

교통신호를 고려한 동적 통행배정모형의 구축 및 해석알고리즘의 개발에 관한 연구

임 용 택*
임 강 원**

〈目 次〉

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| I. 서론 | IV. 해석 알고리즘의 개발 및 평가 |
| II. Wardrop의 원리 및 통행배정모형 | V. 결론 |
| III. 신호제어를 고려한 동적 통행배정모형의 개발 및 검증 | |

I. 서론

대도시 교통혼잡이 단순히 도로용량의 부족뿐만 아니라 첨두시간대의 차량집중, 비반복적인 사고, 기후변화, 병목구간과 같은 불합리한 기하구조 등 다양한 원인에 기인하고 있기 때문에 기존의 상호 독립적인 교통공학측면의 도로개선이나 독자적인 교통수요관리 방안들은 더 이상 효과를 보지 못하고 있다. 현재 교통공학측면에서 연구되고 있는 교통운영, 관리기법들도 대부분 특정지점(point) 또는 교통축(corridor)내에서의 개선이라는 한계를 벗어나지 못하고 있으며, 전통적인 교통계획 모형들은 거시적인 수요예측부분에 치중되어 개별차량행태, 신호제어 등 미시적인 접근까지 이루어지지 않고 있는 실정이다.

현재 도시교통혼잡을 감소시키려는 교통관리방안들에는 혼잡세, 주행세를 포함한 교통수요관리(traffic demand management), 기존도로 활용과 교통신호 최적을 위한 교통운영(traffic operation) 그리고 교통정보(traffic information)의 제공 등이 있다. 교통관리모형은 교통수요예측을 주로 하는 교통계획분야와 실질적인 도로운영개선을 목표로 하는 교통공학분야를 결합하여 교통혼잡을 교통계획 및 공학적인 기법을 동원하여 관리코자 개발된 모형으로 교통혼잡을 완화시키기 위한 각종 교통정책들의 평가도구로서 개발되어 왔다. 현재까지

*서울대 대학원 환경계획학과 박사과정수료

**서울대 환경대학원 교수

이분야에 대한 연구로는 통행배정모형과 교통신호제어를 결합한 모형과 통행배정모형에 교통정보를 결합한 모형들이 연구되고 있는데, 실시간적인 동적통행배정과 대응신호제어 그리고 정보제공을 포함한 네트워크 차원의 동적 교통관리모형에 대한 연구는 이제 시작단계에 들어서고 있다.

본 연구에서는 교통정보와 신호제어를 결합한 동적 교통관리모형(dynamic traffic management model)을 개발하기 위한 기초 연구로서 신호제어와 통행배정을 결합한 동적 통행배정모형을 구축하고 이를 해석하기 위한 알고리즘을 개발하며 이를 검증하는데 주 목적이 있다. 개발되는 결합모형은 신호제어를 고려한 일별(day-to-day) 및 하루중(within-day) 동적 통행배정모형으로 개발모형이 Wardrop의 균형상태와 동등(equivalence)한지를 수학적으로 증명한다. 또한 개발된 모형식을 해석하기 위하여 Frank-Wolfe 알고리즘을 수정한 대각화 알고리즘(Diagonalized Algorithm)을 개발하고 개발된 알고리즘이 Wardrop의 균형해에 도달하는지를 단순 가로망을 대상으로 분석코자 한다.

본 연구는 제2장에서 본 연구의 기초가 되는 Wardrop의 균형원리 및 모형의 구축에 대한 기존 연구를 살펴보고 제3장에 교통신호를 고려한 동적통행배정모형을 구축한 후 이를 검증한다. 제4장에서는 구축된 모형을 해석하기 위한 해석알고리즘을 개발하고 이를 평가하며 마지막 장에서 본 연구의 성과를 정리한다.

Ⅱ. Wardrop의 원리 및 통행배정모형

1. Wardrop의 균형원리

Wardrop(1952)은 교통혼잡을 고려한 운전자의 통행원리로 사용자균형(User Equilibrium)과 체계최적(System Optimality)이라는 2가지의 균형통행배정 원리를 다음과 같이 제시하였다.

사용자 균형원리(User Equilibrium Principle)

사용자가 실제로 선택한 모든 경로의 통행시간은 모두 동일하며, 아직 사용되지 않은 어떤 경로의 통행시간보다 크지 않다.

체계최적원리(System Optimality Principle)

선택된 경로의 총통행비용의 합은 최소이다.

여기서 체계최적상태로 배정된 통행량은 자신의 통행시간 뿐만아니라 자신으로 인해 발생하는 타인의 추가 통행시간을 포함하여 배정되기 때문에 사회적 균형상태(social equilibrium)를 나타내게 된다. 위 Wardrop의 원리는 현재까지 통행배정모형의 근간을 이루며 발전되어

오고 있다.

2. 통행배정모형

Wardrop의 균형원리를 수학적으로 풀기 위하여 동등수리최소화문제, 변동부등모형식 등으로 모형이 구축되어 왔다.

2.1 동등 수리최소화 문제(equivalent mathematical minimization program)

Beckmann(1956)은 Wardrop의 원리를 다음과 같은 동등 수리최소화 문제(mathematical minimization program)로 모형화하였다. 이 모형식은 통행비용함수가 비감소(nondecreasing), 분리(seperable)이며 통행비용함수의 야코비안 행렬식(jacobian matrix)이 대칭(symmetric)이라는 가정 하에 Wardrop의 원리와 일치함을 증명하였다.

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw & (1) \\ s.t. & \\ \sum_K f_{rs}^k &= q_{rs} \\ f_{rs}^k &\geq 0 \quad \forall k, r, s \\ x_a &= \sum_{r,s,k} f_{rs}^k \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \end{aligned}$$

여기서, $t_a(x_a)$ 는 링크 a 의 통행비용을 나타내며, f_{rs}^k 는 기종점 r, s 간 k 경로의 통행량을, x_a 는 링크 a 의 통행량을 각각 나타낸다. 또 $\delta_{a,k}^{rs}$ 는 경로 k 가 기종점 r, s 에 속하면 1, 그렇지 않으면 0인 가변수(dummy variable)를 표시한다.

