유동망 시스템 해석을 위한 경계처리에 대한 보존형 유한체적법

홍 석 우,[1] 김 종 암[*2]

CONSERVATIVE FINITE VOLUME METHOD ON BOUNDARY TREATMENTS FOR FLOW NETWORK SYSTEM ANALYSES

S.W. Hong[1] and C. Kim[*2]

To adequately analyze flows in pipe or duct network system, traditional node-based junction coupling methods require the junction loss which is specified by empirical or analytic correlations. In this paper, a new finite volume junction coupling method using a ghost junction cell is developed by considering the interchange of linear momentum as well as the important wall-effect at junction without requiring any correlation on the junction loss. Also, boundary treatment is modified to preserve the stagnation enthalpy across boundaries, such as pipe-end and the interface between junction and branch. Also, the computational accuracy and efficiency of the Godunov-type finite volume schemes are investigated by tracing the total mechanical energy of rapid transients due to sudden closure of valve at downstream end.

Key Words : 유동망 시스템(Flow Network System), 유한체적법(Finite Volume Method), 경계처리(Boundary Treatment), 정션결합(Junction Coupling), 유령정션법(Ghost Junction Method), 직접변환법(Direct Transform Method)

1. INTRODUCTION

급·배수 관 망[1], 터널 내 공기역학[2], 자동차 엔진 및 Manifold[3]의 기체역학 등 유체 네트워크 시스템의 여러 응용문제가 공학 분야에서 다루어져 왔다. 이러한 유동망 문제를 계산하는데 있어서 Junction 및 경계면(Interface) 처리는 이론 해를 얻기 위한 필수 요소다.

전통적으로 Junction에서 질량보존법칙에 기초한 다음의 결합조건(Coupling Condition)이 널리 사용되어 왔다[4-6].

① Mass conservation at junction : $\sum_i \lim_{x\to 0+} (\rho U s)_i = 0$.

② Single pressure at junction : $p_{\tilde{k}} = p_k$.

③ Pressure loss along streamline $(k,\tilde{k})$: $p_{\tilde{k}} = p_k - \tilde{f}_{(k,\tilde{k})}$.

여기서, $(k,\tilde{k})$는 분기관 k 로부터 분기관 $\tilde{k}$ 로 흐르는 유선, 분기관 내 좌표 x는 junction으로부터 축방향 거리, $\tilde{f}$는 압력 손실량을 나타낸다.

이러한 조건은 Junction에서 운동량 상호작용(Momentum Interaction)에 대한 물리적 성질을 반영하기 위하여 유선 $(k,\tilde{k})$에 따른 많은 손실계수(Loss Coefficient)를 사용해야 하며, 결합조건으로부터 분기관(Branch or Pipe)의 경계조건을 얻기 위하여 반복계산을 요구한다. 더욱이, 손실계수에 대한 상관식이 알려져 있는 전형적인 몇 가지 Junction Type을 제외하면 복잡한 유동망 시스템 내 임의의 Junction-Branch 조합에 대하여 손실계수에 대한 이론 상관식을 유도하는 것은 매우 어려우며 경험적인 상관식 역시 얻기 어렵다. 따라서, 전통적인 절점기반의 정션결합법(Node-based Junction Coupling Method)의 단점을 보완하기 위하여 Junction에서 운동량 상호작용을 고려할 수 있는 유한체적법에 기초한 Junction 결합법으로 GJM(Ghost Junction Method)을 제안하게 되었다. 아울러, 유동망 시스템(Flow Network System) 내 관 요소(Pipe Element)

접수일: 2008년 11월 22일, 수정일: 2009년 3월 20일,
게재확정일: 2009년 3월 16일.
1 정회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부
2 종신회원, 서울대학교 기계항공공학부
* Corresponding author, E-mail: chongam@snu.ac.kr

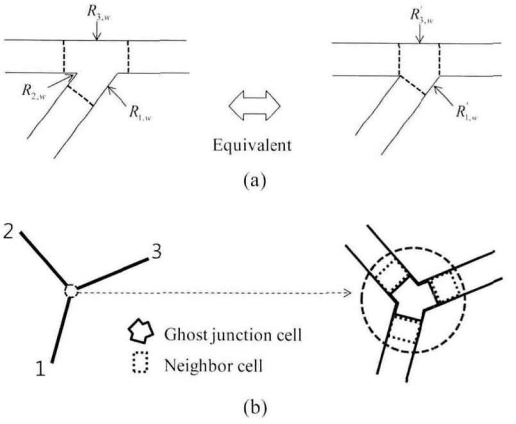


Fig. 1 Ghost Junction Cell

의 연속/불연속 경계면에서 전엔탈피(Stagnation Enthalpy)량을 보존하는 경계처리법 역시 제안하였다.

2. GHOST JUNCTION METHOD

2.1 FINITE VOLUME METHOD ON JUNCTION COUPLING

Junction에서 마찰력과 열전달이 없다고 가정하면, Ghost Junction Cell에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$V\frac{\partial Q}{\partial t}=-\sum_i F_i s_i-\frac{\partial V}{\partial t}Q, \tag{1}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho e_t\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}\rho U\\ \rho u U+n_x p\\ \rho v U+n_y p\\ \rho w U+n_z p\\ (\rho e_t+p)U\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$U=n_x u+n_y v+n_z w,\ N=(n_x,n_y,n_z), \tag{3}$$

$$p=(\gamma-1)\rho e-\gamma p_c,\ a=\sqrt{\frac{\gamma}{\rho}(p+p_c)}, \tag{4}$$

여기서 U, N 은 Junction Interface(Junction과 Pipe 간 경계면)에 수직인 속도와 단위벡터이다. Junction Interface와 벽면으로 구성된 유령정션(Ghost Junction)의 체적으로 이웃 셀들의 평균 체적을 사용하였으며 Fig. 1(b)에 나타내었다.

