論文

충격파 영역에서의 AUSM 계열 수치기법의 단조성에 관한 연구

김규홍*, 이경태*, 김종암**, 노오현**

A Study of Monotonic Characteristics of AUSM-type Schemes in Shock Regions

Kyu-Hong Kim*, Kyung-Tae Lee*, Chongam Kim** and Oh-Hyun Rho**

ABSTRACT

The monotonic characteristics of AUSM-type schemes are proven by mathematics and numerics. Qualitatively well-known characteristics are quantified by mathematics and the magnitude of oscillatory behaviors of each schemes could be compared directly. Moreover, it is also studied how the sonic transition position affects the oscillation in capturing the shocks. Lastly M-AUSMPW+, the latest improved AUSM-type scheme, is shown to have monotonic characteristics through all shock conditions.

초 록

AUSM계열 수치기법이 가지는 진동현상에 대해 수학적, 수치적 방법을 이용하여 이를 증명하였다. 이제까지 정성적으로 알려진 내용을 수학적 방법을 통해 정량화하여, 각 수치기법의 진동 크기에 대한 직접적인 비교를 수행하였다. 음속천이점 위치에 따른 각 수치기법의 특성을 파악할 수 있고 M-AUSMPW+수치기법은 전 마하수 영역에 걸쳐 단조성을 유지하면서 충격파를 포착하는 것을 확인할 수 있었다.

Key Words : AUSMPW+, speed of sound(음속), accuracy(정확성), Prandtl relation(Prandtl 관계식), oblique shock(경사충격파)

Ⅰ. 서 론

수치기법의 단조성에 대한 연구는 수치기법 개발에 있어 주요 관심사 중의 하나다. 연속적으로 변하는 영역을 수치해석을 하는 것은 수치적 안정성 측면에서 볼 때 별 어려움 없이 계산이 가능하다. 그러나 충격파와 같은 불연속면을 수치적으로 표현하게 되면 진동현상과 같은 수치적으로 불안정한 모습이 나타나게 되어 계산을 수행하는데 많은 어려움이 있다. 이러한 불연속면을 포착하는데 있어 중요한 것은 강건하면서도 수치진동현상 없이 단조성을 유지하면서 동시에 정확하게 포착할 수 있느냐는 것이다. 충격파 불연속면 포착시 여러 수치기법들이 보여주는 특징을 간략히 소개하면 다음과 같다. FVS계열의 수치기법은 positivity조건을 만족시킴과 동시에 단조성을 유지하기 때문에 강건성과 단조성 면에서는 만족할 만한 결과를 보여 준다.[1] 그러나 제어면 좌우 유동 상태간의 정보 교환이 전혀 이루어지지 않기 때문에 음속천이점의 위치에 대한 정보가 전혀 없고 음속천이점이 제어면 위에 위치하더라도 이를 인식하지 못하고 충격파를 퍼뜨리는 등 정확성에 문제를 나타낸다. AUSM계열 수치기법의 경우, 모든 AUSM계열 수치기법은 advection 성질을 공유하고 있으며 이러한 advection성질은 접촉불연속면을 정확히 포착할

† 2001년 8월 9일 접수 ~ 2001년 10월 5일 심사완료
* 정회원, 세종-록히드마틴 우주항공연구소
연락저자, E-mail : aerocfd1@sejong.ac.kr
서울시 광진구 군자동 98번지
** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

수 있어 점성 유동 계산시 정확한 결과를 제공한다는 장점이 있으나 충격파를 포착할 때에는 단조성을 잃어버리는 결과를 초래하여 충격파 영역에서 진동현상을 보여 주는 문제점이 있다.

AUSM수치기법은 positivity조건을 만족시키기 때문에 강건성에서는 문제가 없으나 단조성을 만족시키지 못한다는 문제가 있다. 또한 FVS와 마찬가지로 음속천이점에 대한 정보가 전혀 없기 때문에 정확성 면에서도 단점을 가지고 있다. AUSM+[2]는 충격파 포착시 AUSM수치기법의 정확성을 향상시킨 수치기법으로 음속천이점에 대한 정보를 제공함으로써 음속천이점이 제어면 위에 있는 경우에는 물리현상을 정확하게 반영할 수 있어 수치진동 없이 충격파 포착이 가능하다. 그러나 음속천이점이 제어면 위에 존재하지 않을 경우 항상 진동현상을 나타내는 문제점이 있고 더욱이 기존의 AUSM에 비해 진동이 커진 것을 볼 수 있다. 이러한 진동현상을 해결하기 위해 개발된 AUSMPW+[3][4]는 유동상태에 따라 수치진동의 원인중의 하나인 advection성질을 조절하는 수치기법이다. 기존의 AUSM 계열 수치기법은 충격파 불연속면과 접촉불연속면을 구분해 줄 수 있는 유동정보가 전혀 없기 때문에 충격파나 접촉불연속면에서의 각각에 알맞은 수치점성이 적용되지 못해 진동현상을 유발하였으나 AUSMPW+수치기법에서는 압력가중함수를 도입함으로써 이를 해결할 수 있었다. 그러나 AUSMPW+ 수치기법 역시 충격파 불연속면에서 음속천이점 위치에 따라 약간의 진동현상을 보여주는 문제점을 안고 있다. 이는 AUSMPW+에서 사용된 음속은 제어면이 아음속에 위치해 있는지 혹은 초음속에 위치해 있는지에 대한 정보는 주지만 음속천이점이 제어면과 어느 정도 떨어져 있는지에 대한 정보가 부정확하기 때문에 생긴 결과이다. 유동이 제어면 왼쪽으로부터 불어온다고 했을 때 음속천이점이 제어면 오른쪽에 있을 경우 즉, 제어면은 초음속 상태로, 여기서는 정확한 플럭스량을 구할 수 있으나 제어면 왼쪽에 있을 경우 제어면은 아음속 영역에 존재하게 되고 플럭스 양에 따라 진동현상이 나타나게 된다. M-AUSMPW+는 음속천이점 위치에 따라 지배방정식으로부터 적절한 수치점성 양을 계산함으로써 진동현상을 제거한 수치기법이다. 본 논문에서는 AUSM계열 수치기법들의 단조성에 대해 수학적 수치적 방법을 통해 증명하고자 하였고 AUSM계열 수치기법이 단조성을 유지하기 위한 조건들에 대한 분석을 토대로 AUSMPW계열 압력가중함수에 대한 타당성에 대해 설명할 것이다.

