향으로 접촉불연속면 조건을 만족하기 때문에 밀도는 부정해를 가지게 된다. slip유동 결과와 같이 교란에 의해 밀도차이가 크게 되면 음속의 차이도 크게 되고 이에 따라 물성치 전파가

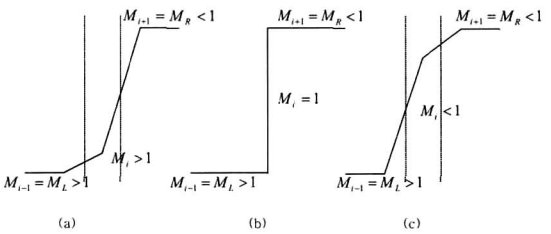


Fig. 3. 제어면 위치에 따른 충격파 수렴해; (a) 중간 셀의 마하수가 초음속일 경우; (b) 음속천이점이 제어면 위에 위치할 경우; (c) 중간 셀의 마하수가 아음속일 경우.

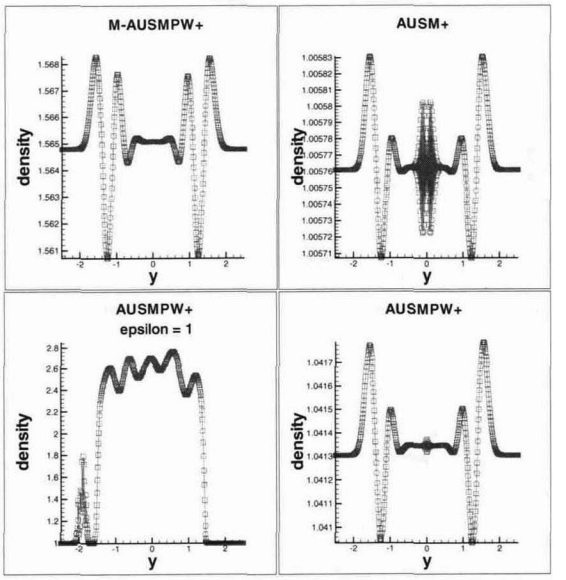


Fig. 4(a) 중간 셀의 마하수가 초음속인 경우

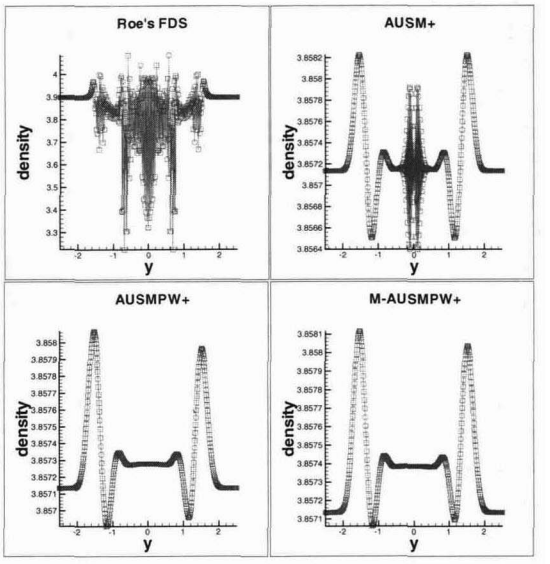


Fig. 4(b) 제어면의 마하수가 1인 경우

크게 차이가 나게 된다. 전파 속도 차이는 충격파 강도의 변화를 야기하고 파를 움직이게 만드는 역할을 한다. Euler 방정식과 이에 대한 수치해석과의 차이점은 Euler 방정식의 경우 x방향으로의 충격파 지배방정식으로부터 R영역의 값을 결정해 줄 수가 있으나 수치해석의 경우 어느 것이 충격파이고 충격파 뒤의 물성치가 어떤 값을 가지는지에 대해 전혀 알 수 없다. 결과적으로 한번 교란된 밀도를 초기해로 복원시켜 줄 수 있