2.2 변동부등식(Variational Inequality)

동등 수리최소화 문제는 앞에서 살펴본 바와 같이 통행비용함수가 분리(seperable)하며 대칭(symmetric)인 경우에 한하여 적용할 수 있다. 그러나 통행비용함수를 1차 편미분한 야코비안 행렬(jacobian matrices)이 비분리(non-seperable), 비대칭(asymmetric)인 아래와 같은 경우,

$$\frac{\partial t_a(x)}{\partial x_b} \neq \frac{\partial t_b(x)}{\partial x_a}, \quad \forall a \neq b \quad (2)$$

즉 통행비용이 자신의 링크 뿐만 아니라 다른 링크의 통행량에도 영향을 받는 경우에는 Beckmann의 수학모형식과 같은 동등수리모형(equivalent mathematical program)이 존재하지 않게 된다(Abdulaal & LeBlanc, 1979; Sheffi, 1985). Smith(1979)와 Dafermos(1980)는 이를 해결하기 위하여 Wardrop의 원리를 일반화시킨 변동부등식

(Variational Inequality)을 식 (3)과 같이 제시하였다.

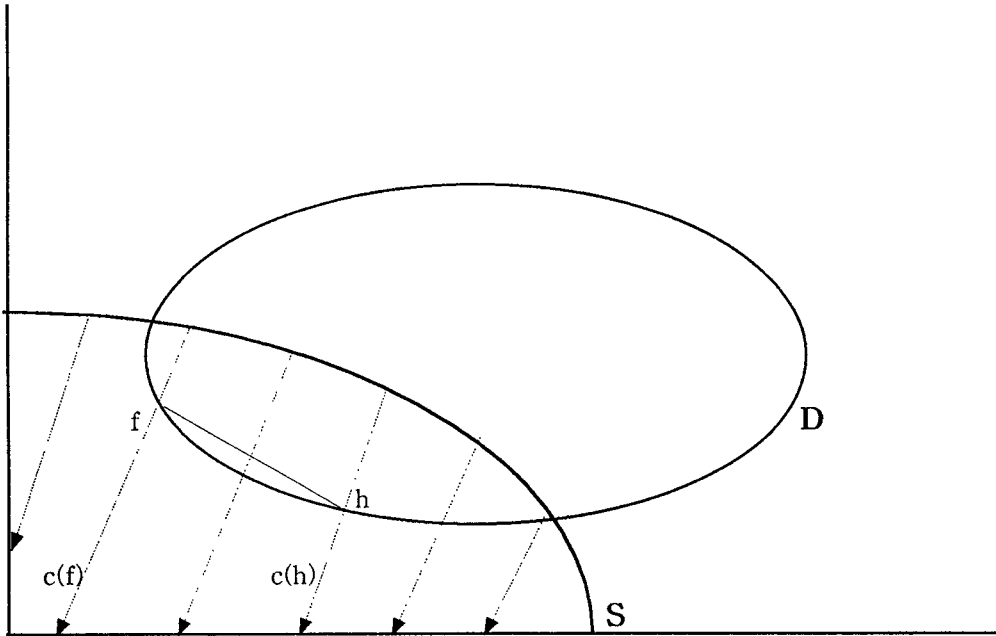
$$-c(h) \cdot (f - h) \leq 0 \quad \text{for all } f \in D \tag{3}$$

여기서 $-c(h)$ 는 균형 링크통행량(equilibrium link flow) h 의 링크 통행비용함수를 나타내며 f 는 가능 링크통행량(feasible link flow)이다. Smith(1979)는 Wardrop의 사용자 균형상태(User Equilibrium)가 위 변동부등식(Variation Inequality)과 동등(equivalency)함을 증명하였다.

위 관계를 그림으로 나타내면 <그림 1>과 같다. 여기서 h 는 Wardrop의 균형 통행량을 나타낸다. 그림에서 가능해(feasible solution) $f \in D$ 에 존재하게 되며, $-c(h)$ 는 통행비용을 최소화시키려는 힘의 방향(사회적인 힘)을 나타낸다. 가능해 f 가 Wardrop의 균형해 h 에 도달하게 되면, $-c(h)$ 는 h 에 수직하게 되어 가능해 f 가 더 이상 움직이지 않는 균형상태가 된다. 즉, $-c(h) \cdot (f-h)=0$ 이 된다.

한편, Vliet(1987)은 비분리(non-separable), 대칭(symmetric)인 경우의 변동부등식과 Beckmann의 최소화 수리모형식이 동등함을 보였다.

이외에 Nonlinear Complementary모형식으로 Wardrop의 원리를 모형화한 연구도 있다. 본 연구에서는 링크 통행비용함수내에 인접 접근로의 통행량의 영향을 고려하는 신호요소(녹색시간)가 고려되기 때문에 통행비용함수의 1차 미분행렬식이 비대칭(asymmetric)이 된



<그림 1> Wardrop의 균형상태

다. 따라서 변동부등식(Variational Inequality)으로 모형을 구축한다.

3. 해의 존재(existence of equilibrium)

구축된 모형이 균형해(equilibrium solution)가 존재하는 조건으로 Smith(1979)는 다음과 같이 정리하였다.

Let $c:S \rightarrow R^m$ be continuous and let D be a closed convex subset of R^m . Further, let $D \subseteq S$. Then there is a Wardrop equilibrium $h \in D \cap S$.

비용함수가 연속적이며 가능영역(feasible region)이 비어 있지 않고 콤팩트(compact) 있고 볼록집합(convex set)이면 Wardrop의 해가 존재한다.