II. 각 수치기법의 단조성 증명

AUSM계열 수치기법을 이용한 제어면에서 플럭스는 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\boldsymbol{F}_{\frac{1}{2}} = \overline{M_L^+} c_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Phi}_L + \overline{M_L^-} c_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Phi}_R + P_L^+ \boldsymbol{P}_L + P_R^- \boldsymbol{P}_R$$

아래첨자 L,R은 제어면을 기준으로 좌우 물성치를 나타내고 위첨자 +와 - 는 물성치 전달방향을 의미한다.

1) AUSM+

i) $m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- \geq 0$

$$\begin{aligned} \overline{M_L^+} &= M_L^+ + M_R^-, \\ \overline{M_R^-} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ii) $m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- < 0$

$$\begin{aligned} \overline{M_L^+} &= 0, \\ \overline{M_R^-} &= M_R^- + M_L^+, \end{aligned}$$

마하수 분할 함수와 압력 분할 함수는 다음과 같다.

$$M^{\pm} = \begin{cases} \pm\frac{1}{4}(M\pm1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2-1)^2, & |M|\leq 1 \\ \frac{1}{2}(M\pm|M|), & |M|>1 \end{cases} \tag{2}$$

$$P^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{4}(M\pm1)^2(2\mp M) \pm \frac{3}{16}M(M^2-1)^2, & |M|\leq 1 \\ \frac{1}{2}(1\pm sign(M)), & |M|>1 \end{cases} \tag{3}$$

그리고 좌우 마하수는 AUSM계열의 수치기법과 같이 다음과 같이 정의된다.

$$M_{L,R} = \frac{U_{L,R}}{c_{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

제어면에서의 음속은 다음과 같이 정의된다.

$$c_{\frac{1}{2}} = \min\left(\frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)}, \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)}\right)$$

여기서, critical 음속은 $c^* = \sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma-1)}H}$이다.

2) AUSMPW+ 과 M-AUSMPW+

i) $m_{\frac{1}{2}} \geq 0$

$$\begin{aligned} \overline{M_L^+} &= M_L^+ + M_R^- \cdot [(1-\omega)\cdot(1+f_R) - f_L], \\ \overline{M_R^-} &= M_R^- \cdot \omega \cdot (1+f_R) \end{aligned} \tag{5}$$

ii) $m_{\frac{1}{2}} < 0$

$$\overline{M_L^+} = M_L^+ \cdot \omega \cdot (1+f_L)$$
$$\overline{M_L^-} = M_L^- + M_R^+ \cdot [(1-\omega)\cdot(1+f_L) - f_R],$$

압력가중함수 f와 w는 다음과 같다.

$$\omega(p_L, p_R) = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right) \tag{6}$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right) \times \min\left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_l, p_R)}\right), \quad p_s \neq 0$$

여기서 $p_s = P_L^+ p_L + P_R^- p_R$. [3]

마하수 분할 함수와 압력 분할 함수는 다음과 같다.

$$M^{\pm} = \begin{cases} \pm\frac{1}{4}(M\pm 1)^2, & |M| \le 1 \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|) & |M| > 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$P^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{4}(M\pm 1)^2(2\mp M), & |M| \le 1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm sign(M)), & |M| > 1 \end{cases} \tag{8}$$

AUSMPW+

AUSMPW+의 음속은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \frac{1}{2}(U_L + U_R) > 0 : \ c_{\frac{1}{2}} = \frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)} \\ &\text{ii)}\ \frac{1}{2}(U_L + U_R) < 0 : \ c_{\frac{1}{2}} = \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)} \end{aligned} \tag{9}$$