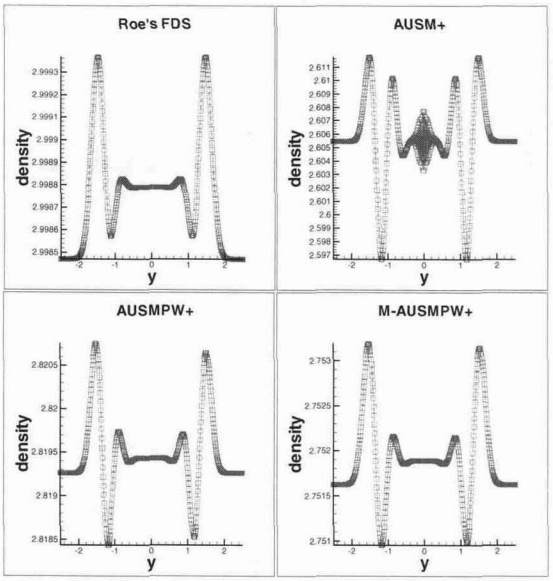


Fig. 4(c) 중간 셀의 마하수가 아음속인 경우

는 외부 유동 조건이 없기 때문에 수렴된 해를 얻을 수 없고 결과적으로 충격파 전 영역에 걸쳐 교란이 전파되는 것을 알 수 있다.

만약 충격파를 지난 뒤 유동 조건을 알고 있다고 가정하면 x방향으로 플럭스 차이는 없게 되고 Fig. 2의 slip유동 결과와 같이 압력은 수렴되고 밀도만 교란에 의해 다른 해로 수렴하게 될 것이다. 실제 응용문제로 무딘 물체 앞에 발생하는 정상 충격파 문제를 생각해보면, 초기에 벽면에서 충격파가 떨어져 나와 정상 위치까지 이동하는 도중 계속적으로 교란의 영향을 받게 된다. 이 때 충격파를 지난 뒤 영역에서의 물성치를 결정해 줄 수 있는 유동조건이 있다고 가정하면 충격파 불안정성과 같은 현상은 나타나지 않을 것이나 수치해석 과정에서 이러한 구속 조건은 어디에서도 찾아 볼 수 없다. 이런 이유로 계산과정에서 충격파가 진행하게 되는 경우 충격파 불안정성에 완전히 노출되어있다고 할 수 있다. 일단 정상상태 위치에 도달하게 되면, 충격파 뒤의 유동을 결정할 수 있는 조건이 마련된다. 이러한 조건은 수직충격파 조건과 같이 explicit하게 주어지는 것은 아니고 벽면에서부터의 충격파까지 정보가 전달되기 때문에 충격파 뒤의 물성치를 결정할 수 있게 된다. 따라서 정상상태가 되게 되면, 이동 충격파와는 달리 교란이 들어오더라도 정상충격파는 결국 교란을 제거하고 원하는 수렴해를 얻을 수 있다. 반면, 어떠한 부가적인 유동조건도 없는 이동 충격파 문제의 경우 일단 교란이 되었다고 하면, slip유동을 정확하게 계산할 수 있는 수치기법은 어떠한 것이라도 충격파 불안정성에 완전히 자유로울 수 없다. 즉 유일해를 결정할 수 있는 물리적으로 타당한 유동조건이 없기 때문에 교란에 의해 밀도값이 정해지고 이에 따른 전파 속도의 변화에 의해 충격파 불안정성이 발생하는 것이다.