벽면효과는 다음의 힘벡터(Force Vector)로 표현된다.

$$\overline{R_w}=\sum_i R_{i,w}=ps_R(n_x,n_y,n_z)_R, \tag{5}$$

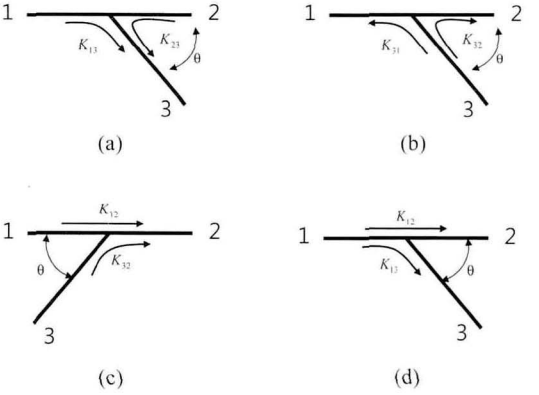


Fig. 2 T-Junction Configurations

여기서 하첨자 R 은 유효벽면을 나타낸다.

관(Pipe) 유동에 대한 1차원 Euler 방정식은 다음과 같다.

$$V\frac{\partial Q}{\partial t}=-\left(s_{j+1/2}F_{j+1/2}-s_{j-1/2}F_{j-1/2}\right)+H_V=-R, \tag{6}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho U\\ \rho e_t\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}\rho U\\ \rho U^2+p\\ (\rho e_t+p)U\end{pmatrix}. \tag{7}$$

여기서, ρ, U, p, e_t, s, V 은 각각 밀도, 속도, 압력, 전에너지, 단면적, 격자체적을 나타낸다. 주 소스벡터는 압력, 벽면마찰, 그리고 중력에 의한 힘으로 구성되며 다음과 같다.

$$H_V=\begin{pmatrix}0\\ (\tau_{w,S}+\tau_{w,U})\Pr\Delta x+p(s_{j+1/2}-s_{j-1/2})+mg_n\\ 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

여기서 $\tau_{w,S}$ 와 $\tau_{w,U}$은 벽면 전단응력의 정상부분과 비정상부분을 나타내며, Pr, Δx, g_n, m은 단면 접속길이, 격자크기, 중력가속도, 제어체적 내 유체의 질량을 나타낸다. 이 밖의 물리현상에 대한 모델링을 추가해야 하는 경우 보조 소스벡터를 추가할 수 있으나, 본 연구에서는 생략하였다.

운동량 상호작용을 고려해야 하는 Junction에서 데카르트좌표계를 사용하며, 분기관은 1차원 국부좌표계를 사용한다.

$$F_{3d}=\begin{pmatrix}f_{3d}^{\rho}\\ f_{3d}^{\rho u}\\ f_{3d}^{\rho v}\\ f_{3d}^{\rho w}\\ f_{3d}^{\rho e_t}\end{pmatrix},\ F_{1d}=\begin{pmatrix}f_{3d}^{\rho}\\ n_x f_{3d}^{\rho u}+n_y f_{3d}^{\rho v}+n_z f_{3d}^{\rho w}\\ f_{3d}^{\rho e_t}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Junction Interface에서 수치플럭스는 식 (9)의 왼쪽에 있는 데카르트좌표계에서의 표현으로 얻을 수 있으며, 동일시간 단계에 이웃 분기관의 경계조건으로 사용된다. 이 때, 식 (9)의 오른쪽 식에 의해 1차원 국부좌표계로 변환하여 사용한다.

2.2 JUNCTION INTERFACE TREATMENT

관 내 유동이 정상상태, 아음속이며 Junction 주변에서 마찰이 없고 파이프 관 요소의 단면적이 변화가 없다고 가정할 수 있다. 이 때, Junction Interface에서의 압력변화량 ($\Delta p = p_{j+1} - p_j$)은 이산화 된 지배방정식의 우변 잔류항을 0으로 놓으면 유도할 수 있다.

$$V\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\left(s_{j+\frac{3}{2}}F_{j+\frac{3}{2}} - s_{j+\frac{1}{2}}F_{j+\frac{1}{2}}\right) = -R, \tag{10}$$

여기서 j, $j+1$, $j+2$ 은 ghost junction cell, 인접한 이웃 분기관의 셀, 그리고 이웃 분기관의 안쪽 셀을 나타내며, $j+1/2$, $j+3/2$ 은 Junction interface, 분기관 내 interface를 가리킨다. 수치플럭스에 Roe's scheme을 적용하고 분리된 속도벡터를 이용하여 damping flux를 정리하면 다음과 같다.