M-AUSMPW+

M-AUSMPW+에서는 진동현상을 일으키는 $M_L > 1$, $M_R < 1$, $M_L^* M_R^* < 1$ 인 제어면에서만 음속을 새롭게 정의함으로써 마하수 전 범위에 걸쳐 단조성을 확보하였다. 단조성을 만족시킬 수 있는 음속은 지배방정식을 통해 구해진다. 마하수 조건이 $M_L > 1$, $M_R < 1$이므로 제어면에서의 연속방정식과 운동량방정식은 각각

$$\rho_L u_L + \rho_R \overline{M_R^-} c_{\frac{1}{2}} = \rho_R u_R.$$

$$\rho_L u_L^2 + \rho_R u_R \overline{M_R^-} c + p_L + P_R^- p_R = \rho_R u_R^2 + p_R.$$

위 식을 정리하면

$$c_{\frac{1}{2}} = -(u_R - 2\rho_L u_L/\rho_R) + \sqrt{(u_R - 2\rho_L u_L/\rho_R)^2 - u_R^2} \tag{10}$$

$$P_R^- = 1 - \frac{\rho_L u_L (u_L - u_R) + p_L}{p_R} \tag{11}$$

그리고 압력가중함수 f와 w는 다음과 같다.

충격파 불안정정성을 제거하기 위해 pw 함수를 도입하였다.

$$pw = a\left(1 - \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\max(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}\right) \tag{12}$$

여기서 $a = \begin{cases} 1 & \frac{|V_{L\ or\ R}|}{c^*} > \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \\ 0 & elsewhere \end{cases}$로 충격파 영역에서만 1의 값을 가진다. ($|V|$는 제어면에서 속도의 크기를 나타낸다.)

$$\omega = \min\left[1, \max\left(|M_L|\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, |M_R|\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, pw\right)\right] \tag{13}$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right) \times (1 - w) \tag{14}$$

III. 충격파 주위의 물성치 진동현상 분석

Fig. 1은 수치 해석 과정에서 충격파 내부를 도식화 한 그림이다.

유동이 완전히 수렴하게 되면, 각 제어면에서의 플럭스는 모두 같게 되고 다음과 같은 식이 성립된다.

$$F_L = F_1 = F_2 = F_3 = F_R$$

이때 수렴된 해가 단조성을 유지하기 위해서는 충격파를 거치면서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

밀도: $\rho_L \le \rho_1 \le \rho_2 \le \rho_3 \le \rho_R$

압력: $p_L \le p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_R$

마하수: $M_L \ge M_1 \ge M_2 \ge M_3 \ge M_R$

우선 마하수 조건을 만족한다고 가정하면, critical 음속으로 사용한 특성마하수 역시 다음과 같이 단조성을 가진다.

$$M_L^* \ge M_1^* \ge M_2^* \ge M_3^* \ge M_R^* \tag{15}$$

어떠한 제어면에서 유동이 감속되는 경우를 생각해보면

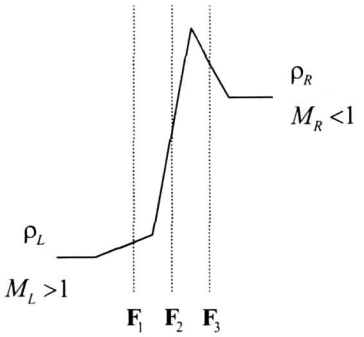

Fig. 1. 수치해석 단계에서의 충격파 내부 개략도.

$$\rho_L u_L = \rho_L \overline{M_L^+} + \rho_1 \overline{M_1^-} = \rho_1 \overline{M_1^+} + \rho_2 \overline{M_2^-}$$
$$= \rho_2 \overline{M_2^+} + \rho_3 \overline{M_3^-} = \rho_3 \overline{M_3^+} + \rho_R \overline{M_R^-} = \rho_R u_R$$

AUSM계열 수치기법의 경우 $\dfrac{\overline{M_R^+}}{\overline{M_3^+}} < 1$ 이므로

$$\rho_3 = \rho_R \frac{\overline{M_R^+}}{\overline{M_3^+}} < \rho_R \ , \ \rho_3 < \rho_R$$

그리고

$$\rho_2 \overline{M_2^+} + \rho_3 \overline{M_3^-} = \rho_3 u_3 + \left(\rho_R \overline{M_R^-} + \rho_3 \overline{M_3^-}\right) < \rho_3 u_3$$

$$\rho_2 < \rho_3 \frac{\overline{M_3^+}}{\overline{M_2^+}} < \rho_3$$

같은 방법으로

$$\rho_1 < \rho_2 \ , \ \rho_L < \rho_1$$

그러므로

$$\rho_L \le \rho_1 \le \rho_2 \le \rho_3 \le \rho_R$$

마지막 방정식으로부터

$$\rho_L \overline{M_L^-} = 0 = \rho_1 \overline{M_1^-} \ \ (\because M_L > 1) \rightarrow \overline{M_1^-} = 0 \qquad (16)$$