각 수치기법에 대해 충격파 불안정성 정도를 살펴보자. 밀도의 오차는 연속방정식의 압력 항으로 표현되는 수치점성항의 크기에 의해 결정된다. 압력 항으로 표현되는 수치점성의 크기가 클 경우 교란이 좌우로 전파되는 속도에 비해 압력교란이 밀도 교란으로 바뀌는 속도가 훨씬 빠르기 때문에 커다란 초기의 압력교란이 밀도교란으로 완전히 전환되어 밀도교란이 커지게 된다. Roe's FDS가 이에 해당하는 경우로 압력교란 전체가 짧은 시간 내에 밀도교란으로 바뀌게 되어 압력교란은 빠르게 제거되나 커다란 밀도 교란은 남게 되어 x방향의 플럭스 차이가 커지게 된다. 따라서 밀도의 변화 역시 더욱 증폭되는 현상을 보여 주어 충격파 불안정성에 매우 민감한 모습을 보이게 된다. Fig. 4(a)와 (b) 경우를 (L,R 영역이 초음속인 경우)를 살펴보면, 진동현상이 매우 커지는 것을 알 수 있다. 초음속인 경우 유동속도가 크기 때문에 약간의 밀도교란에 의해서도 x방향의 플럭스 차이가 매우 커지게 되기 때문이다. 특이한 것은, Fig. 4를 보면, 충격파 불안정성에 매우 민감한 Roe's FDS 조차 (c)의 경우(L,R 영역이 아음속인 경우) 밀도와 압력 교란이 제거되는 것을 알 수 있다. 하지만 밀도는 약간 다른 값으로 수렴되는 것을 알 수 있다. 이는 밀도가 부정해를 가지기 때문으로 교란크기에 따라 다른 값으로 수렴하게 되는 것이다. 반면 AUSM+의 경우 식(9)에서와 같이 압력은 홀짝 셀 간에 구속 조건이 없기 때문에 일단 교란이 들어오면 교란이 사방으로 전파되게 된다. 밀도 역시 압력과 같이 진동현상을 보여준다. Roe's FDS와 다른 점은 연속방정식에서 압력차에 의한 항이 없기 때문에 압력교란이 직접적으로 밀도 교란으로 이루어지지 않고 속도 교란에 의해 간접적으로 교란되기 때문에 Fig. 2에서 분수 있듯이 밀도 교란이 Roe's FDS에 비해 매우 작다. 따라서 x방향으로의 플럭스 차이가 수치점성이 감당할 수 있을 정도 이하로 줄어들어 밀도 교란이 증폭되는 현상은 발생하지 않는다. 일반적으로 AUSM+수치기법이 carbuncle과 같은 충격파 불안정성을 보이지 않는다는 것은 밀도나 속도 교란의 크기가 작아지기 때문에 x방향으로 플럭스 차이가 적어 밀도의 변화 역시 작기 때문이다. 이런 이유로

AUSM+는 충격파 불안정성을 제거하는 듯이 보이나 진동현상을 항상 포함하고 있기 때문에 궁극적인 불안정성의 제거는 아니다. 이는 Fig.5와 같이 마하수가 매우 큰 유동의 경우 초기 압력교란이 매우 크기 때문에 충격파 불안정성이 눈에 띄는 경우이다.

그러므로 충격파 불안정성의 궁극적인 해결책은 충격파 조건을 만족하는 유일해를 결정할 수 있는 구속조건을 도입하는 것이다. 하지만 앞에서 언급했듯이 slip 유동을 정확히 계산할 수 있는 수치기법의 경우 이러한 조건을 주는 것은 불가능하다. 이동충격파를 충격파 불안정성 없이 계산하기 위해서는 van Leer[9]나 M-AUSMPW+와 같이 충격파 영역에서 slip 유동을 인정하지 않는 수치기법이 필요하다. 즉 밀도나 압력 u방향 속도가 유일하게 결정될 수 있는 수치기법으로 어떠한 교란이 들어와도 원래 초기해 상태로 되돌릴 수 있는 특징이 있다. van Leer 수치기법은 전 영역에 걸쳐 Euler 방정식과 완전한 consistency를 만족시키지 못한다 하더라도 충격파 유동만 생각해보면 단일 충격파 문제에서 slip 유동 현상이 없기 때문에 즉, 충격파 뒤 유동 속도는 모두 같기 때문에 ($u_L = u_R$) van Leer 역시 Euler 방정식과 consistency를 만족시킨다. 그러나 slip 유동의 경우 Euler방정식과 consistency를 만족하지 못하지 때문에 커다란 수치점성으로 작용하여 경계층이나 전단층 계산시 과도한 점성현상을 보이는 문제점이 있다. M-AUSMPW+수치기법을 살펴보면 충격파 영역에서나 slip유동 영역에서나 Euler방정식과 consistency를 유지하기 때문에 두 영역 모두 정확한 계산이 가능하다는 장점이 있다.

