복합교통수단 모형

임용택*

〈目　次〉

Ⅰ. 서론

현재까지 개발된 교통망 모형들은 주로 네트워크를 노드(node)와 링크(link)로 표시하고 링크간의 연결을 통한 경로선택을 통하여 통행자의 경로선택행태를 표현해 왔으며, 교통수단선택시에도 도로교통과 대중교통이 교통계획과정의 초기 단계에서 분리되어 이후 개별적으로 분석되어 왔다. 그러나 실제 통행자의 행태를 기준으로 보면, 통행자는 목적지에 도달하는 수단을 먼저 선택하기 보다는 목적지까지 도달 가능한 경로들 중 가장 비용이 낮은 경로를 인지하고 통행수단(transportation mode)을 선택할 가능성이 크며, 이 경우 운행중 발생하는 교통수단간의 환승(transfer)이 중요한 요소가 된다. 또한, 최근 교통수단이 다양화되고 이에 따라 수단간의 환승이 자주 발생함에 따라 환승저항으로 인해 교통수단을 다르게 선택하는 경향이 뚜렷해지고 있으나, 기존 연구들에서는 이를 명시적으로 고려하지 못하는 한계가 있었다.

이런 환승행태를 표현할 수 있는 방법이 다수의 수단선택과정과 경로선택행위를 함께 고려할 수 있는 복합교통망(multimodal network)을 구성하여 문제를 해결하는 것으로, 복합교통모형(multimodal transportation model)이란 두 개 이상의 독립적 교통수단을 하나의 모형구조로 통합한 모형을 의미한다. 복합교통모형을 이용할 경우, 경로선택과정에서 발생하는 수단간 환승(modal transfer)행위를 정확하게 고려할 수 있기 때문에 좀 더 현실적인 모형이 될 수 있다.

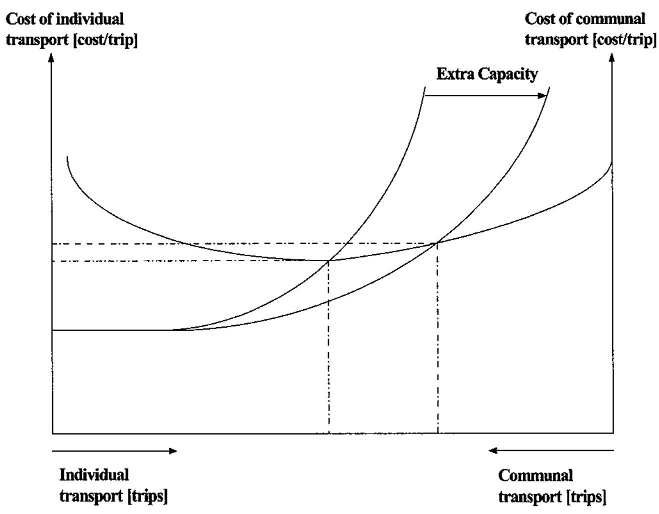
본 연구에서는 두 개 이상의 독립적 수단모형을 하나의 모형구조로 통합한 복합교통모형

* 전남대학교 교통물류학부 부교수

(multimodal transportation model)을 개발하기 위한 기초연구로서, 모형구성을 위한 이론적인 틀을 제공하는데 연구의 목적이 있으며 복합교통모형은 수단간 환승(modal transfer)행위를 명시적으로 고려할 수 있다는 장점이 있다. 모형의 기본 원리은 Wardrop의 사용자 균형(user equilibrium)을 교통수단간 균형(multimodal equilibrium)으로 확장하여 모형을 구축하며, 이를 풀기 위한 알고리듬도 간략히 제시한다.