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(F_j + F_{j+1} - |\widetilde{A}|\Delta Q\right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}|\Delta Q = {} & D^{(\rho)}\Delta\rho + D^{(p)}\Delta p + D^{(U_n)}\Delta U_n \\ & + D^{(U_{t,x})}\Delta U_{t,x} + D^{(U_{t,y})}\Delta U_{t,y} + D^{(U_t^2/2)}\Delta\frac{1}{2}U_t^2, \end{aligned} \tag{12}$$

여기서

$$D^{(\rho)} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ 0.5\hat{q}^2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$D^{(p)} = \frac{1}{2\hat{a}^2}\begin{pmatrix} -2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ -2\hat{u}\lambda_1 + \left(\hat{u} + n_x\hat{a}\right)\lambda_3 + \left(\hat{u} - n_x\hat{a}\right)\lambda_4 \\ -2\hat{v}\lambda_1 + \left(\hat{v} + n_y\hat{a}\right)\lambda_3 + \left(\hat{v} - n_y\hat{a}\right)\lambda_4 \\ -\hat{q}^2\lambda_1 + \left(\hat{h}_0 + \hat{a}\widehat{U}_n\right)\lambda_3 - \left(\hat{h}_0 - \hat{a}\widehat{U}_n\right)\lambda_4 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$D^{(U_n)} = \frac{\hat{\rho}}{2\hat{a}^2}\begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_4 \\ \left(\hat{u} + n_x\hat{a}\right)\lambda_3 - \left(\hat{u} - n_x\hat{a}\right)\lambda_4 \\ \left(\hat{v} + n_y\hat{a}\right)\lambda_3 - \left(\hat{v} - n_y\hat{a}\right)\lambda_4 \\ \left(\hat{h}_0 + \hat{a}\widehat{U}_n\right)\lambda_3 - \left(\hat{h}_0 - \hat{a}\widehat{U}_n\right)\lambda_4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & D^{(U_{t,x})}\Delta U_{t,x} + D^{(U_{t,y})}\Delta U_{t,y} + D^{(U_t^2/2)}\Delta\frac{1}{2}U_t^2 \\ & = \hat{\rho}\lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\hat{u} - n_x\Delta U_n \\ \Delta\hat{v} - n_y\Delta U_n \\ \Delta\frac{1}{2}\hat{q}^2 - \Delta\frac{1}{2}U_n^2 \end{pmatrix} = \hat{\rho}\lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta U_{t,x} \\ \Delta U_{t,y} \\ \Delta\frac{1}{2}U_t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 위첨자 ^ 은 interface에서 Roe-averaged 값을 의미한다. (수식의 간략화를 위해 ^은 생략할 수 있다.)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = |\widehat{U}_n|,\ \lambda_3 = |\widehat{U}_n + \hat{a}|,\ \lambda_4 = |\widehat{U}_n - \hat{a}|, \tag{17}$$

$$\hat{q}^2 = \hat{u}^2 + \hat{v}^2 = \widehat{U}_n^2 + \widehat{U}_t^2, \tag{18}$$

$$(u, v, w) = \langle U_n \rangle + \langle U_t \rangle, \tag{19}$$

$$\langle U_n \rangle = U_n N,\ \langle U_t \rangle = U_t T, \tag{20}$$

$$U_n = n_x u + n_y v,\ U_t = \sqrt{U_{t,x}^2 + U_{t,y}^2}, \tag{21}$$

$$N = (n_x, n_y),\ T = \frac{1}{U_t}(U_{t,x}, U_{t,y}), \tag{22}$$

$$U_{t,x} = u - n_x U_n,\ U_{t,y} = v - n_y U_n. \tag{23}$$

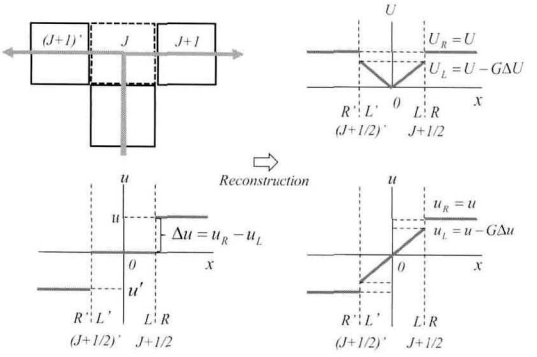
식 (10-23)의 에너지방정식을 제외한 Continuity 방정식과 운동량 방정식으로부터 Junction Interface의 압력변화량은 Interface에 수직인 속도성분에 의한 변화량과 수평성분에 의한 변화량의 합으로 정리된다.(자세한 유도 과정은 생략하였다.)

$$\Delta p = -\rho a\Delta U_n - \rho a\left(\frac{M + |M|}{1 + M}\right)\left(\frac{t_x + t_y}{n_x + n_y}\right)\Delta U_t. \tag{24}$$

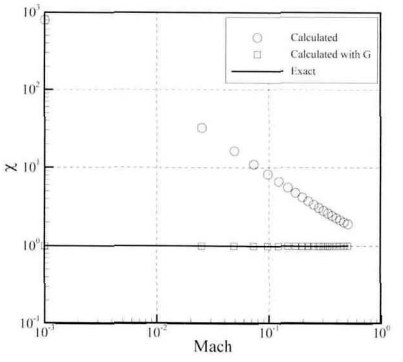
여기서, $M = U_n/a$. 식 (24)의 우변의 첫 번째 항은 Interface에 수직인 속도성분의 차에 의한 것이며 식 (25)로 정의되는 Joukowsky의 Water-hammer 방정식[7]과 같다.

$$\Delta p = -\rho a\Delta U. \tag{25}$$

그런데 우변 첫 번째 항은 Junction Interface에서 비물리적인 wave source로 작용할 수 있다. 예를 들면, Fig. 2(b)에서



(a)



(b)

Fig. 3 (a)Reconstruction, (b)The Effect of Scaling Function

90° Counter-Dividing Configuration을 생각해보자. Junction에서 x방향 속도성분 u의 셀 평균값은 0이 되지만, 인접한 이웃 셀에서는 유한 값을 갖는다. 따라서, 우변 첫 번째 항은 큰 값을 갖게 된다. Junction Interface에서 발생하는 비물리적 현상은 순전히 수치적 원인에 기인한 것이므로 적절한 치료법이 제시되어야 한다.