즉, 제약조건으로 주어지는 가능영역(feasible region)이 볼록(convex)하고 비용함수가 단조 증가(monotonously increasing)하면 유일한 Wardrop의 균형해가 존재하게 된다.

Ⅲ. 신호제어를 고려한 동적 통행배정모형의 개발 및 검증

본 장에서는 신호제어를 고려한 일별(day-to-day) 및 하루중(within-day)통행배정모형을 개발하고 개발한 모형들이 Wardrop의 균형상태와 동등(equivalence)함을 증명하며 해의 존재에 대하여 검토코자 한다.

1. 일별(day-to-day) 동적 통행배정모형의 구축

일별 통행배정모형은 하루 하루의 통행패턴의 변화를 반영하는 모형으로 본 연구에서는 교통신호를 고려한 동적모형을 다음과 같이 변동부등식(Variational Inequality)으로 구축한다.

$$T_a(f^{d*}, \lambda^d) \cdot (f^d - f^{d*}) \geq 0$$

$$f^{d*} \in S \cap D, \quad f^d \in D \tag{4}$$

여기서, $T_a(f^{d*}, \lambda^d)$ 는 링크 a 의 d 일 균형통행량 f^{d*} 와 녹색시간비 λ^d 로 결정되는 통행비용 함수이며, S, D 는 각 공급(supply)과 수요(demand)의 강볼록 가능집합(strictly convex feasible sets)을 나타낸다.

본 모형에서 고려해야할 제약조건을 살펴보면 다음과 같다.

$$f_a^d = \sum_{r,s,p} h_p^{rs} \alpha_{a,p}^{rs} \quad \forall a$$

$$q_{rs}^d = \sum_p h_{rs}^p$$

$$h_{rs}^p \geq 0 \quad \forall p, r, s$$

$$\lambda_{\min}^d \leq \lambda_a^d \leq \lambda_{\max}^d$$

$$\lambda_a^d = \frac{g_a}{C - L}$$

여기서, h_p^{rs} 는 기종점 r, s 간의 경로 p 의 통행량을 나타내며 α_{ap}^{rs} 는 경로 p 가 링크 a 를 통과하면 1, 그렇지 않으면 0인 가변수이고, q_s^d 는 d 일 r, s 간의 O/D 통행량을 나타낸다. λ_a^d 는 링크 a 의 녹색시간비로 최소녹색시간비(λ_{\min}^d)와 최대녹색시간비(λ_{\max}^d) 사이의 값을 갖으며 C 는 신호주기, L 은 손실시간을, g_a 는 링크 a 의 녹색시간을 나타낸다.

동등조건(Equivalence Condition)

앞에서 구축한 일별 변동부등식(식4)이 Wardrop의 균형상태와 동등(equivalency)함을 보이기 위하여 Smith(1979)의 방법을 이용한다.

먼저, 일별 Wardrop균형상태를 다음과 같이 정의한다

(일별 Wardrop균형상태)

모든 OD쌍과 모든 날에 대하여 비용이 많이 소요되는 경로는 사용되지 않는다.

For each OD pair and each day d, more costly routes are not used

위 정의는 Smith(1993)의 동적 사용자 균형상태의 정의와 개념적으로 동일하다. 이를 수학적으로 표현하면,

$$\bar{T}_r(F^{d*}, \lambda^d) > \bar{T}_s(F^{d*}, \lambda^d) \text{ 이면 } F_r^d = 0 \tag{5}$$

여기서, $T_r(F^d, \lambda^d)$ 는 d 일 경로 r 의 통행량 F^d 와 녹색시간비 λ^d 로 결정되는 경로 통행비용을 나타내며, F_r^d 는 경로 r 의 통행량이다.

경로통행량 F^{d*} 를 Wardrop의 균형 경로통행량이라고 가정하면, $T(F^{d*}, \lambda^d)$ 는 F^{d*} 와 λ^d 에 의해 결정되는 최소경로비용이 되며, Wardrop의 원리에 따라 균형상태에서 경로를 변경하여 총통행비용을 감소시킬 수 없기 때문에 총통행비용은 다음 조건을 만족하게 된다.

$$\bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) \cdot F^d \geq \bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) \cdot F^{d*} \quad \text{for all } F^d \in D \tag{6}$$

반대로, 위의 Wardrop 조건식(4)을 만족하지 않는 경우를 살펴보면,

$$F_r^d > 0 \quad \text{and} \quad \bar{T}_r(F^{d*}, \lambda^d) > \bar{T}_s(F^{d*}, \lambda^d)$$

이 경우 route r 의 통행량 F_r^d 는 경로비용이 적은 route s 로 이동하게 되어 총통행비용은,

$$\bar{T}_r(F^{d*}, \lambda^d)F_r^d - \bar{T}_s(F^{d*}, \lambda^d)F_r^d > 0 \quad \text{만큼 감소하게 된다.}$$

따라서, route r 에서 route s 로 이동되어 결과적으로 도출된 route-flow를 F^d 라고하면

$$\bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) F^{d*} > \bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) F^d \quad \text{and } F^d \in D \text{ 이 된다.}$$

그러나 위식은 식(6)을 만족하지 않는다.

그러므로 식(5)을 만족하면 식(6)을 만족하고 식(5)을 만족하지 않으면 식(6)을 만족하지 않게 된다. 따라서, 식(5)과 식(6)은 동등(equivalence)함을 알 수 있다. 즉, 식(6)도 Wardrop의 균형조건을 나타내고 있다.

식(6)은 다음과 같이 변경할 수 있는데,

$$-\bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) \cdot (F^d - F^{d*}) \leq 0 \quad \text{for all } F^d \in D \quad (7)$$

이때 식(7)을 route차원의 변동부등식(Variational Inequality)라고 하며, Wardrop의 균형조건과 일치하게 된다.