다음은 마하수 30인 경우 이동 충격파 문제를 해석해본 결과이다.

AUSM+ 수치기법의 경우 x축 방향의 밀도분포에서 진동현상을 나타낸다. y방향 역시 홀짝 분리 현상은 아니지만 교란이 존재한다는 것을 알 수 있다. AUSMPW+수치기법은 x축 방향으로의 밀도분포에서는 진동현상을 보이지 않으나 y축 방향으로는 홀짝 분리현상을 보여준다. 여기서 연속방정식의 압력 항에 의한 수치점성항의 역할을 알 수 있다. 압력 항에 의한 점성항은 y축 방향으로의 홀짝 분리 현상의 원인이 되나 x축 방향으로의 진동 확대 현상을 제거하는 역할을 한다. 홀짝 분리현상은 앞에서 언급했듯이 밀도교란에 따라 x방향의 플럭스 차이에 의한 영향이기 때문에 압력 항이 존재하면 교란이 증폭되어 불안정성을 피할 수 없다. 다만 AUSMPW+는

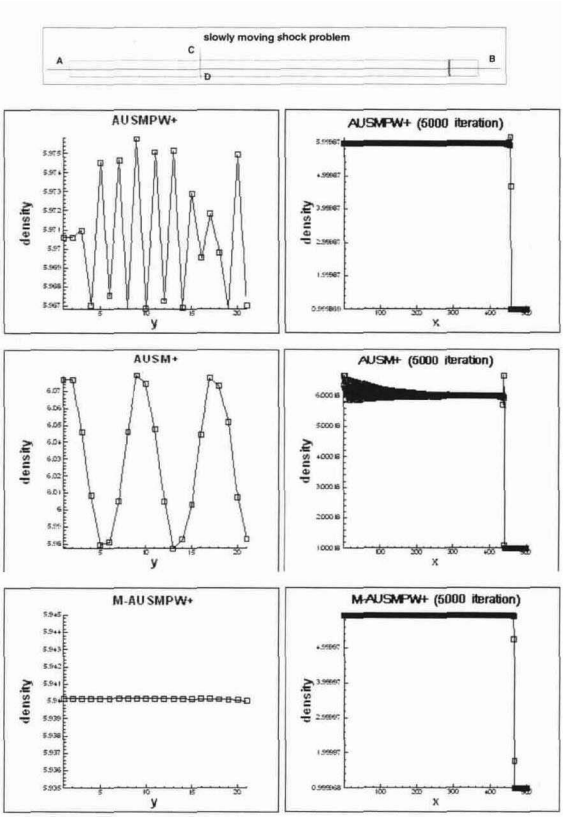


Fig. 5. 수치기법에 따른 선분 AB와 CD에서의 밀도 분포; (a)AUSMPW+; (b)AUSM+; (c) M-AUSMPW+.