II. 교통수단간의 균형(multimodal equilibrium)

교통수단간의 균형상태를 살펴보기 위하여, 교통에서 널리 알려진 다음과 같은 2가지의 역설(paradox)를 통하여 개인교통과 대중교통간의 균형상태를 검토해 보자. 교통시스템내에 수단이 둘 이상일 경우 각 수단의 통행비용 곡선의 형태에 따라 도로망 용량증대를 통한 혼잡완화 전략은 시스템의 통행비용을 증가키는 결과를 낳을 수 있다. 이 같은 사실을 일반적으로 Downs - Thompso n Paradox라 부른다. 즉, 도로용량의 증가는 대중교통에서 개인교통으로 통행의 전환을 야기하게 되는데, 이것은 대중교통에 의한 평균비용을 증가시키게 된다. 왜냐하면 대중교통수요의 감소는 대중교통 서비스 빈도의 감소와 대기시간의 증가를 가져온다. 따라서 새로운 균형은 더 높은 통행비용을 나타낸다. 이 역설은 〈그림 1〉을 통하여 살펴볼 수 있다. 수요가 고정적일 때, 대중교통과 개인교통의 곡선교차점은 결정적 사용자균형을 의미한다. 만약, 도로용량이 증가하면, 개인교통의 공급곡선은 오른쪽으로 전이한다. 이 경우 그림에서 보듯이 새로운 교차점이 당초의 균형점보다 높은 지점에서 이루어지는 데, 이는 대중교통에서 개인교통으로 전이한 것을 의미하고 따라서, 높은 균형통행비용이 나타나게 되는 것이다. Downs-Thompso n Paradox에

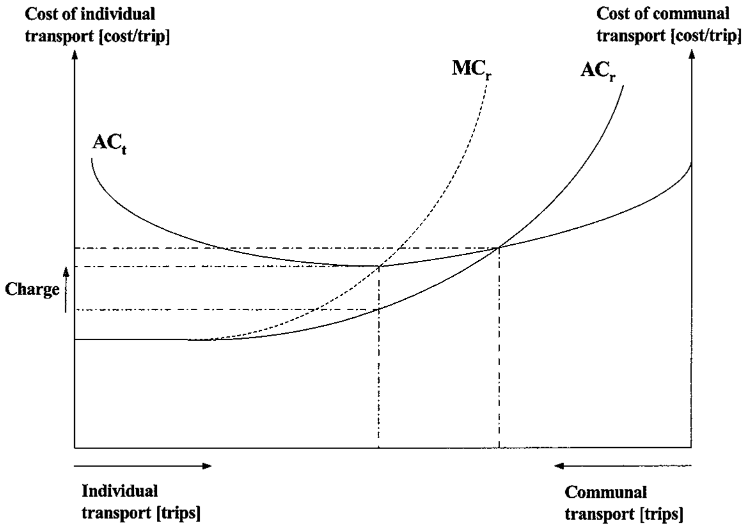


〈그림 1〉 Downs-Thompson Paradox

서 보인 대중교통의 통행비용함수는 인당 화폐가치의 통행비용을 기준으로 한 것으로 대중교통 승객이 증가하는 초기에는 고정비용에 대해 이용이 증가하기 때문에 인당 통행비용은 감소하다가 일정 용량이상 수요가 증가하면 용량을 증대시켜야 하므로 통행비용이 증가하게 된다. 따라서 이런 Downs-Thompson역설은 개인교통과 대중교통수단간의 통행비용의 차이에서 발생하며, 개인교통을 위한 도로 용량의 증가는 혼잡를 해소하기 보다는 오히려 전체 통행비용을 증가시킬 수 있다.

Mogridge(1995)는 개인교통을 대상으로 도로이용료(세금)를 부과해 전체 시스템의 통행시간을 감소시킬 수 있다고 주장하였는데, 이를 Edgeworth Paradox라고 하며 〈그림 2〉로 설명할 수 있다[1]. 그림에서 보듯이 도로이용료(Charge)는 개인교통을 대중교통으로 전환시켜 통행비용이 낮은 새로운 균형점을 형성한다. 즉 혼잡통행료를 부과해서 낮은 균형통행비용으로 수렴하도록 유도하는 것이다. 그림과 같이 도로의 한계비용곡선과 통행 수요곡선(여기서는 대중교통의 한계비용곡선)이 만나는 점까지 혼잡통행료를 부과해 도로의 통행시간을 최소화시키는 것이다. 여기서, 대중교통의 평균비용곡선과 한계비용곡선은 동일하다고 가정한다.