여기서 식(16)은 밀도의 단조성을 만족시키기 위한, 수렴해를 가지기 위한 필요조건이다. 식(16)을 만족시키기 위해서는 셀 1에서의 마하수가 $M_1 > 1$이거나 마하수 분할 함수 자체가 $M_1 = 0$이어야 한다. AUSM+, AUSMPW+과 M-AUSMPW+ 수치기법에서는 $M_1 > 1$인 경우에 대해서 당연히 $\overline{M_1^-} = 0$을 만족시키고 $M_1 < 1$인 경우라 할지라도 제어면에서 Prandtl관계식을 이용하기 때문에 $\overline{M_1^-} = 0$을 만족시킨다. van Leer의 경우 $M_1 > 1$인 경우에 대해서 당연히 $\overline{M_1^-} = 0$을 만족시키나 $M_1 < 1$인 경우 $\overline{M_1^-} < 0$이기 때문에 이러한 경우는 수렴해가 존재하지 못하고 $M_1 > 1$의 값을 가지는 해로 수렴하게 된다. 이런 이유로 2개의 중간 셀을 거쳐 충격파가 포착되는 결과를 초래하여 정확성 측면에서 M-AUSMPW+에 비해 부정확한 결과를 나타내게 된다.

압력의 경우를 살펴보면, 수치결과 역시 각 셀에서 상태 방정식을 만족하므로 $p = \rho \frac{\gamma - 1}{2\gamma}[2H - (M^* c^*)^2]$ 이고, 밀도와 마하수 부등식으로 부터

$$p_L \le p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_R.$$

그러므로 FVS나 AUSM형태를 가지는 수치기법에서 마하수가 단조성을 가진다는 것은 모든 물성치가 단조성을 가짐을 의미한다.

마하수의 단조성을 이용하여 AUSM+, AUSMPW+와 M-AUSMPW+수치기법의 단조성을 살펴보자.

일반적으로 엔탈피가 보존되는 FVS형태의 수치기법을 적용하여 제어면에서 플럭스를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
F_L &= U_L \Phi_L + P_L \\
F_1 &= \overline{M}_{LL} c_{LL} \Phi_L + \overline{M^-}_{1R} c_{1R} \Phi_1 + P_L + P^-_{1R} P_1 \\
F_2 &= \overline{M^+}_{1L} c_{1L} \Phi_1 + \overline{M^-}_{2R} c_{2R} \Phi_2 + P_{1L}^+ P_1 + P_{2R}^- P_2 \\
F_3 &= \overline{M^+}_{2L} c_{2L} \Phi_2 + \overline{M^-}_{RR} c_{RR} \Phi_R + P_{2L}^+ P_2 + P_{RR}^- P_R \\
F_R &= U_R \Phi_R + P_R
\end{aligned} \qquad (17)$$

수렴해가 존재한다고 가정하면, 각 제어면에서의 플럭스는 모두 같게 된다.

i) $F_1 = F_2$

mass flux :

$$\rho_1(\overline{M^+}_{1L} c_{1L} - \overline{M^-}_{1R} c_{1R}) + \rho_2 \overline{M^-}_{2R} c_{2R} - \rho_L M_{LL} c_{LL} = 0$$

momentum flux :

$$f_{12} = \rho_1 M_1^* c^* (\overline{M^-}_{1L} c_{1L} - \overline{M^-}_{1R} c_{1R}) + \rho_2 M_2^* C^* \overline{M^-}_{2R} c_{2R}$$
$$- \rho_L M_L^* C^* M_{LL} c_{LL} + p_1 (P^+_{1L} - P^-_{1R}) + p_2 P^-_{2R} - p_L$$
$$= 0$$

energy flux :

$$\rho_1 H_1 (\overline{M^+}_{1L} c_{1L} - \overline{M^-}_{1R} c_{1R}) + \rho_2 H_2 \overline{M^-}_{2R} c_{2R}$$
$$- \rho_L H_L M_{LL} c_{LL} = 0$$

ii) $F_2 = F_3$

mass flux :

$$\rho_2(\overline{M^+}_{2L} c_{2L} - \overline{M^-}_{2R} c_{2R}) + \rho_R \overline{M^-}_{RR} c_{RR} - \rho_1 \overline{M^+}_{1L} c_{1L} = 0$$

momentum flux :

$$f_{23}=\rho_2 M_2^* c^*(\overline{M^-}_{2L}c_{2L}-\overline{M^-}_{2R}c_{1R})+\rho_R M_R^* C^* \overline{M^-}_{RR}c_{RR}$$
$$-\rho_1 M_1^* C^* M_{1L}c_{1L}+p_2(P^+_{2L}-P^-_{2R})+p_R P^-_{RR}-p_L P^+_{1L}$$
$$=0$$

energy flux :

$$\rho_2 H_2(\overline{M^+}_{2L}c_{2L}-\overline{M^-}_{2R}c_{2R})+\rho_R H_R \overline{M^-}_{RR}c_{RR}$$
$$-\rho_1 H_1 \overline{M^+}_{1L}c_{1L}=0$$

연속방정식을 연립하여 밀도를 구해보면 다음과 같다.