충격파 강도에 따라 압력항의 크기가 충격파 전후 압력비의 제곱에 비례하여 줄어들기 때문에 압력교란에 의한 밀도 교란이 줄어들게 되고 결과적으로 x방향으로의 플럭스 차이가 줄어들게 되어 홀짝 분리 현상이 감소한다. 실제로 마하수가 100인 이동 충격파 문제의 경우에도 문제없이 계산이 가능하다. Fig. 5(c)는 x방향으로의 초음속인 경우(Fig.4(a)에 해당)에만 slip유동을 인정하지 않는 M-AUSMPW+를 사용한 결과이다. x, y방향으로 밀도의 진동현상이 완전히 제거된 모습을 알 수 있다. 그러므로 압력차에 의한 수치점성항은 x방향으로 마하수가 아음속인 경우로 convection 속도가 작기 때문에 밀도 교란으로 인한 x방향으로의 플럭스 역시 차이가 작다. 따라서 y방향으로의 홀짝분리현상을 보여주지 않고 x방향으로의 진동현상 제거하는 순방향 역할만 하게 된다. 반면 x방향으로 마하수가 초음속인 경우 convection 속도가 크기 때문에 밀도 교란으로 인한 x방향으로의 플럭스 차이가 커지게 되고 이로 인해 x방향으로의 진동현상 제거하는 순

방향 역할뿐만 아니라 y방향으로의 홀짝분리 현상을 유발하는 역기능도 보여주게 된다.

3.3 절두 원통형 문제

Fig. 6은 절두 원통형을 계산한 문제로 수치적 불안정성에 의해 야기되는 실제 응용문제의 한 가지 예이다. 강한 충격파 이후, 유동 속도가 거의 영에 가까운 영역이 넓은 영역에 걸쳐 존재하는 문제이다. 이런 문제의 경우 충격파 불안정성에 매우 민감하게 된다. 속도가 영인 경우 지배방정식은 항상 성립하게 되는 부정형 형태를 가진다. 이는 약간의 교란에 의해서도 해의 정확성에 크나 큰 영향을 미치는 요인이 된다[9]. 즉, 약간의 수치점성에 의해서도 속도 방향이 수치점성에 영향을 받아 바뀌게 되고 실제 계산에 있어서는 유동이 회전하는 원인이 된다. 이는 물리적으로 타당하지 못한 결과로 전적으로 수치오차에 의해 발생된 결과이다. 다음은 실제로 문제를 해석하는데 있어 발생할 수 있는 한 가지 예이다. 같은 격자계와 같은 마하수를 사용한 결과이다. AUSM+ 수치기법 역시 일반적으로 충격파 불안정성에 매우 강건한 수치기법으로 알려져 있으나 본 예제 문제의 경우에는 수치적 불안정성이 후방으로 흐르면서 유동의 회전 원인을 제공해 충격파가 수렴하지 못하고 계속 진동하는 모습을 보여 준다. M-AUSMPW+의 경우 충격파에서 야기되는 수치적 불안정성을 원천적으로 제거해 별무리 없이 계산되는 것을 알 수 있다. 격자계를 조금씩 바꿔 가며 수치 실험해 본 결과 M-AUSMPW+의 경우가 AUSM+에 비해 훨씬 안정적인 모습을 보여준다. 이러한 수치점성에 민감한 유동 문제를 해석하기 위해서는 수치적 불안정성을 제거하는 것이 필수적이라고 할 수 있다.