앞에서 살펴본 Downs-Thompson의 역설이 도로의 확장에 기인하는 데 반해, Edgeworth역설은 혼잡통행료나 세금을 부과함으로서 발생한다는 데 차이가 있으나, 두 역설 모두 대중교통수단의 서비스 수준(통행비용)에서 균형을 이룬다는 점에 유의할 필요가 있다. 이렇게 시스탬내의 서비스수준이 대중교통수단에 의해 결정된다는 것은 통행수요에 대해 두 교통수단의 통행비용곡선이 서로 다르기 때문이다. 즉, 통행량의 증감에 대해 개인교통수단이 대중교통수단 보다 더



〈그림 2〉 Edgeworth Paradox

1) 여기서 주의할 것은 혼잡통행료 징수로 인한 경로변경, 목적지변경, 출발시간변경 등은 고려하지 않는다

탄력적이기 때문에, 개인교통수단을 이용하는 통행자는 개인교통을 억제하는 정책에 민감하게 반응하는데 반해, 대중교통의 통행비용곡선은 거의 고정되어 있어 결국 대중교통 통행비용곡선에서 균형통행량이 결정 된다. 결론적으로 개인교통과 대중교통 간에는 균형이 존재하며, 그 균형점은 대중교통에 의해 결정된다는 점이다.

III. 복합교통모형의 구성요소

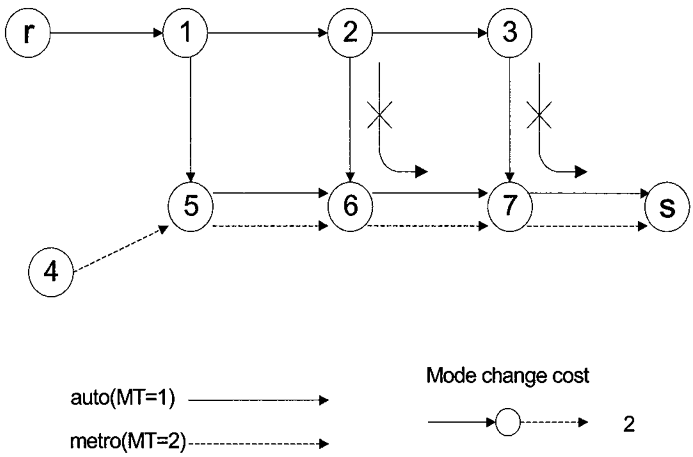
개인교통과 대중교통을 함께 고려하는 복합교통모형의 구성요소는 다음과 같다.

1. 복합기종점 통행량(multimodal OD matrix)

복합 기종점통행량에는 기존 단일 수단OD뿐만 아니라 다른 교통수단으로 환승한 경우의 OD 통행량도 포함시켜야 한다. 단일수단 통행OD는 기존의 OD통행량을 그대로 사용할 수 있지만, 환승OD통행량은 조사나 추정(estimation)이 필요하다. 환승OD추정은 각 기종점간 수단을 고려한 경로탐색이 가능한 경우, 쉽게 추정이 가능하다.

2. 복합 교통망(multimodal network)의 구축

〈그림 3〉은 도로교통과 대중교통을 함께 고려하는 복합교통망을 표현한 것으로 좌회전금지, U-turn 허용 등과 같은 도로운영을 실제로 구현할 수 있어야 한다. 동일한 링크에 다수의 교통수단이 이용하는 경우, 이를 별개의 링크로 표현하면 링크기반 복수 수단 최단경로탐색을 쉽게 할 수 있다.



〈그림 3〉 도로교통과 대중교통을 함께 고려하는 복합교통망

3. 링크기반(link-based) 통합교통망 최단경로 탐색(LBSPA)

복합교통망에서 통행배정을 하기 위해서는 교통수단간 환승(transfer)을 고려하는 최단 경로 탐색 알고리듬이 필요하며, 이를 위하여 링크기반 최단경로 탐색알고리듬(link-based shortest path algorithm)이 요구된다. 또한, 교통망상의 회전금지 등을 고려할 수 있어야 한다. 링크기반 최단 경로 알고리듬에 대해서는 임강원외(2008)에 자세히 기술되어 있다.