위 변동부등식을 링크차원으로 변경하기 위하여 route flow F^d , F^{d*} 와 route cost $T(F^{d*}, \lambda^d)$ 에 대응하는 링크flow를 각 f^d , f^{d*} 그리고 link cost를 $T_a(f^{d*}, \lambda^d)$ 라고 하면, 총통행비용은 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned} \bar{T}(F^{d*}, \lambda^d) \cdot F^d &= \sum_{r=1}^M T_r(F^{d*}, \lambda^d) F_r^d \\ &= \sum_{r=1}^M \left(\sum_{a=1}^m T_a(f^{d*}, \lambda^d) \delta_{ar} \right) F_r^d \\ &= \sum_{a=1}^m T_a(f^{d*}, \lambda^d) \left(\sum_{r=1}^M \delta_{ar} F_r^d \right) \\ &= \sum_{a=1}^m T_a(f^{d*}, \lambda^d) f_a^d \\ &= T_a(f^{d*}, \lambda^d) \cdot f^d \end{aligned}$$

여기서,

$$T_r(F^{d*}, \lambda^d) = \sum_{a=1}^m T_a(f^{d*}, \lambda^d) \delta_{ar} \text{ 이며,}$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } \delta_{ar} &= 1(\text{link } a \text{가 route } r \text{에 포함되는 경우}) \\ &= 0(\text{그렇지 않으면}) \end{aligned}$$

따라서 route로 표현된 변동부등식(7)은 다음과 같이 링크개념으로 변환된다.

$$-T_a(f^{d*}, \lambda^d) \cdot (f^d - f^{d*}) \leq 0 \quad \text{for all } f^d \in D \quad (8)$$

그러므로 본 연구에서 구축된 변동부등식이 Wardrop의 조건과 동등함을 알 수 있다.

해의 존재(Existence of equilibrium)

일별 동적 통행배정모형이 Wardrop의 유일해가 존재하기 위해서는 앞에서 살펴본 바와 같이 가능영역이 볼록(convex)하고 비용함수가 단조증가(monotonously increasing)하여야 한다. 본 모형의 경우 링크 통행비용함수 $T_a(f^{d*}, \lambda^d)$ 가 단조성을 갖고 있어야 하나, 링크 통행비용함수 내에 타 접근로의 통행량에 의한 신호제어가 고려되기 때문에 통행비용함수가 비분리(non-separable) 형태이며 단조성이 유지되지 않는다(임용택, 1996). 따라서 본 모형식은 다수의 균형해(multiple equilibria)를 갖게 된다.

2. 하루중(within-day) 동적 통행배정모형의 구축

하루중 동적통행배정모형을 피크시간을 단위 시간대(time slice)로 분할하여 차량의 통행패턴을 분석하는 모형으로 일별 통행배정모형과는 달리 출발지에서 발생한 통행량이 분석 단위 시간대 내에 네트워크를 통과하여 목적지에 도달하지 못하는 경우가 발생한다. 따라서 네트워크 상에 남아 있는 통행량이 다음 단위 시간대에 처리되도록 모형이 구축되어야 한다. 즉 링크 상 통행량의 움직임이 모형내에 고려되어야 한다. 본 연구에서는 하루중 동적 통행배정모형을 다음과 같이 변동부등식(Variational Inequality)으로 구축한다.

$$T_a^t(f^{*t}, \lambda^t) \cdot (f^t - f^{*t}) \geq 0 \tag{9}$$

$$f^{*t} \in S \cap D, \quad f^t \in D$$

여기서, f^t 는 시점 t 의 링크 통행량, $T_a^t(f^{*t}, \lambda^t)$ 는 시점 t 의 링크 통행비용을 나타낸다. 본 모형에서 고려해야 할 제약조건은 아래와 같다.

$$f_a^t = \sum_{p \in P} \sum_{d \in T} h_p^d \alpha_{a,p}^{dt} \quad \text{for all } a \in A, \quad t \in T \tag{10}$$

$$q_{rs}^d = \sum_{p \in P_{rs}} h_p^d \quad \text{for all } r \in Z, \quad s \in Z, \quad d \in T \tag{11}$$

$$h_p^d \geq 0 \quad \text{for all } p \in P, \quad d \in T \tag{12}$$

$$b_{pn}^d = \sum_{t \in T} \sum_{a \in A_{pn}} T_a^t(f_a^t) \alpha_{pa}^{dt} \quad \text{for all } p \in P, \quad n \in N, \quad d \in T \tag{13}$$

$$[b_{pn}^d - t\Delta t] \alpha_{pa}^{dt} \quad \text{for all } p \in P, \quad n \in N, \quad d \in T, \quad t \in T, \quad a \in A, \tag{14}$$

$$[b_{pn}^d - (t-1)\Delta t] \alpha_{pa}^{dt} \geq 0 \quad \text{for all } p \in P, \quad n \in N, \quad d \in T, \quad t \in T, \quad a \in A \tag{15}$$

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_a^t \leq \lambda_{\max} \tag{16}$$

$$\lambda_a^t = \frac{g_a}{C - L} \tag{17}$$

A: 링크집합, N: 노드집합

Z: 모든 존, P: 경로집합

T: 모든 분석시간대, Δt : 단위분석시간

C: 신호주기, L: 손실시간, g_a : 녹색시간

여기서, h_p^d 는 기종점 r,s 간의 d 시점에서 출발한 경로 p 의 통행량을 나타내며 α_{ap}^{dt} 는 d 시점에서 출발한 통행량이 t 시점에서 경로 p 의 링크 a 를 통과하면 1, 그렇지 않으면 0인 가변수이고, q_s^d 는 d 시점의 r,s 간 O/D 통행량을 나타낸다($q_s^d \in Q^d$). 따라서 제약조건(10)은 정의적인 제약조건(definitional constraint)이며, 식(11)는 통행량 보존조건(flow conservation constraint)를, 식(12)는 비음조건(non-negative condition)을 나타내고 있다.

b_{pn}^d 는 d 시점에서 출발한 교통량이 p 경로를 통하여 n 노드까지 도착하는 데 소요된 통행시간을 의미한다. 따라서 제약조건(13)은 d 시점에서 출발한 교통량이 t 시점까지 통행한 시간을 계산하며, 제약조건(14)과 (15)는 이때 교통량이 위치한 노드를 나타내게 된다. 즉, 제약조건식(13), (14), (15)이 링크상의 통행량의 움직임을 표현하게 된다. 제약조건식(16), (17)은 일별 동적통행배정모형에서와 마찬가지로 녹색시간비의 범위를 결정한다.