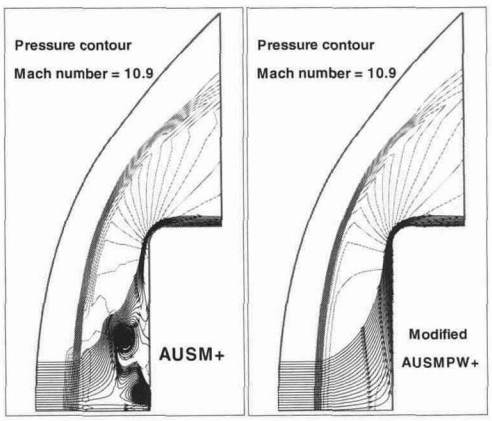


Fig. 6. 제어면의 마하수가 초음속인 경우

3.4 이중 마하 반사 문제

이중 마하 반사 문제는 충격파(i), 반사충격파(r) 그리고 마하파(m)가 만나는 3중점이 존재하는 문제로 이동충격파문제와 비슷한 현상을 나타낸다. 격자계가 벽면과 평행하기 때문에 마하파 영역에서 벽면과 평행한 제어면에서 속도는 영이 되어 이 문제 역시 유일해 결정이 문제 해결의 관건이 된다. Fig. 7은 이중 마하 반사 문제의 개략도이다. 마하파를 살펴보게 되면 벽면근처에서 고속유동이 유입되는 것을 알 수 있다. 본 문제에서 교란 요인은 앞에서 설명한 압력교란에 의한 밀도 교란 증폭 경우 외에 유입속도 오차에 의한 밀도 교란 증폭 현상이 존재한다. 유입속도의 오차가 마하파의 이동속도를 변화시키고 이에 벽면과 평행한 방향으로 플럭스 차이가 발생하여 밀도교란으로 바뀌게 된다. 밀도 교란은 다시 마하파 이동속도를 변화시키는 악순환이 진행되어 교란이 증폭되게 된다. Roe's FDS결과를 보면 유입속도 오차에 의한 밀도 교란 증폭 현상보다는 앞에서 이동 충격파 경우와 마찬가지로 압력교란이 밀도교란 증폭에 주된 원인이 된다. 반면, AUSM+ 경우 마하파 쪽으로 유입되는 고속 유동의 교란이 마하파 내부에서의 slip유동 현상을 일으킨다. 실제 Euler 방정식의 경우 충격파 영역에서 slip유동이 존재하지 않기 때문에 유입속도의 차이는 모두 수치오차로 간주된다. AUSM+에서의 밀도 교란 증폭현상은 유입속도 오차에 의한 것으로 Roe's FDS와는 원인이 다르다. AUSMPW+의 경우 압력 항으로 표시되는 수치점성이 존재하여 위, 아래 셀의 압력이 같다는 조건이 있어 충격파영역에서 비 물리적인 slip유동이 존재하는 것을 어느 정도 막을 수가 있다. 물

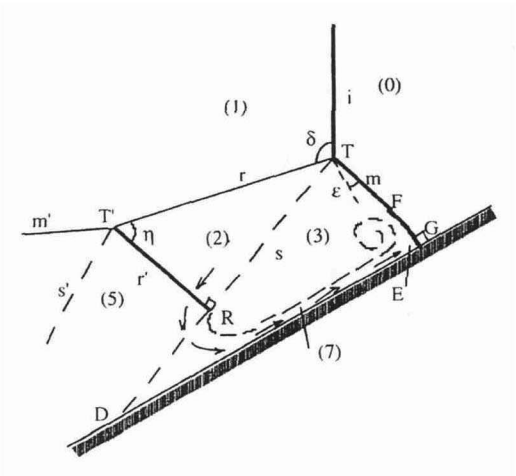


Fig. 7. 이중 마하반사 현상의 개략도

참고문헌

1. P. L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. of Computational Physics*, 43, 357-372 (1981).

2. J. J. Quirk, "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 18, 555, (1994).

3. M. S. Liou, and C. J. Steffen Jr., "A New Flux Splitting Scheme," *J. of Computational Physics*, 107, 23-39 (1993).

4. M. S. Liou, and Y. Wada, "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," AIAA Paper 94-0083, (1994).

5. M. S. Liou, "A Sequel to AUSM: AUSM+," *J. of Computational Physics*, 129, 364-382 (1996).

6. K. H. Kim, J. H. Lee, and O. H. Rho, "An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-based Weight Functions," *Computers & Fluids*, 27(3), 311-346 (1998).

7. K. H. Kim, C. Kim, and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows, PART I: AUSMPW+ Scheme," accepted to *J. of Computational Physics*, (2001).

8. M. S. Liou, "Mass Flux Schemes and Connection to Shock Instability," *J. of Computational Physics*, 160, 623-648, (2000).

9. K. H. Kim, C. Kim, and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows, PART II: Shock aligned Grid Technique," accepted to *J. of Computational Physics*, (2001).

10. B. Van Leer, "Flux-vector Splitting for the Euler Equation," *Lecture Notes in physics*, 170, 507-512 (1982).