$$G = \delta \cdot \min\left(\frac{|\Delta U_n|}{a}, 1\right),\ \delta = \begin{cases} 1 : \text{if } outflow \\ 0 : else \end{cases}. \tag{26}$$

식 (26)의 스케일링 함수를 식 (24)의 우변 첫 번째 항에 적용하면 다음과 같이 정리된다. 수식의 간략화를 위해 2차원 좌표계를 사용하였다.

$$\Delta p + \rho|\Delta U_n|\Delta U_n = -\rho a\left(\frac{M+|M|}{1+M}\right)\left(\frac{t_x+t_y}{n_x+n_y}\right)\Delta U_t. \tag{27}$$

식 (27)의 좌변은 운동량플럭스의 변화량과 유사하므로 스케일링 함수를 적용한 GJM이 Junction에서 이론 해를 예측할 수 있도록 도움을 준다.

스케일링 함수를 수치플럭스에 반영하기 위하여 Fig.3에 나타낸 것처럼 간단한 투영법을 적용하였다. Interface의 왼쪽(Junction 방향)으로 투영된 속도벡터는 스케일링한 수직 속도벡터와 본래 평행한 속도벡터의 합으로 얻을 수 있고, 오른쪽(Branch 방향)은 그대로 사용한다.

2.3 Test Results

Fig. 3(b)는 90° Counter-Dividing Configuration에서 유선(3,1)에서 전압력 강하량의 이론값에 대한 비율을 식 (28)로 계산한 값을 보여준다. 스케일링 함수를 사용하지 않은 경우, $M=0.01$일 때 이론값보다 80배 이상 크다는 것을 알 수 있다. 비슷한 현상이 90° Counter-Combining Configuration에서도 나타날 것이다. 반면, 스케일링 함수를 사용한 경우, 이론값을 모사함을 알 수 있다.

$$\chi = \frac{K_{(3,1)}}{K''_{(3,1)}} = \frac{\Delta p_{0,(3,1)}}{\Delta p''_{0,(3,1)}}, \tag{28}$$

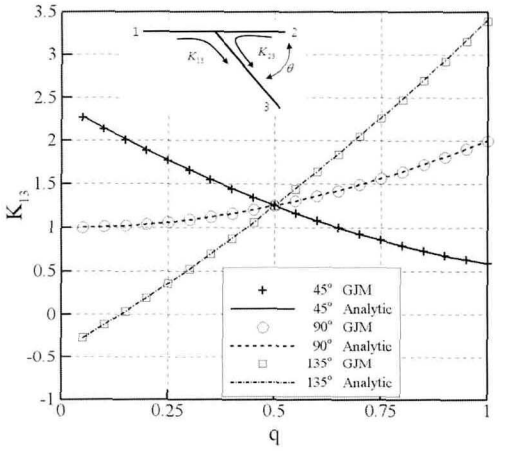
여기서, 위첨자 ″은 각각 이론값을 의미한다. (i,j)는 파이프 i 와 파이프 j 간 유선을 나타낸다.

본 연구에서 제안한 GJM의 일반적인 성능을 확인해보기 위하여 광범위한 수치실험을 실시하였으며 Fig. 4(a-f)에 나타내었다. 여기서 사용한 기호와 변수는 Table 1에 정리하였고 손실계수의 이론 상관식[8,9]과 결과를 비교하였다. 수치실험 결과, Junction에서의 손실계수에 대한 예측은 전반적으로 이론값을 모사하는 경향이 있으며 일부 경우에서는 완전하게 같은 값을 보여주기도 한다.

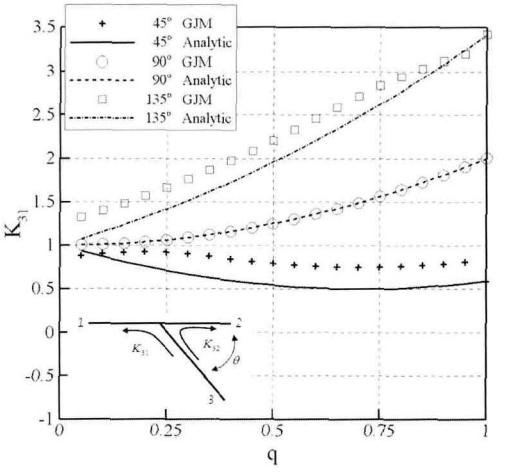
이는 새로 제안한 GJM이 Junction에서의 운동량 상호작용을 물리적으로 잘 모사하고 있으며, 스케일링 함수가 본래 의도한 바를 잘 반영하고 있음을 볼 수 있다.

Table 1 Stagnation Pressure Loss Coefficients for T-Junction Configurations (See with Fig. 2)