$$\rho_1=\frac{\left(\rho_L M_{LL}c_{LL}+\dfrac{\rho_R \overline{M^-}_{RR}c_{RR}\overline{M^-}_{2R}c_{2R}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L}-\overline{M^-}_{2R}c_{2R}}\right)}{\left(\dfrac{\overline{M^+}_{1L}c_{1L}\overline{M^+}_{2L}c_{2L}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L}-\overline{M^-}_{2R}c_{2R}}-M^-_{1R}c_{1R}\right)}$$

$$\rho_2=\frac{\rho_1 \overline{M^+}_{1L}c_{1L}-\rho_R \overline{M^-}_{RR}c_{RR}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L}-\overline{M^-}_{2R}c_{2R}}$$

mass flux와 energy flux를 연립하여 전엔탈피를 구해보면,

$$H_L=H_1=H_2=H_R$$

임을 알 수 있다. 식(17)로 표현되는 모든 FVS형태의 수치기법은 충격파를 통해 전엔탈피를 보존하는 것을 알 수 있다.

마지막으로 상태방정식으로부터 압력을 구해보면,

$$p_1=\rho_1\frac{\gamma-1}{2\gamma}[2H_1-(M_1^* c^*)^2]$$
$$p_2=\rho_2\frac{\gamma-1}{2\gamma}[2H_2-(M_2^* c^*)^2]$$

이다.

최종적으로 함수 f_{12}와 f_{23}을 살펴보면, 셀 1의 속도를 파라메터(parameter)로 한 셀 2의 속도에 대한 함수임을 알 수 있다.

즉, $f_{12}=f_{12}(U_2)=0$, $f_{23}=f_{23}(U_2)=0$.

각 수치기법에 대해 위 방정식의 해가 단조성을 가지는 마하수 조건을 만족하게 되면 수치기법은 충격파 포착시 단조성을 유지하게 된다. 위 식은 에 대해 외재적으로 표현이 불가능하기 때문에 수치적으로 해를 구하였다.

AUSM+

i) $1\le M_1<M_L$

$$c_{LL}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_L^*},\quad c_{1L}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_1^*},\quad c_{2L}=c_{RR}=c^*$$
$$M_{ij}=\frac{U_i}{c_{ij}}$$

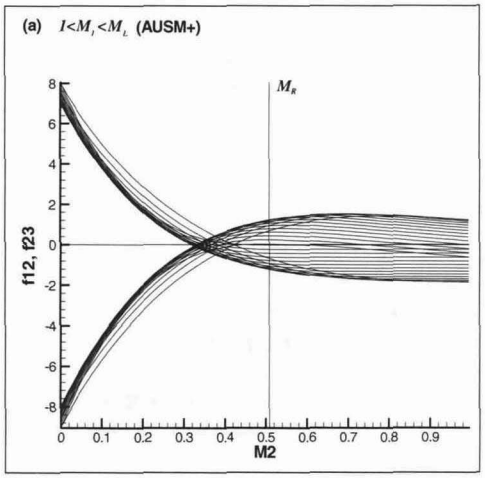

Fig. 2(a). AUSM+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3, 1<M_1<M_L$)

AUSM+의 $\overline{M^\pm}_{L,R}$와 $P^\pm_{L,R}$는 식(1)로 주어진다.

ii) $M_R\le M_1<1$

$$c_{LL}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_L^*},\quad c_{1L}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_1^*},\quad c_{2L}=c_{RR}=c^*$$
$$M_{ij}=\frac{U_i}{c_{ij}}$$

Fig. 2는 AUSM+ 수치기법 분석 결과이다. 함수 f_{12}과 f_{23}과 0과 만나는 점이 즉, $f_{12}=f_{12}(U_2)=0$, $f_{23}=f_{23}(U_2)=0$의 해가 셀 2에서의 마하수이다. 셀 2에서의 마하수가 M_R보다 작은 경우는 충격파를 지난 뒤 과도하게 압축된 경우로 식(15)로 주어진 단조성 조건을 만족하지 못하는 해이다.

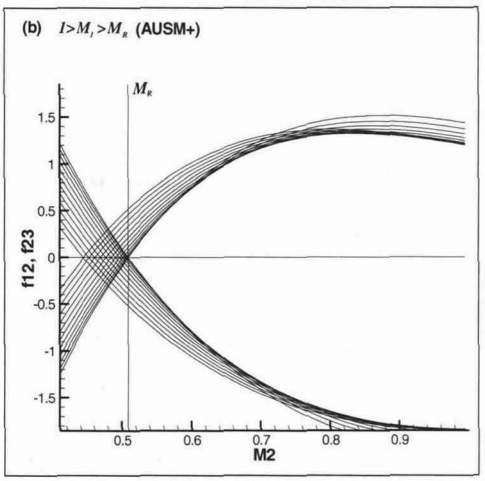

Fig. 2(b). AUSM+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3, 1>M_1>M_R$)

M_R보다 큰 경우는 물성치 진동현상 없이 단조성을 가지고 충격파를 포착함을 의미한다. AUSM+수치기법의 경우 M_1이 M_L과 같을 경우 즉, 음속천이점이 정확하게 $i+\frac{3}{2}$ 제어면 위에 위치해 있을 경우만 $M_2=M_R$이고 다른 모든 경우에 대해서는 모두 M_R보다 작은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 특히 $1<M_1<M_L$인 경우, 진동현상이 매우 심한 수렴해를 보여준다. Fig. 2(b) 역시 M_1이 M_R과 같을 경우 즉, 음속천이점이 정확하게 $i+\frac{1}{2}$ 제어면 위에 위치해 있을 경우만 $M_2=M_R$이고 다른 모든 경우에 대해서는 모두 M_R보다 작은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 즉, AUSM+는 항상 진동현상을 나타낸다.