4. 환승비용함수(transfer cost function)

교통수단간 환승시에 소요되는 비용은 주로 차량의 배차간격, 즉 운행횟수(frequency)에 비례하게 된다. 일반적으로 환승시간은 차량 대기시간(waiting time)으로 대표되며, 대기시간은 운행횟수에 반비례하게 된다. 따라서 환승비용은 운행횟수의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$t = t(x, f)$$

여기서, t는 환승시간이며 x는 승객수요, f는 운행횟수(frequency)이다. De Cea et al.(1993)는 식(1)과 같이 환승시간함수를 제시하였다.

$$t_s = \frac{\alpha}{f_s} \tag{1}$$

여기서, 경로구간 s의 환승시간은 f_s의 함수이며 노선에 속하는 차량을 기다리는 승객들의 평균대기시간으로 차량과 승객의 도착분포에 따라 α값이 결정된다. 차량 도착이 일정하고, 승객의 도착행태가 무작위일 경우 $\alpha = 0.5$ 값을 적용하고, 차량이 정해진 차두간격을 지키지 못하고, 특히 exponential 도착분포시, $\alpha = 1.0$의 값을 갖는다고 가정한다.

본 연구에서는 환승시간이 교통수단 m의 운행횟수(f_m)과 승객수요(h_m)의 함수로 가정하여 다음과 같이 환승시간함수를 설정한다.

$$t_m = \frac{h_m}{f_m} \tag{2}$$

Ⅳ. 복합교통수단 모형의 구성(multimodal transportation model)

1. 복합교통수단 균형(multimodal equilibrium)

먼저, 교통수단간 균형(equilibrium)을 정의하자. 이 정의는 통행비용이 적게 사용되는 경로에 통행이 발생한다는 Wardrop의 균형을 교통수단간 균형으로 확장한 개념으로 다음과 같다.

[정의 1] 복합교통수단 균형(multimodal equilibrium)

기종점쌍간 최소통행시간이 소요되는 교통수단에는 통행이 발생하고 그렇지 않으면 통행이 발생하지 않는다.

위 균형조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_m^{od} > 0 \quad &\text{if } c_m^{od}(h) = c_{od} \\ h_m^{od} = 0 \quad &\text{if } c_m^{od}(h) > c_{od} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, h_m^{od}는 기종점쌍 od간 교통수단 m의 통행이며, c_m^{od}는 이때 교통수단 m의 통행비용을 나타내고 c_{od}은 최소통행비용이다. 위 균형조건은 교통수단 m의 통행비용(c_m^{od})이 최소통행비용(c_{od})과 같으면, 교통수단 m에 통행이 발생하고 그렇지 않으면 통행이 발생하지 않는다는 의미이다. 위 조건은 다음과 같은 비선형 상보조건(nonlinear complementary condition)으로 표현할 수 있다.

$$h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od}) = 0 \tag{4a}$$

$$(c_m^{od} - c_{od}) \geq 0 \tag{4b}$$

$$h_m^{od} \geq 0 \tag{4c}$$

2. 모형의 구성(model formulation)

복합교통모형은 동적체계(dynamic system)를 이용하여 구축할 수 있다. 동적체계는 시간의 흐름에 따라 변화하는 체계(system)를 표현하는 방법으로 궁극적으로 체계가 안정상태(stability)에 도달하느냐가 중요한 문제가 되며, 이는 Lyapunov함수를 통하여 확인할 수 있다. 동적체계에 대한 자세한 내용은 임강원외(2008), 임용택(2006)에 자세히 나와 있다.

복합교통모형을 구축하기 위하여 식(4a)로부터 다음과 같은 새로운 함수 V_m을 정의하자.

$$V_m = h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od}) \tag{5}$$

그런데, 함수 V_m은 다음과 같은 속성이 있다.

(i) 만약 교통수단 m의 통행시간(c_m^{od})이 최소통행시간(c_{od})과 같아지면 $V_m = 0$ 이다.

(ii) $V_m = 0$이 되면, $h_m^{od} \geq 0$이므로 $(c_m^{od} - c_{od}) = 0$ 이 된다.