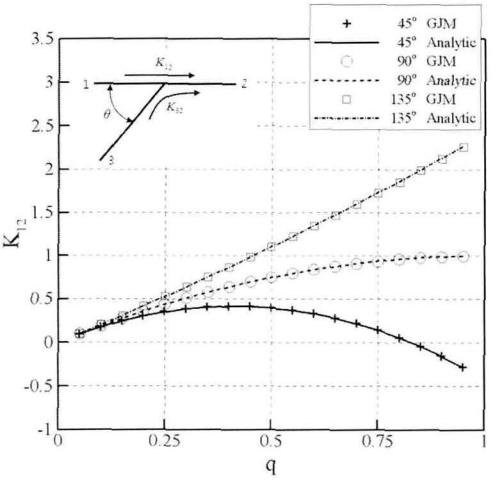
Type	Symbols	Loss Coefficients
(a) Type 1	$q=\dot{m}_1/\dot{m}_3$ $\xi=s_1/s_3$	$K_{13}=(p_{0,1}-p_{0,3})/(p_{0,3}-p_{s,3})$
(b) Type 2	$q=\dot{m}_1/\dot{m}_3$ $\xi=s_1/s_3$	$K_{31}=(p_{0,3}-p_{0,1})/(p_{0,3}-p_{s,3})$
(c) Type 3	$q=\dot{m}_3/\dot{m}_2$ $\xi=s_2/s_3$	$K_{12}=(p_{0,1}-p_{0,2})/(p_{0,2}-p_{s,2})$ $K_{32}=(p_{0,3}-p_{0,2})/(p_{0,2}-p_{s,2})$
(d) Type 4	$q=\dot{m}_1/\dot{m}_3$ $\xi=s_1/s_3$	$K_{12}=(p_{0,1}-p_{0,2})/(p_{0,1}-p_{s,1})$ $K_{13}=(p_{0,1}-p_{0,3})/(p_{0,1}-p_{s,1})$



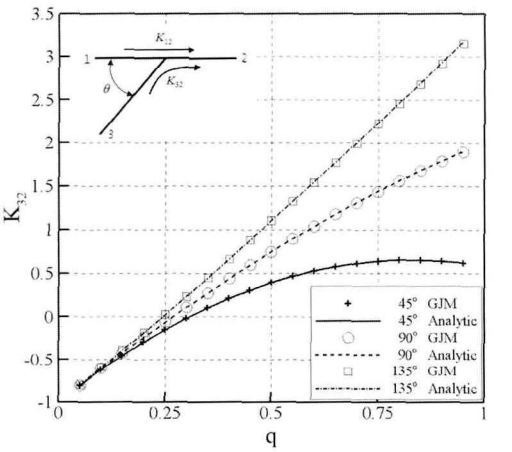
(a) Counter-Combining (Type 1)



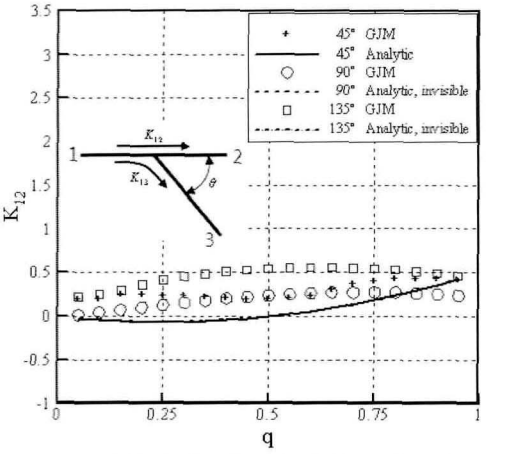
(b) Counter-Dividing (Type 2)



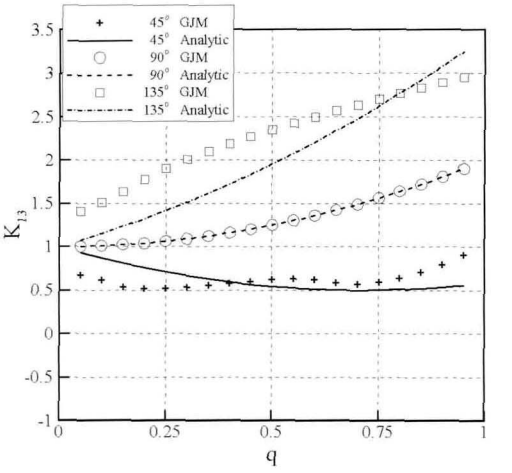
(c) K12, Straight-Branch Combining (Type 3)



(d) K32, Straight-Branch Combining (Type 3)



(e) K12, Straight-Branch Dividing (Type 4)



(f) K13, Straight-Branch Dividing (Type 4)

Fig. 4 Test Results of GJM for T-Junctions

GJM의 공학적 유용성에 대한 평가를 하기 위해 전통적인 Node-based Junction Coupling Method의 특징을 먼저 살펴보는 것이 바람직하다.

절점기반결합법은 Junction에 연결된 분기관이 3개인 경우 상관식 6개 요구하며, 4개인 경우 12개를 요구하는데다 분기관이 4개 이상인 경우 경험상관식이 존재하지 않는다. 이는 무수히 많은 경우의 수에 대한 실험을 수행하는 것이 현실적으로 불가능하기 때문이다. 아울러 이론상관식 역시 전형적인 몇 가지 type (본 논문에서 제시한)의 T-junction 에 대해서만 보고되었고 임의의 연결각에 대한 상관식은 보고되지 않고 있다. 따라서, 전통적인 절점기반결합법은 4개 이상의 분기관을 갖는 Junction 또는 임의의 연결각을 갖는 Junction에 대한 정확한 해법을 제시하지 못하고 있으므로 이러한 문제를 다루는데 있어 손실계수를 무시하거나 적당한 값을 가정하여 해석을 감행해야 한다. Long pipe system의 경우 이러한 방식으로 근사적인 해를 얻는 것이 공학적으로 받아들여지고 있다. 그러나 다음의 경우 심각한 문제를 야기할 수 있다.

건축설비, 플랜트설비, 항공기 유압시스템 등의 공학설계에 있어서 유체네트워크 시스템이 short pipe로 구성된 경우 더 이상 이를 무시할 수 없다. 왜냐하면 시스템의 저항에 대한 잘못된 예측으로 각 파이프 요소에 대한 질량유량을 잘못 예측하기 때문이다. 예를 들면, commercial steel pipe 로 구성된 network system 을 생각해보자. 여기서 pipe-diameter (D_H) 는 0.1m, pipe-length 10m (L), 그리고 friction factor $\bar{f}=0.016$.