동등조건(Equivalence Condition)

변동부등식으로 구축된 하루중 통행배정모형이 Wardrop의 균형상태와 동일함을 보이기 위해 먼저, 하루중 동적Wardrop균형상태를 다음과 같이 새롭게 정의한다. 이 정의는 Smith(1993)의 동적 사용자 균형상태의 정의와 동일하다.

(하루중 동적 Wardrop균형상태)

모든 OD쌍과 모든 시간대에 대하여 비용이 많이 소요되는 경로는 사용되지 않는다.

For each OD pair and each time t, more costly routes are not used

위 동적 균형상태는 수학적으로 아래와 같이 표현된다.

$$T_r(F^{*t}, \lambda^t) > T_s(F^{*t}, \lambda^t) \text{ 이면 } F_r^t = 0 \tag{18}$$

여기서, $T_r(F^{*t}, \lambda^t)$ 는 t 시간대 경로 r 의 통행량 F^{*t} 와 녹색시간비 λ^t 로 결정되는 경로 통행비용을 나타내며, F_r^t 은 t 시간대 경로 r 의 통행량이다.

하루중 동적모형식으로 구축된 위 변동부등식이 동적Wardrop의 균형상태와 동등(equivalency)함은 보이는 방법은 앞에서 살펴본 일별 동적 통행배정모형과 동일하다. 따라서 본 연구에서는 생략한다.

해의 존재(Existence of Equilibrium)

일별 교통관리모형과 마찬가지로 하루중 동적 교통관리모형의 경우 역시 통행비용함수내에 신호제어가 고려되기 때문에 다수의 균형해가 존재하게 된다.

IV. 해석 알고리즘의 개발 및 평가

변동부등식으로 구축된 비대칭 통행배정모형(asymmetric traffic assignment model)을 해석하기 위하여 다양한 알고리즘이 개발되어 왔다. 대각화 알고리즘(diagonalized algorithm), linearization 알고리즘 그리고 simplicial decomposition 알고리즘 등이 있으며 이중 대각화 알고리즘이 대표적으로 사용되고 있다. 본 장에서는 앞에서 변동부등식으로 구축된 동적 통행배정모형을 해석하는 알고리즘을 개발하고 이의 수렴성을 검토코자 한다.

1. 대각화 알고리즘(Diagonalized Algorithm)

대각화 알고리즘은 기존에 널리 사용되고 있는 Frank-Wolfe 알고리즘을 수정하여 상대적으로 쉽게 구현할 수 있다는 점에서 대표적인 비대칭 통행배정모형의 해석 알고리즘으로 사용되고 있다. 또한 Abdulaal & LeBlanc(1979)은 대각화 알고리즘의 수렴해가 사용자 균형해(User Equilibrium solution)를 만족함을 보였으며 링크 통행비용함수의 야코비안 행렬식이 양의 값(positive definite)을 갖게 되면 유일해를 갖게 된다.

이 알고리즘의 기본 개념은 주대각요소 이외의 요소(off-diagonal element)를 고정시키고 주대각요소(diagonal element)만으로, 즉 분리형태로 변환시켜 Frank-Wolfe 알고리즘을 적용하여 해를 구하는 것이다. 이 알고리즘을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

대각화 알고리즘

(단계1) 초기화(initialization): $n=1, f_a^0, t_a(0)$

(단계2) 부문제(대각화: Diagonalization)

$$c(f^*) \cdot (f - f^*) \geq 0$$

Frank-Wolfe 알고리즘으로 링크 통행량 f^{n+1} 계산

(단계3) 수렴성 검토:

만약 $f_a^{n+1} \approx f_a^n$ 이면 정지, 아니면 $n=n+1$ 후 (단계2)로 진행

대각화 알고리즘의 수렴조건

Dafermos(1982)는 대각화 알고리즘이 수렴하기 위해서는 주대각요소 이외의 요소들의 영향이 크지 않아야(not too asymmetric) 함을 보였으며, Florian & Spiess(1982)는 대각화 알고리즘이 수렴할 충분조건으로서 아래 조건을 만족해야 함을 증명하였다.

$$||I - D(f^*)^{-1/2} B(f^*) D(f^*)^{-1/2} ||_2 < 1$$

여기서, I 는 단위행렬, $D(f^*)$ 는 대각행렬을, $B(f^*)$ 는 f^* 에서의 통행비용함수의 야코비안(jacobian)을 나타낸다. 이 조건 역시 주대각요소가 통행비용에 주된 영향을 미쳐야한다는 조건이 된다.

그러나 위 조건들은 수렴을 위한 충분조건(sufficient condition)으로서 위조건이 만족되지 않더라도 대각화 알고리즘은 수렴할 수 있음이 여러 연구에 의해 보여주었다(Fisk & Nguyen 1982, Mahmassani & Mouskos 1988, Meneguzzo 1995). 따라서 현재 수렴을 위한 필요조건(necessary condition)이 개발되지 않고 있는 상태에서 대각화 알고리즘의 수렴여부는 각 분석네트워크를 대상으로 수치분석을 통하여 수렴여부를 파악하는 방법을 이용하게 된다(Meneguzzo, 1995).