이런 속성들을 이용하여 $V_m = 0$이 되는 h_m^{od}를 구하면, 복합교통수단간의 균형해를 얻게 된다. 따라서, $V_m = 0$으로 만드는 h_m^{od}를 구하는 문제가 된다. 이것은 교통수단m의 통행시간(c_m^{od})이 최소통행시간(c_{od})과 같아지게 만들기 위하여 교통수단 m의 통행량 h_m^{od}를 전환시키는 동적

체계의 변화과정을 도입하여 표현할 수 있다. 따라서, 동적체계를 이용하여 교통수단 m의 통행량변화를 수리적으로 표현하면 다음과 같다.

$$V_m = -\dot{h}_m^{od} \tag{6}$$

여기서, $\dot{h}_m^{od}$는 h_m^{od}의 미분(derivative)값으로 교통수단 m의 통행량이 변하는 방향을 나타낸다. 따라서, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-\dot{h}_m^{od} = V_m = h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od}) \tag{7}$$

식 (7)의 의미는 교통수단 m의 통행시간(c_m^{od})이 최소 경로통행시간(c_{od})보다 크면, 교통수단 m의 통행량(h_m^{od})을 감소시키며, 반대가 되면 증가시키게 된다. 식 (7)과 같은 동적체계(dynamic system)는 안정적인 해(stable solution)로 수렴하는지를 판단하는 게 중요하다. 본 연구에서 제안한 모형이 안정해로 접근한다는 사실은 Lyapunov함수를 통하여 증명할 수 있다.

[정리 1] 복합교통모형의 안정해 수렴
식 (7)의 동적체계는 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다.

(proof)

$V_m = h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od})$이므로 V_m은 1차미분 가능하며 비선형상보조건(nonlinear complementary condition)에 의해 $V_m \geq 0$이다.

또한, $\dot{V}_m = -\dot{h}_m^{od}\ (c_m^{od} - c_{od})$
$= -h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od})^2 \leq 0$

그리고, $V_m = h_m^{od}(c_m^{od} - c_{od}) = 0$에서 균형해를 구할 수 있다.
따라서, 함수 V_m은 Lyapunov함수이며 식(7)의 동적체계는 안정상태에 도달한다.(증명 끝)

식 (7)로 표현된 복합교통모형의 해를 구하는 방법을 기술하면 다음과 같다. 먼저,

$$\dot{h}_m^{od} = \frac{h_m^{od}(\tau + \triangle\tau) - h_m^{od}(\tau)}{\triangle\tau}$$

이므로 식 (7)로 주어진 동적체계를 이산형(discrete)으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h_m^{od}(\tau + \triangle\tau) = h_m^{od}(\tau) - \triangle\tau\, h_m^{od}(\tau)(c_m^{od} - c_{od}) \tag{8}$$

여기서, τ는 추상변수(abstract variable)로 시간단위로 해석할 수 있으며, 알고리듬 측면에서는 반복횟수(number of iteration)로 볼 수 있다. Δτ는 작은 변화량(changes)이다. 식 (8)을 알고리듬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$h_m^{od,n+1} = h_m^{od,n} - \Delta\tau \quad h_m^{od,n}(c_m^{od,n} - c_{od}^n) \tag{9}$$

여기서, $c_{od}^n = \frac{\sum_j h_j^{od,n} c_j^{od,n}}{\sum_j h_j^{od,n}}$ 이다. 따라서, 식 (9)를 이용하여 복합교통모형의 교통수단별 균형통행량을 구할 수 있으며, 이에 대한 풀이과정은 임용택(2006), 임용택외(2006)에 기술되어 있다.

3. 민감도분석(sensitivity analysis)

민감도분석을 위하여, 먼저 각 교통수단별 통행비용함수를 다음과 같이 가정한다.

(auto) $c_{au} = c_{au}(h_{au})$

(transit) $c_{tr} = c_{tr}(h_{tr}, f_{tr})$

함수형태에서 보듯이 각 수단별 비용은 분리된 비용함수(separable cost function)로 한정한다. 대중교통 비용함수에서 f_{tr}은 대중교통의 운행횟수(frequency)로, 운행횟수가 증가하면 용량(capacity)도 증가하게 되며, 환승에 소요되는 대기시간은 감소하게 된다. 즉, 환승시간은 감소한다.