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1+\rho g Z_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g Z_2+\Delta p_{Loss}, \qquad (29)$$

$$\Delta p_{Loss}=\sum \bar{f}\frac{L}{D_H}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\sum K\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right), \qquad (30)$$

이 때, Junction의 minor loss는 pipe-wall의 마찰로 인한 major loss와 그 크기가 같아진다. ($O(K)\simeq O(\bar{f}\times L/D_H)$.)

결과적으로 전통적인 결합법은 손실계수에 대한 상관식이 존재하지 않는 많은 공학적 응용문제(특히 short-pipe network system)에서 관 요소의 질량유량을 잘못 예측하고 Junction에서 전엔탈피가 보존되지 않아 압축성유동 영역에서 정확도가 떨어지는 단점을 갖고 있다.

Fig. 4로부터 GJM은 combining flow에서 이론 해를 정확하게 모사하고 있으며, dividing flow에서 완전하게 모사하지 못하고 있으나 Fig.4(b),(e),(f)로부터 그 오차가 크지 않음을 확인하였다. 이는 Junction의 에너지손실에 대한 상관식을 사용할 수 없는 경우, GJM이 절점기반결합법의 큰 오차를 줄일 수 있으며 유력한 대안이 될 수 있음을 의미한다.

2.4 Iterative Ghost Junction Method(I-GJM)

한 편, 상관식이 존재하는 경우 다음과 같이 반복계산법으로 고안된 I-GJM를 사용하면 이론상관식 또는 경험상관식의 손실량을 그대로 반영할 수 있다.

유선 (j_i,j_o)을 따라 momentum corrector $MC(j_i,j_o)$을 현재의 total pressure 변화량과 상관식에 의한 total pressure 변화량의 차이로 다음과 같이 정의한다.

$$MC(j_i,j_o)=\Delta p_o(j_i,j_o)-TLC(j_i,j_o)\times\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right), \qquad (31)$$

여기서 $TLC(j_i,j_o)$은 유선(j_i,j_o)에 대한 목적 손실계수를 나타내고 j_R 기준 분기관을 나타낸다. Combining flow 경우, momentum flux corrector 는 아래의 식 (32)로 정의하고, 마찬가지로 dividing flow 경우 식 (33)로 정의한다.

$$MF(j_i)=MF^+(j_i)+URF\times MC(j_i,j_o) \text{ for all } j_i \qquad (32)$$

$$MF(j_o)=MF^+(j_o)+URF\times MC(j_i,j_o) \text{ for all } j_i \qquad (33)$$

여기서 위첨자 +는 현재 값을 나타내고 URF는 under relaxation factor 이다. 결과적으로 모든 유선에 대한 손실계수는 반복계산에 의해 momentum flux를 다음과 같이 correcting 함으로써 target value로 수렴한다. 식(31-34)의 과정은 momentum corrector $MC(j_i,j_o)$가 convergence criteria를 만족할 때까지 반복한다.

$$f'^{\rho U}_{1d}=n_x f'^{\rho u}_{2d}+n_y f'^{\rho v}_{2d}, \qquad (34\text{-a})$$

여기서

$$f'^{\rho u}_{2d}=f^{\rho u}_{2d}+n_x MF, \qquad (34\text{-b})$$

$$f'^{\rho v}_{2d}=f^{\rho v}_{2d}+n_y MF. \qquad (34\text{-c})$$

I-GJM는 전통적인 절점기반결합법과 반복계산을 한다는 점에서 유사성을 보이고 있으나 유한체적법과 RoeM[10] 유한차분법을 적용하여 전엔탈피 보존을 보장함으로써 정확도를 향상시킬 수 있다. 그러나 이론상관식을 I-GJM와 함께 사용하는 것은 반복계산에 의한 효율성 저하로 인하여 유체시스템에 대한 급속비정상(rapid transients)문제에 대한 해법으로 적합하지 않다. 급속비정상 문제에서는 scaling function을 사용한 GJM을 사용하는 것이 효과적이다.

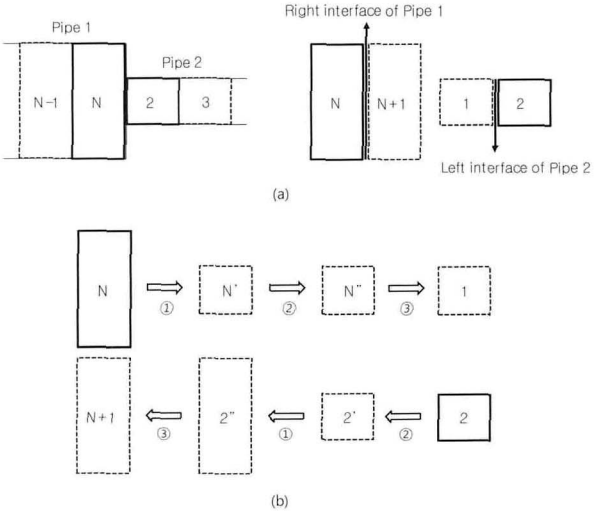


Fig. 5 Direct Transform Method

3. BOUNDARY TREATMENTS

본 연구에서 제안하는 경계면 처리법의 기본적인 특징은 경계면에서 유선을 따라 전엔탈피(Stagnation Enthalpy)가 보존된다는 것이다.