2. 해석 알고리즘의 개발 및 수렴성 검토

Hearn(1982)는 Wardrop의 균형상태를 나타내는 변동 부등식의 해가 아래 최소화 문제의 해와 동일함을 보였다.

$$\begin{aligned} \min_{v \in D} G(f) \\ \text{where, } G(f) = \max_{f \in D} [c(f^*) \cdot (f^* - f)], \forall f \in D \end{aligned}$$

이 개념은 앞에서 살펴본 바와 같이 Wardrop의 균형상태에서 통행비용벡터와 균형통행벡터는 수직하게 되어 Gap함수 $G(f)$ 의 값이 0이 된다. 따라서 $G(f)=0$ 이 되면 대각화 알고리즘은 수렴하게 되며 이때 링크상에 배정된 통행량은 Wardrop의 균형해가 된다.

따라서 본 연구에서도 개발된 알고리즘이 Wardrop의 균형해로 수렴하는지를 확인하기 위하여 분석가로망을 대상으로 Gap함수 값의 변화로 수렴여부를 검토코자 한다.

2.1 해석알고리즘의 개발

앞에서 변동부등식으로 구축된 일별 및 하루중 통행배정모형을 해석하기 위하여 개발된 대각화 알고리즘은 다음과 같다.

일별 통행배정모형의 대각화 알고리즘

[단계 0] 초기화

반복수 $n=0$

day=1($d=1$)

가능해 $f^{dn} \in D$, 가능해 집합 $W^n = \{f^{dn}\}$

[단계 1] 대각화 및 부문제 해석

1-1. 신호제어 전략에 의해 녹색시간결정(λ_a^d)

1-2. 링크 통행비용계산 $T_a(f^d, \lambda^d)$

1-3. all-or-nothing 통행배정

$$f^{dn} = \arg \min_u \{T(f^{dn}, \lambda^{dn}) \cdot u^d; u^d \in D\}$$

1-4. 수렴여부 검토

만약 $G(f^{dn}, \lambda^{dn}) = T_a(f^{dn}, \lambda^{dn}) \cdot (f^{dn} - u^{dn}) \approx 0$, stop : 최적해 f^{dn}

그렇지 않으면, 1-1단계로

[단계 2] 주문제

$$f^{d,n+1} = \arg \min_f \{G(f^d, \lambda^d); f^d \in H(W^{n+1})\}$$

만약 $f^{d,n+1} \simeq f^{d,n}$ 이면, stop

그렇지 않으면, $n=n+1$ [단계1]로

[단계 3] 만약 $d \geq$ 분석일수 이면, stop

그렇지 않으면, $d=d+1$ [단계1]로 진행

하루중 통행배정모형의 대각화 알고리즘

[단계 0] 초기화

반복수 $n=0$

$t=1$

가능해 $f^{t,n} \in D$, 가능해 집합 $W^n = \{f^{t,n}\}$

[단계 1] 대각화 및 부문제 해석

1-1. 신호제어 전략에 의해 녹색시간결정(λ_a^t)

1-2. 링크 통행비용계산 $T_a(f^t, \lambda^t)$

1-3. network loading

$$f^{tn} = \arg \min_u \{T(f^{tn}, \lambda^{tn}) \cdot u^t; u^t \in D\}$$

(1) 향후 시간대로 투영된 링크 통행량(projected link volume) 계산

투영된 링크통행량

$$y_a^{t+n} = \theta^t w_{at}^{t+n} f_a^{t-1} + (1-\theta) w_{at}^{t+n} f_a^t, a \in A, n \geq 0, t+n \in T$$

(2) 각 시간대별 링크 통행시간을 추정하여, 최단경로 탐색

(3) all-or-nothing 통행배정

1-4. 수렴여부 검토

만약 $G(f^{tn}, \lambda^{tn}) = T_a(f^{tn}, \lambda^{tn}) \cdot (f^{tn} - u^{tn}) \approx 0$, stop : 최적해 f^{tn}

그렇지 않으면, 1-1단계로

[단계 2] 주문제

$$f^{t,n+1} = \arg \min_f [G(f^t, \lambda^t); f^t \in H(W^{n+1})]$$

만약 $f^{t,n+1} \simeq f^{t,n}$ 이면, stop

그렇지 않으면, $n=n+1$ [단계1]로

[단계 3]

만약 분석시간 $t \geq$ 분석시간대수이면, stop

그렇지 않으면, $t=t+1$ [단계1]로

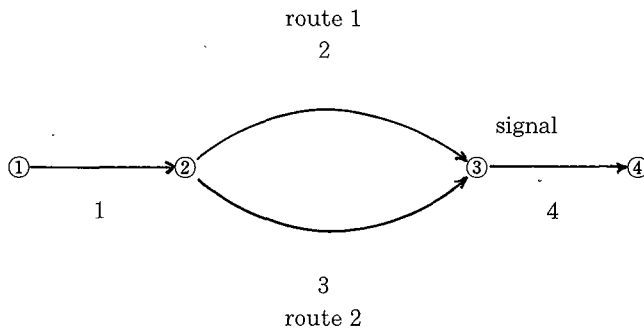
여기서, f_a^t 는 a링크의 t시간대 통행량을, w_f^{t+n} 는 t시간대와 t+n시간대의 전체 출발 통행량의 비($w_f^{t+n} = Q^{t+n}/Q^t$)를, θ^t 는 파라메타를 나타낸다.