AUSMPW+

i) $1\le M_1<M_L$

$$c_{LL}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_L^*},\quad c_{1L}=c_{2R}=\frac{c^*}{M_1^*},\quad c_{2L}=c_{RR}=c^*$$

$$M_{ij}=\frac{U_i}{c_{ij}}$$

ii) $M_R\le M_1<1$

$$c_{LL}=c_{1R}=\frac{c^*}{M_L^*},\quad c_{1L}=c_{2R}=\frac{c^*}{M_1^*},\quad c_{2L}=c_{RR}=c^*$$

$$M_{ij}=\frac{U_i}{c_{ij}}$$

Fig. 3(a)에서 $1<M_1<M_L$ 경우에는 M_2이 항상 M_R보다 작은 것을 볼 수 있다. 이는 AUSMPW+ 수치기법은 위의 마하수 영역에서 단조성을 만족시키지 못한다는 것을 의미한다.

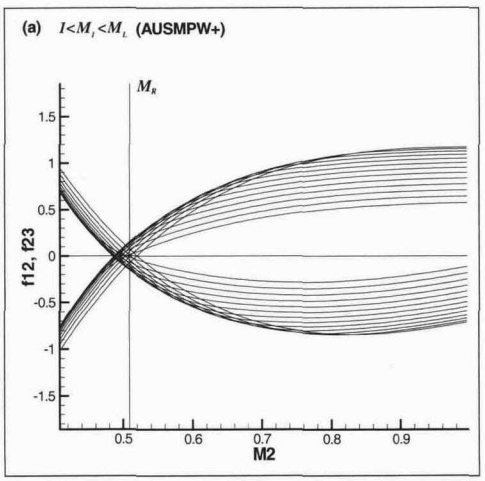

Fig. 3(a). AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3, 1<M_1<M_L$)

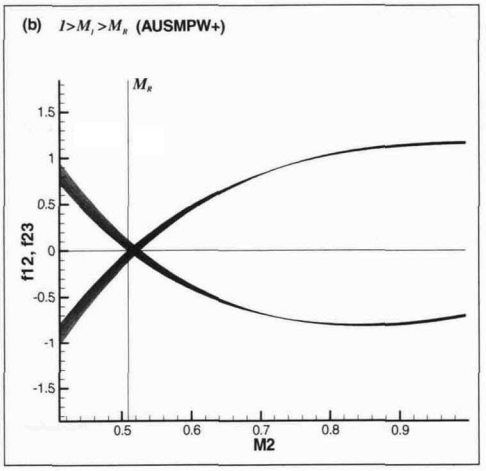

Fig. 3(b). AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3, 1>M_1>M_R$)

즉, AUSMPW+ 수치기법은 M_1이 초음속일 경우 약간의 진동현상이 존재하는 것을 알 수 있다. 다만 AUSM+ 수치기법과 비교하여 볼 때 진동현상이 매우 작은 적을 알 수 있다. 실제 AUSMPW+를 적용하는데 있어 진동현상으로 인해 수렴성에 문제를 일으킬 수도 있는 경우이다. $1>M_1>M_R$ 경우 M_2가 M_R보다 크고 이는 단조성을 만족하는 것을 알 수 있다.

M-AUSMPW+

i) $1\le M_1<M_L$

M-AUSMPW+의 각 제어면에서의 음속과 마하수는 식(10)으로부터 구해지고 $\overline{M^{\pm}}_{L,R}$와 $P^{\pm}{}_{L,R}$는 식(7), (8)과 (11)로 주어진다.

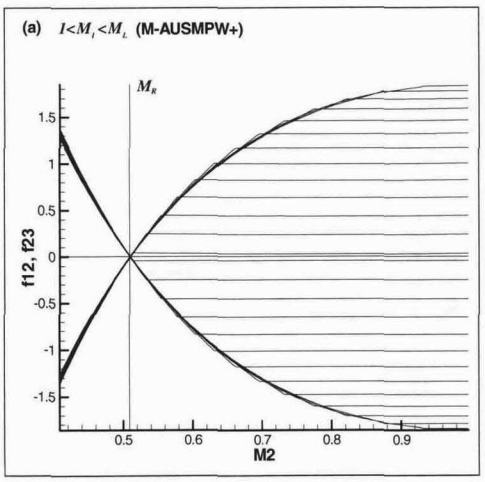

Fig. 4(a). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3,\ 1<M_1<M_L$)

ii) $M_R \le M_1 < 1$

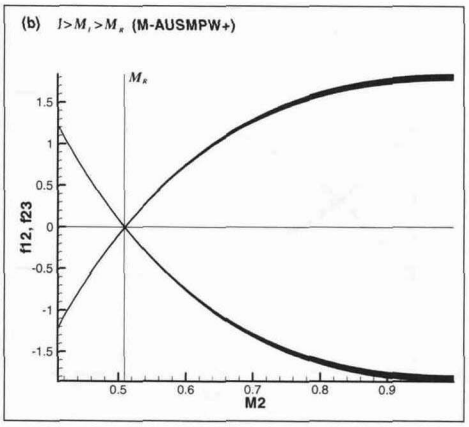

Fig. 4(b). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3$, $1>M_1>M_R$)