3.1 PIPE ENDS

유체시스템을 구성하는 중요한 요소인 파이프의 경계면에서 전엔탈피와 위치에너지의 변화가 없다고 가정할 수 있다. 이 때, 파이프 경계면이 개방된 경우, 외부환경(Environment or Reservoir)은 두 개의 열역학적 물성치에 의해 정의된다. 입구 조건은 입구의 손실계수와 전엔탈피 보존에 의해 외부환경으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{cases} p_{0,g} = p_{0,a} - K_i\, p_{d,g} \\ h_{0,g} = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\left(\dfrac{p_g + p_c}{\rho_g}\right) + \left(\dfrac{1}{2}U^2 + gZ\right)_g = h_{0,a}, \end{cases} \tag{35}$$

여기서, 아래첨자 g, a, 0, d 는 각각 Ghost Cell, Ambient Air, 전물성치(Stagnation Property)와 동물성치(Dynamic Property)를 나타낸다. K_i은 입구 손실계수를 나타낸다.

이와 유사하게, 출구 경계조건은 다음과 같이 압력을 부여하고 밀도와 속도는 내부로부터 외삽하여 사용한다.

$$p_{0,g} = p_a + K_o p_{d,g}, \tag{36}$$

여기서, K_o은 출구 손실계수를 나타낸다.

파이프의 개방 경계면에 유량을 경계조건으로 부여하는 경우, 압력은 내부로부터 외삽하여 얻고, 경계면에서 전엔탈피가 보존된다는 조건은 여전히 유효하다. 그 밖에 파이프 경계면이 닫힌 경우, 벽면조건을 다음과 같이 벽면 플럭스 형태로 부여할 수 있다. 이러한 조건은 밸브나 댐퍼가 닫힌 상태를 표현하기 위해 흔히 사용된다. 여기서 벽면압력 p_w는 내부로부터 외삽하여 얻는다.

$$F_{j+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_w \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

3.2 DISCONTINUITY IN SERIAL PIPELINES

직렬연결관 간 불연속 경계면(단면의 급격한 변화 또는 밸브 등)이 존재하는 경우, 경계면(Interface)에서 전물성치가 보존되지 않는 문제를 해결하기 위해 직접변환법(Direct Transform Method)를 제안하였다. DTM은 Fig. 5(b)(①-②-③)에 나타낸 것처럼, 등엔트로피 과정을 거쳐 Inner Cell의 물성치를 Ghost Cell에 전달한다. 이어 압력손실계수를 반영해주기 위해 Fanno유동에 대한 몇 가지 함수를 사용한다. 동일시간단계에 유사한 변환과정(②-①-③)이 함께 적용된다. DTM의 첫 번째 단계에서 등엔트로피 변환을 위해 전물성치에 대한 식 (38)의 정의와 식 (39)의 단면적-마하수 관계식이 사용된다.

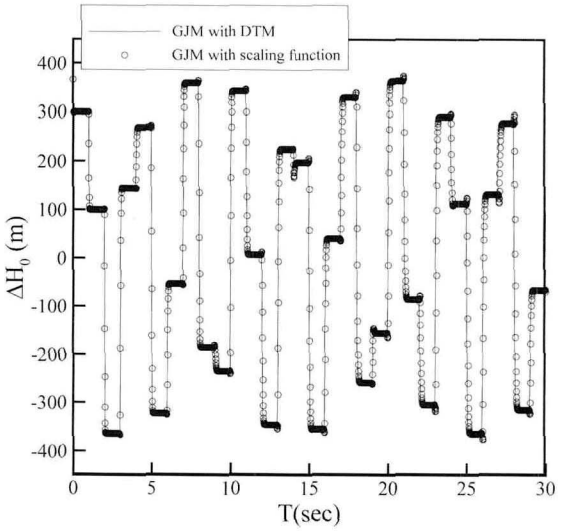
$$\begin{cases} p_0 = (p + p_c)\left(1 + \dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - p_c \\ \rho_0 = \rho\left(1 + \dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}, \tag{38}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2}\left\{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right) \Big/ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{39}$$

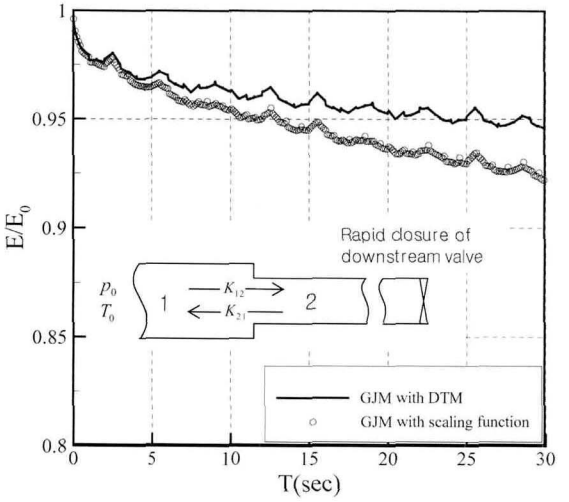
두 번째 단계에서는 식 (40)과 식 (41)로 표현되는 Fanno유동에 대한 관계식이 사용된다. 이를 이용하여, 목표 압력손실량을 반영한 물성치를 식 (42)의 압력 비 함수와 엔탈피 비 함수를 이용하여 획득할 수 있다.

$$K = 4C_f\frac{\Delta x}{D_H} = 4C_f\frac{l^*}{D_H}(M_1) - 4C_f\frac{l^*}{D_H}(M_2), \tag{40}$$

$$4C_f\frac{l^*}{D_H} = \frac{1-M}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}ln\left(\frac{(\gamma+1)M^2}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\right), \tag{41}$$



(a)



(b)

Fig. 6 (a)Total Head, (b)Total Mechanical Energy

$$\begin{cases} \dfrac{h}{h^*} = \left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{\gamma-1}{2} M^2\right) \\ \dfrac{p+p_c}{p^*+p_c} = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{h}{h^*}\right)^{1/2} \end{cases}, \tag{42}$$

여기서 위첨자 *는 가상 음속점(Imaginary Sonic Point) 에서의 물성치를 나타낸다.