본 연구에서 개발된 알고리즘이 기존의 동적 통행배정 알고리즘과는 다음과 같은 차이가 있다. 기존의 가로망 부하(network loading) 알고리즘이 분석단위시간대에 목적지에 도달하지 못하는 통행은 도착 노드에 저장한 후, 다음 분석시간대의 O/D통행량에 추가하여 네트워크 확장(network expansion)을 통하여 배정하는 반면, 본 알고리즘은 분석단위시간대에 목적지에 도달하지 못하는 통행량을 도착 노드에 저장하지 않고 다음 분석시간대의 교통상황을 미리 예측하여 지속적으로 목적지까지 도달하도록 배정한다. 이를 위해서는 향후 분석시간대의 최단경로 탐색이 필요한데, 이때 [단계1] (1)의 향후 시간대로 투영된 링크 통행량(projected link volume)을 이용하게 된다. 투영된 링크 통행량은 향후 시간대에 발생할 교통수요, 즉 발생 O/D를 고려하여 예측하게 된다. 이런 점에서 본 알고리즘은 휴리스틱(heuristic)한 측면이 있으며, 이 방법의 장점은 대규모의 가로망에 적합한 것으로 나타나 있다. (Janson, 1991).

2.2 개발 알고리즘의 수렴성 검토

대상 가로망

개발된 모형을 평가하기 위하여 아래 <그림 2>과 같이 각 1개의 기·종점과 2개의 경로를 갖는 단순가로망을 가지고 분석코자 한다. 가로망 및 신호제어 입력자료는 <표 1>과 같고, 기



<그림 2> 테스트 네트워크.

〈표1〉 예제가로망 입력자료

가로망 자료	신호제어 자료
링크 용량: · 링크1=링크4=2000대 · 링크2=링크3=1000대 초기 통행시간: 60초	· cycle=60sec (2-phase) · lost time = 4sec x 2 = 8sec · effective green = 60-8 = 52sec · minimum green = 7sec

〈표2〉 기중점 통행자료

일별 교통수요	하루중 교통수요
O/D =500대/일 O/D =900대/일 O/D =1500대/일	O/D =300대/시, 500대/시, 800대/시 · t1=0.064 · t7=0.102 · t2=0.074 · t8=0.097 · t3=0.082 · t9=0.084 · t4=0.085 · t10=0.077 · t5=0.094 · t11=0.074 · t6=0.099 · t12=0.063

중점 통행량은 〈표 2〉에 나타나 있다. 일별 교통관리모형은 10일간을 대상으로 분석하며, 하루중 교통관리모형의 경우, 피크시간을 대상으로 300초(5분)를 하나의 분석시간대(time slice)로 하여 12개의 시간대, 즉 피크 1시간을 분석대상으로 한다. 각 시간대별 교통수요의 변화는 〈그림 3〉과 같다.

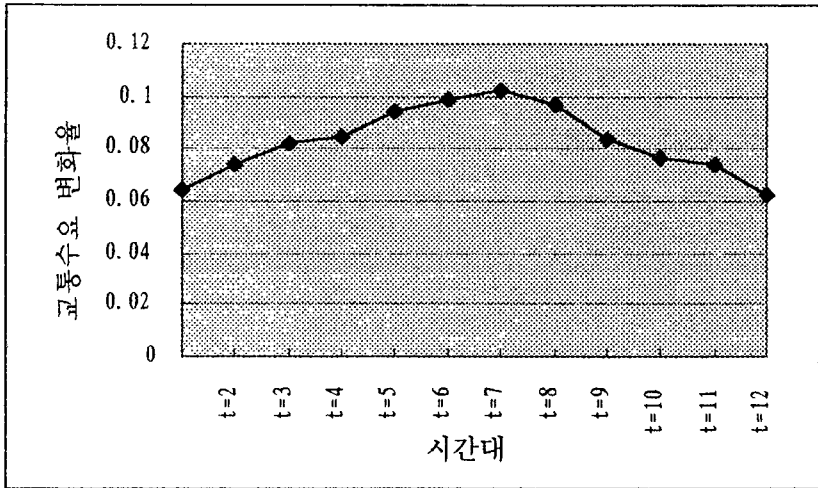
수렴성 분석

① 일별 교통관리모형의 Gap-value변화

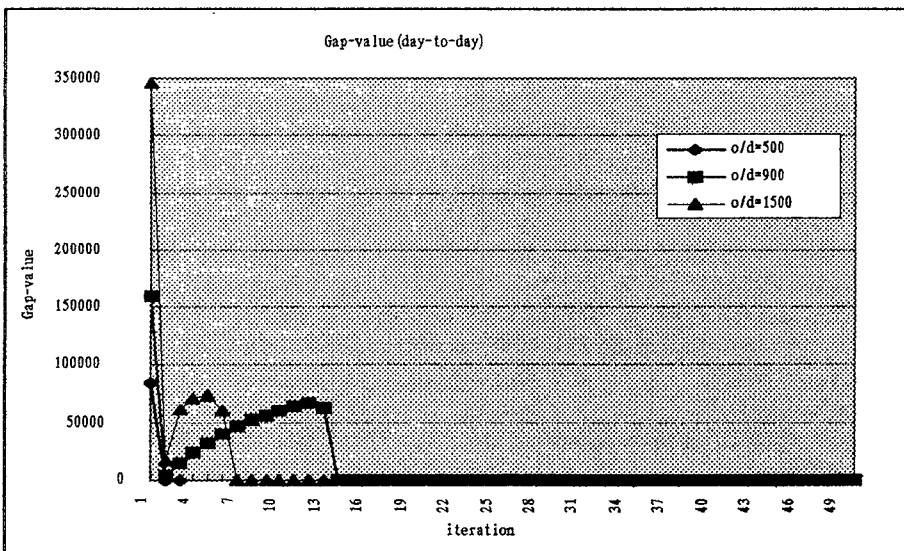
본 연구에서 개발된 모형이 Wardrop의 균형상태(equilibrium)에 도달하는지를 알아 보기 위하여 목적함수인 Gap함수의 값을 각 통행수요별로 비교해 보면 아래 〈그림 4〉와 같다. 해석 알고리즘이 Wardrop의 균형상태에 도달하게 되면, 통행비용 벡터와 균형통행 벡터가 직각을 이루게 되어 Gap함수의 값이 0이 된다. 그림에서 보듯이 비포화시에는 비교적 빠르게 0에 접근하게 되나, 교통수요가 증가하면, 초기에서는 진동을 하지만 iteration이 진행됨에 따라 0에 접근하게되어 균형통행량을 얻게 된다. 따라서 본연구에서 개발된 모형이 균형상태에 도달함을 알 수 있다.