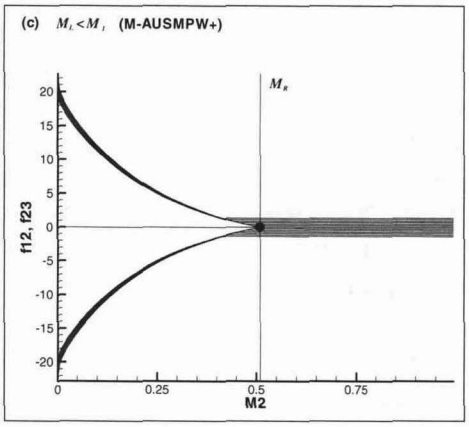

Fig. 4(c). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3$, $M_L<M_1<\infty$)

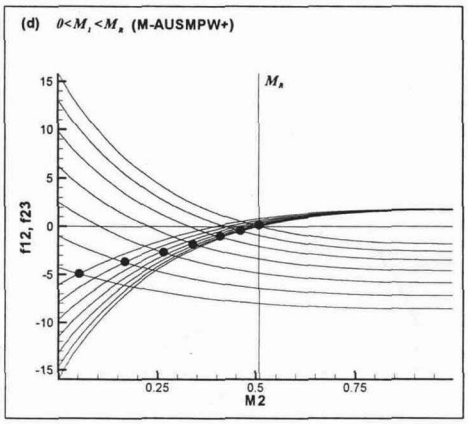

Fig. 4(d). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=3$, $0<M_1<M_R$)

Fig. 4(a)와(b)를 보면 M-AUSMPW+수치기법은 항상 M_2가 M_R보다 큰 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 4(c)을 살펴보면 $M_L<M_1<\infty$인 경우에 대해서는 함수 f_{12}과 f_{23}의 교점이 $M_1=M_R$을 제외하고는 존재하지 않는 것을 알 수 있는데 이는 $M_L<M_1<\infty$ 경우에 대해서는 수렴해가 존재하지 않는다는 것을 의미한다. Fig. 4(d)는 $0<M_1<M_R$인 경우로 함수 f_{12}과 f_{23}의 교점인 경우를 제외하고는 0 위에 있지 않다. 방정식 $f_{12}=f_{12}(U_2)=0$과 $f_{23}=f_{23}(U_2)=0$을 동시에 만족시키는 해가 존재하지 않으며, 위와 같은 조건에서는 수렴해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 4(a)에서(d)로부터 M-AUSMPW+는 충격파 의 수렴해는 $M_L>M_1$ 인 경우만 존재하며 항상 단조성을 만족하면서 충격파를 포착함을 알 수 있다.

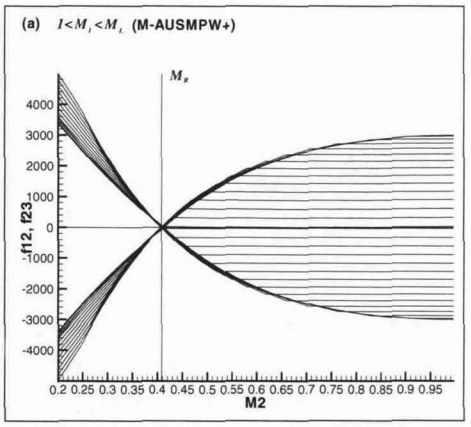

Fig. 5(a). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=\infty$, $1<M_1<M_L$)

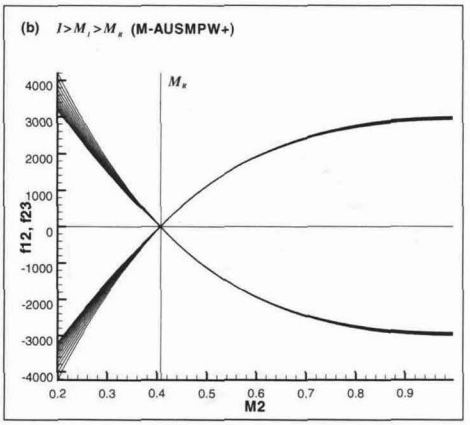

Fig. 5(b). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=\infty$, $1>M_1>M_R$)

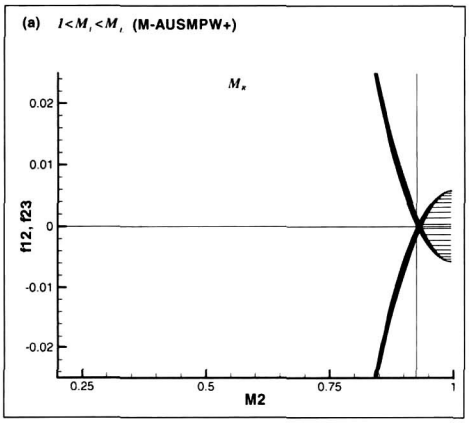

Fig. 5(c). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=1.1$, $1<M_1<M_L$)