DTM을 적용한 GJM의 정확도를 평가하기 위해 파이프 하단의 밸브를 급격히 닫았을 때 발생하는 수충격(Water Hammer Transients)을 관찰하였다. Fig. 6(a)는 DTM을 적용한 결과는 스케일링 함수를 적용한 GJM의 결과와 유사함을 보여준다. 그러나, Fig. 6(b)로부터 초기 전기계적에너지의 총량에 대한 30초 후 잔류량의 비를 관찰하면 DTM 95%, 그리고 스케일링 함수 92.5%를 보여준다. 수치실험으로부터 DTM이 GJM의 수치점성을 줄여 정확도 향상에 기여한 것으로 나타났다.

따라서, 직렬연결관의 경계면과 같이 파이프 2개가 만나는 Junction에서 손실계수에 대한 상관식이 주어진 경우, DTM을 적용한 GJM이 매우 유용하다. 특히, 파이프 내 밸프, 댐퍼 등 개폐장치의 개폐율에 대한 성능곡선(Valve Characteristics)이 주어진 경우, DTM을 사용하면 동적 모델링이 쉽다. 이와 유사하게 팬, 펌프 등 유체기계의 모델링 또한 쉽다. DTM은 직렬연결관 간 interface(관 요소 2개가 만나는 Junction)에 적용할 수 있으므로 파이프 3개 이상 만나는 Junction에는 스케일링 함수를 적용한 GJM을 사용한다.

4. Energy Trace

4.1 Total Mechanical Energy in System

수치기법의 정확성은 시스템 내 총 기계적에너지(Integrated Total Mechanical Energy)의 자취를 비교하여 평가할 수 있다. 전기계적에너지(Total Mechanical Energy)의 전미분 방정식은 다음과 같다[7].

$$\frac{dE_u}{dt} + \frac{dE_k}{dt} + W' + D' = 0 \tag{43}$$

$$E_u = \int_0^L (0.5P^2/\rho a^2) s dx,\ E_k = \int_0^L (0.5\rho U^2) s dx \tag{44}$$

$$P = p + \rho g Z,\ E = E_u + E_k \tag{45}$$

여기서, L, s는 파이프 길이와 단면적을 나타내며, E_u, E_k, W', D' 는 각각 내부에너지, 운동에너지, 외부로부터 유체에 가해진 일률, 벽면마찰에 의한 에너지 손실률을 의미한다.

수치실험에 사용한 문제는 파이프 하단 밸브의 급격한 닫힘으로 인한 급속압력변동(Rapid Pressure Transients)을 유발하고 파이프 내 기계적에너지의 잔류량을 추적하는 것이다. 실험조건은 파이프 길이 340m, 단면적 1m^2, 초기속도 1m/s, 그리고 파이프 상류 경계조건은 게이지 전압력 0Pa로 고정하였다. 벽면마찰 조건을 무시하고 외부와의 열전달과 일이 없으면, 전기계적에너지의 잔류량(E)은 초기량(E_0)에 대해 감쇄 또는 증폭 할 것인데, 이는 순전히 수치점성 또는 수치진동에 의한 것이다.

ACKNOWLEDGEMENT

서울대학교 기계항공공학부 대학원 Brain-Korea-21 프로그램의 재정적 지원과 항공우주신기술연구소의 행정적 지원에 감사드립니다.

REFERENCE

[1] 2005, Boulos, P.F. et al., "Hydraulic Transient Guidelines for Pretecting Water Distribution Systems," *Journal of AWWA*, Vol.97, pp.111-124.

[2] 2006, Baron, A. et al., "High-speed trains: Prediction of micro-pressure wave radiation from tunnel portals," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.296, pp.59-72.

[3] 2003, Zhang, G.Q. and Assanis, D.N., "Manifold Gas Dynamics Modeling and Its Coupling With Single-Cylinder Engine Models Using Simulink," *J. Eng. Gas Turbines and Power*, Vol.125, pp.563-571.

[4] 1998, Guinot, V., "Boundary Condition Treatment in 2X2 Systems of Propagation Equations," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol.42, pp.647-666.

[5] 1984, Osiadacz, A., "Simulation of Transient Gas Flows in Networks," *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol.4, pp.13-24.

[6] 2006, Columbo, R.M. and Garavello, M., "A well-posed Riemann problem for the p-system at a junction," *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.1, pp.495-511.

[7] 2004, Zhao, M. et al., "Godunov-Type Solutions for Water Hammer Flows," *J. Hydraulic Engineering*, Vol.130, pp.341-348.

[8] 2001, Bassett, M.D. et al., "Calculation of steady flow pressure loss coefficients for pipe junctions," *J. Mechanical Engineering Science*, Vol.215, pp.861-881.

[9] 2005, Oka, K. and Ito, H., "Energy Losses at Tees With Large Area Ratios," *J. Fluid Engineering*, Vol.127, pp.110-116.

[10] 2003, Kim, S.S. et al., "Cures for the shock instability: Development of a shock-stable Roe scheme," *J. Computational Physics*, Vol.185, pp.342-374.

[11] 1990, Hirsch, C., *Numerical computation of internal and external flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Vol.2, Wiley, NewYork.