② 하루중 교통관리모형의 Gap-value변화

하루중(within-day) 교통관리모형이 Wardrop의 균형상태(equilibrium)에 도달하는지를 알아 보기 위하여 각 교통수요별 Gap 함수값의 변화가 아래 〈그림 5〉에 나타나 있다. 그림에서 보듯이 기중점 교통수요가 시간당 300대인 경우, 상대적으로 빠르게 0에 수렴하는 데 비

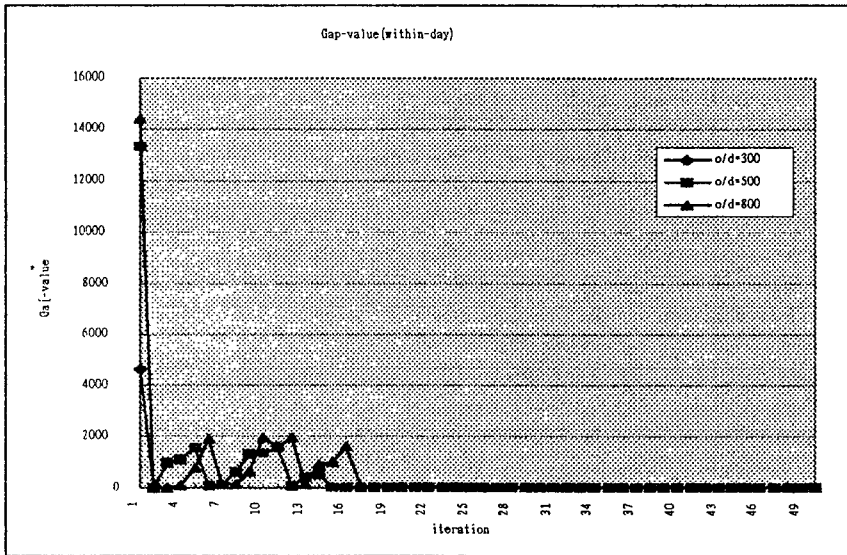


〈그림 3〉 통행수요의 변화



〈그림 4〉 일별 동적 통행배정모형의 Gap함수값의 변화

해, 교통수요가 증가함에 따라 Gap 함수의 값은 2~3차례 진동후, iteration이 15회 이상이 되면 0에 수렴하고 있다. 따라서 본 연구에서 개발된 하루중 동적교통관리모형도 앞절에서 살펴본 일별 동적모형과 같이 안정적인 Wardrop의 균형해에 도달하며, 개발모형이 안정적인을 알 수 있다.



〈그림 5〉 하루중 동적 통행배정모형의 Gap함수값의 변화

V. 결론

본 연구에서는 교통정보와 신호제어를 고려한 일별(day-to-day) 및 하루중(within-day) 동적 통행배정모형을 개발하고 개발된 모형이 Wardrop의 균형상태와 일치(equivalence)함을 입증하였으며 해의 존재에 대하여도 검토하였다. 또한 개발된 모형식을 해석하기 위하여 Frank-Wolfe알고리즘을 수정한 대각화 알고리즘(Diagonalized Algorithm)을 개발하였으며 단순 가로망을 대상으로 알고리즘이 Wardrop의 균형해에 수렴함을 보였다.

본 연구의 후속 연구로는 앞에서 언급한 바와 같이 교통정보와 신호제어 및 통행배정을 결합한 동적 교통관리모형을 구축하고 이를 이용하여 각종 교통정책들을 평가하는 연구가 남아 있다.

VI. 참고문헌

임용택(1996) 신호제어 및 가변교통정보를 고려한 동적 교통관리모형의 개발에 관한 연구, 서울대 대학원 박사학위논문 2차심사.

Abdulaal M. and Leblanc L.J.(1979) Methods for combining modal split and equilibrium assignment models, Transportation Science, 13, 292-314.

- Dafermos, S.C.(1980) Traffic Equilibrium and Variational Inequalities, Transportation Science 14(1), 42-54.
- Dafermos, S.C.(1982) Relaxation algorithms for the general asymmetric traffic equilibrium problem, Transportation Science Vol. 16(2), 231-240.
- Fisk, C.S. and S. Nguyen(1982) Solution algorithms for network equilibrium models with asymmetric user costs, Transportation Science, Vol. 16(3), 361-381.
- Florian, M. and H. Spiess(1982) The convergence of diagonalisation algorithms for asymmetric network equilibrium problems, Transportation Research, 16B(6), 447-83.
- Hearn, D.W.(1982) The gap function of a convex program, Operations Researches, Let. 1, 67-71.
- Janson, B.(1991) Dynamic traffic assignment for urban road networks, Transportation Research 25(B), 143-161.
- Mahmassani, H.S. and Mouskos, K.C.(1988) Some numerical results on the diagonalization algorithm for network assignment with asymmetric interactions between cars and trucks, Transportation Research 22(B), 275-290.
- Meneguzzo, C.(1995) An equilibrium route choice model with explicit treatment of the effect of intersections, Transportation Research 29(B), 329-356.
- Sheffi, Y.(1985) Urban Transportation Networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods, Prentice Hall, New Jersey.
- Smith, M.J.(1979) The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria. Transportation Research 13(B), 295-304.
- Smith M.J.(1993) A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on congested capacity-constrained road networks, Transportation Research 27B, 49-63.
- Vliet, V.D.(1987) The Frank-Wolfe algorithm for equilibrium traffic assignment viewed as a variational inequality, Transportation Research 21(B), 87-89.
- Wardrop, J.G.(1952) Some theoretical aspects of road traffic research, Proceedings of Institute of Civil Engineering, part 2, 325-378.