통행수요가 주어진 상태에서, 교통운영자가 결정할 수 있는 정책변수는 운행횟수이기 때문에 운영횟수의 변화에 따른 각 교통수단별 통행량의 변화를 분석해 볼 필요가 있으며, 이는 민감도(sensitivity)를 통하여 파악할 수 있다. 식 (7)로부터

$$-\frac{\partial}{\partial f_m} \dot{h}_m^{od} = \frac{\partial}{\partial f_m} V_m$$

이므로 따라서, 대중교통의 운행횟수에 대한 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial V_{tr}}{\partial f_{tr}} = h_{tr} \frac{\partial c_{tr}(f_{tr})}{\partial f_{tr}} \tag{10}$$

만약, 대중교통의 비용함수가 환승비용으로만 구성되어 있으며, 식(2)와 같이 운행횟수의 함수라고 가정하면 민감도는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial c_{tr}}{\partial f_{tr}} = -\frac{h_{tr}}{f_{tr}^2}$$

따라서,

$$\frac{\partial V_{tr}}{\partial f_{tr}} = h_{tr}\frac{\partial c_{tr}}{\partial f_{tr}} = -\frac{h_{tr}^2}{f_{tr}^2}$$

이다. 또한, 교통량의 변화에 대해서는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial f_{tr}} h_m^{od} = \frac{h_{tr}^2}{f_{tr}^2} > 0 \tag{11}$$

즉, 대중교통의 운행횟수가 증가하게 되면, 예상했던 바와 같이 대중교통을 이용하는 통행이 증가함을 알 수 있다.

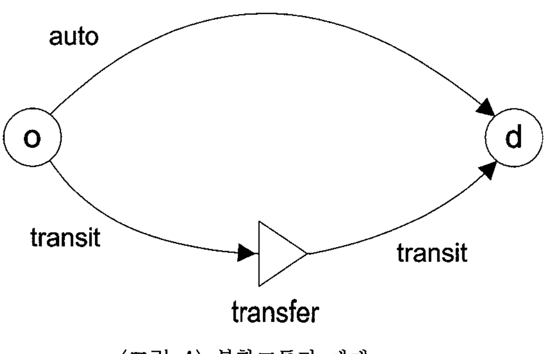
4. 복합교통망 예제

본 연구에서 제안된 복합교통모형을 평가하기 위하여 간단한 예제를 이용한다. 본 논문의 목적이 이론적으로 새로운 모형들을 개발하고 이를 평가하는 것이기 때문에 모형의 속성과 이론적인 특성을 이해하기 위해서는 대규모 교통망 보다는 소규모 교통망이 더 적합하며, 대규모 교통망에 대해서는 향후 연구과제로 남겨둔다.

예제교통망은 〈그림 4〉와 같이 1개의 기종점 쌍에 2개의 경로로 구성되어 있으며, 각 경로는 도로교통과 대중교통으로 대중교통은 환승을 포함한다. 각 교통수단의 통행비용은 다음과 같으며 기종점쌍간 수요는 10으로 가정한다. 또한, $\Delta\tau = 0.1$이다.