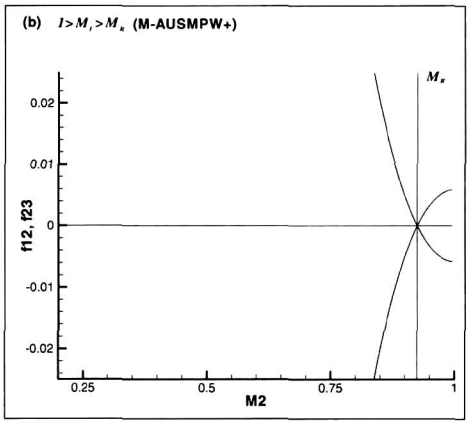

Fig. 5(d). M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23} ($M_L=1.1$, $1>M_1>M_R$)

마지막으로 M-AUSMPW+수치기법이 전 마하수 범위에 대해 단조성을 가지고 있는지 알아보면, M-AUSMPW+에서 사용된 특성마하수는 다음과 같이 마하수가 무한대가 되어도 일정한 값으로 수렴하기 때문에 수학적으로 접근하기가 용이하다.

$$M_L=\frac{u_L}{c_L}\rightarrow\infty,\ M_L^*=\frac{u_L}{c^*}\rightarrow\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$M_R=\frac{u_R}{c_L}\rightarrow\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}},\ M_R^*=\frac{u_R}{c^*}\rightarrow\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

Fig. 5(a)에서 (d)는 각각 마하수가 무한대인 경우와 마하수가 1.1인 경우이다. 마하수가 무한대일 경우에도 Fig. 5(a)와(b) 모두 단조성을 보여주는 것을 알 수 있다. 마하수가 1.1인 경우 역시 단조성을 보여줌을 알 수 있다. 위 경우 외에도 자유류 마하수에 따라 살펴보더라도 M-AUSMPW+는 단조성을 유지하면서 충격파를 포착하는 것을 확인할 수 있다.

Ⅳ. 결 론

AUSM계열 수치기법이 가지는 진동현상에 대해 수학적, 수치적 방법을 이용하여 이를 증명하였다. 정성적으로 알려진 내용을 수학적 측면에서 접근 이를 확인할 수 있었고, 각 수치기법의 진동 크기에 대한 직접적인 비교 역시 가능하였다. 이를 통해 M-AUSMPW+수치기법은 어떠한 유동 조건에서도 충격파 포착시 단조성을 유지하는 것을 확인할 수 있었다. 참고로 AUSM+는 음속천이점이 제어면 위에 있는 경우를 제외하고는 모든 경우 진동현상을 보여주었고 AUSMPW+는 음속천이점이 제어면 앞쪽에 있는 경우에 진동현상을 유발하는 것을 확인 할 수 있었다. AUSM계열 수치기법에서 advection 특성을 유지하고서는 단조성을 유지하면서 충격파를 포착하는 것이 불가능하다. 충격파 진동현상을 제거하면서 동시에 접촉불연속면을 포착하기 위해서는 단순한 마하수 분할 함수와 압력분할 함수만으로는 불가능하며 압력가중함수와 같은 유동현상에 대한 정보를 줄 수 있는 새로운 변수의 도입이 필요하고 AUSMPW+수치기법과 같이 advection성질을 유동상태에 따라 적절히 조절하는 것이 필수적이라 할 수 있다.

참고문헌

1) J. Gressier, P. Villedieu, and J-M Moshetta, Positivity of Flux Vector Splitting Schemes, *J. of Computational Physics*, **155**, 199-220 (1999).

2) M. S. Liou, A Sequel to AUSM: AUSM+, *J. of Computational Physics*, **129**, 364-382 (1996).

3) K. H. Kim, J. H. Lee, and O. H. Rho, "An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-based Weight Functions," *Computers & Fluids*, 27(3), 311-346 (1998).

4) K. H. Kim, C. Kim, and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows, PART I: AUSMPW+ Scheme," accepted to J. *of Computational Physics*, (2001).

5) H. C. Yee, G. H. Kolpfer, and J. L. Montague, High-Resolution Shock Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic

Flows, NASA TM 101088, 1989.

6) D. Hanel, R. Schwane, and G. Seider, On the Accuracy of Upwind Schemes for the Solution of the Navier-Stokes Equations, AIAA paper 87-1105-CP, 1987.

7) A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *J. of Computational Physics*, **49,** 357-393 (1983).

8) P. K. Sweby, High Resolution TVD Schemes Using Flux Limiters, *Lectures in Applied Mathematics*, **22**, 289-309 (1985).

9) P. L. Roe, A Survey of Upwind Differencing Techniques, *Lecture Notes in Physics*, **323**, 69 (1989).

10) C. Hirsh, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1,2,* (John Wiley & Sons, 1990).