(개인교통) $c_{au}^{od} = 2 + h_{au}^{od}$

(대중교통) $c_{tr}^{od} = 2 + h_{tr}^{od}/K_{tr}$

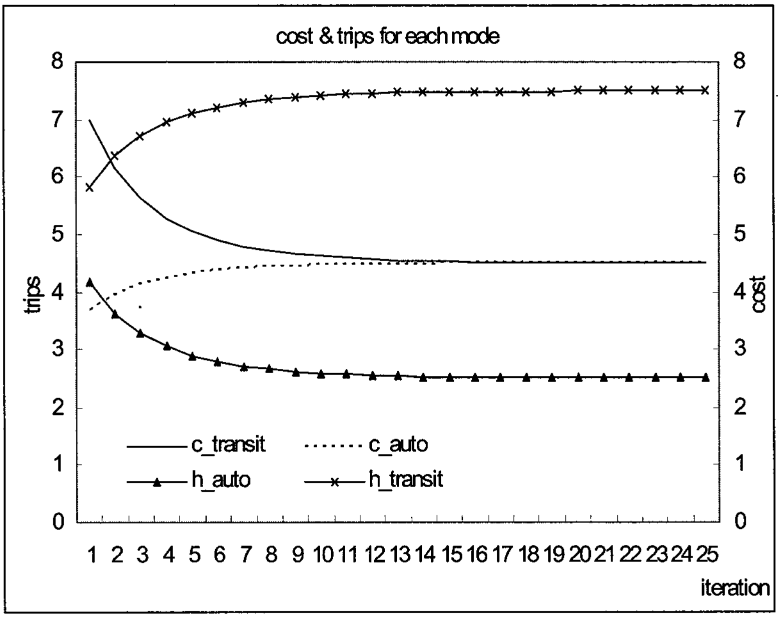


〈그림 4〉 복합교통망 예제

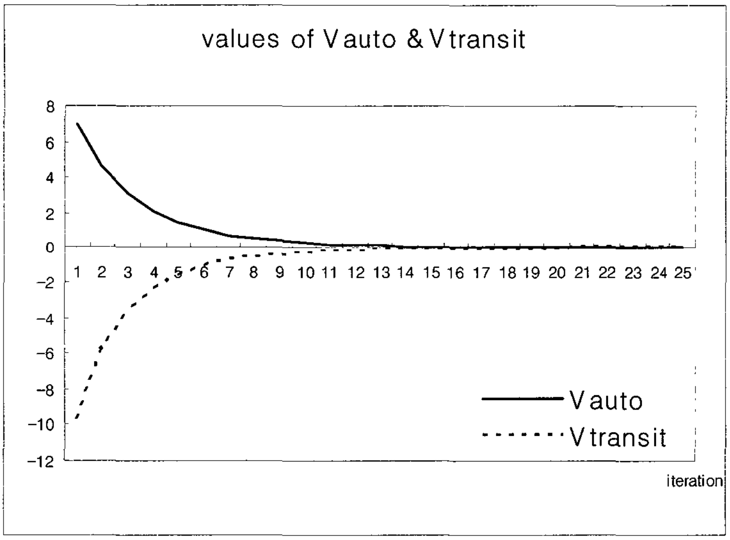
$$h^{od}_{au} + h^{od}_{tr} = 10$$

대중교통의 비용함수에서 2번째 항은 환승으로 인한 소요시간을 나타내며 K_{tr}은 대중교통의 용량(capacity)으로 운행횟수(f_{tr})의 함수이다. 여기서는 $K_{tr} = f_{tr} = 3$로 고정된 값을 사용한다. 따라서, 환승시 소요시간은 통행당 $\frac{1}{3}$의 시간이며 총 $\frac{h^{od}_{tr}}{3}$단위시간이 소요된다.

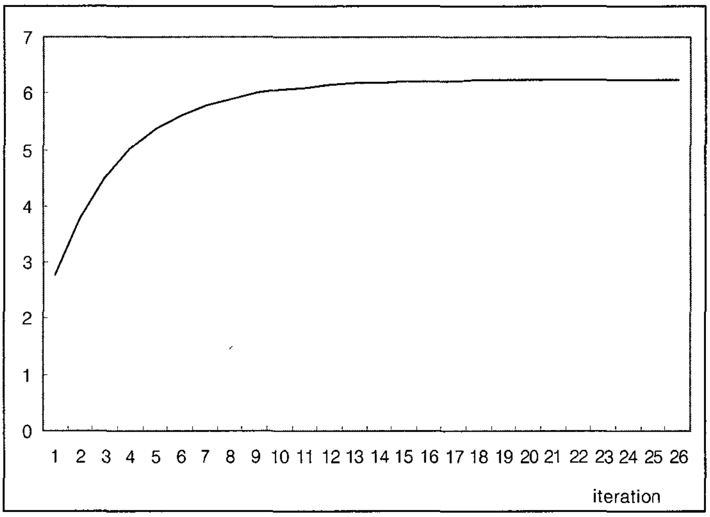
〈그림 5〉는 반복횟수에 따른 각 교통수단별 기종점간 통행비용과 배정된 통행량을 보여주고 있다. 궁극적으로 각 교통수단의 통행비용이 모두 동일하게 4.5로 수렴하고 있으며, 통행량도 $h^{od}_{au} = 2.5$, $h^{od}_{tr} = 7.5$로 수렴하고 있다. 따라서, 각 교통수단 간에도 균형(equilibrium)이 존재함을 알 수 있으며, 이는 [정의 1]을 만족함을 보여준다. 수단간 균형상태는 〈그림 6〉을 통해서도 확인할 수 있는데, 균형상태에 도달하면 V_m함수의 값이 모두 0으로 수렴하게 된다. 그림에서 보듯이 반복수 15회 정도에 $V_{au} = V_{tr} = 0$값을 나타내고 있어 교통수단간 균형상태에 도달했음을 나타낸다. 이런 결과로 볼 때, 본 연구에서 제시한 모형이 기대했던 대로 복합교통수단간 균형상태의 해를 도출하고 있음을 알 수 있다. 〈표 1〉은 본 예제로부터 도출된 최종결과를 보여주고 있다. 〈그림 7〉은 대중교통 운행횟수에 따른 통행량의 변화율, 즉 민감도 ($\partial h_{tr}/\partial f_{tr}$)를 보여주고 있는데 최종적으로 +6.25의 값을 나타내고 있어 식 (11)의 조건을 만족함을 알 수 있다.



〈그림 5〉 각 교통수단별 통행비용과 배정된 통행량



〈그림 6〉 반복수에 따른 교통수단별 V_m값의 변화



〈그림 7〉 $\partial h_{tr}/\partial f_{tr}$값의 변화

〈표 1〉 최종분석결과

지표	c^{od}_{au}	c^{od}_{tr}	c_{od}	h^{od}_{au}	h^{od}_{tr}	V_{au}	
최종결과	4.500	4.499	4.500	2.500	7.499	0.000116	-0.00012

Ⅴ. 결론 및 향후연구

본 연구에서는 다수의 교통수단을 함께 고려하는 복합교통모형(multimodal transportation model)에 대한 기초적인 이론과 모형을 제시하였다. 제시된 모형은 교통수단간 환승을 명시적으로 고려하였으며, Wardrop의 사용자 균형원리를 수단간 균형으로 확장하여 동적체계(dynamic system)로 모형화하였다. 제시한 모형은 교통수단선택(transportation mode choice)과 경로선택(route choice)이 모형내에서 내재적으로 동시에 결정된다는 장점이 있다.

본 연구에서 다룬 복합교통모형은 이제 새롭게 시작하는 연구분야로 국내외로 관련연구가 적으며, 해야 할 많은 연구과제들이 남아 있다. 먼저, 본 연구에서는 다루지 못했지만, 교통수단간의 상호 영향을 고려한 비분리 통행비용함수(non-separable cost function)을 도입하여 모형화시킬 필요가 있으며, 이 경우 의미 있는 민감도값을 도출할 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 본 연구에서는 고정수요를 가정했지만 가변수요를 도입하는 경우, 대중교통 운송횟수에 대한 수요변화도 분석할 수 있을 것으로 보인다. 이런 한계에도 불구하고 본 연구에서 제시한 복합교통모형은 환승을 명시적으로 고려할 수 있기 때문에 기존에 다루지 못했던 여러 교통정책들을 평가할 수 있을 것으로 보인다. 먼저, 버스우선처리 등과 같은 대중교통정책들과 혼잡통행료, 주행세, 주차요금 등과 같은 요금정책들에 대한 평가가 현실적으로 가능해 질 것으로 보이며, 도로신설 및 도로운영기법들의 평가에도 본 모형이 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

임용택(2006) "동적체계를 이용한 교통망모형의 개발", 서울도시연구 제7권 제2호, 13-24, 2006. 6.

임용택, 김현명(2006) "동적과정을 이용한 가변수요 통행배정모형의 알고리듬 개발", 대한교통학회지 제24권 제2호, 169-178, 2006. 4.

임강원, 임용택(2008) 교통망분석론, 개정판, 서울대출판부.

De Cea, J. and J. E. Fernandez(1993) "Transit Assignment for Congested Public Transport System: An Equilibrium Model", Transportation Science, Vol. 27. No. 2. 133-147.

Jin, W.L.(2005) "The dynamic system of the traffic assignment problem : Part 1. Theory", Working paper UCI-ITS-TS-WP-05-01, ITS, University of California, Irvine.

Sheffi Y.(1985) Urban transportatio n networks, Prentice-Hall.

Smith, M. J., 1984, "The Stability of a Dynamic Model of Traffic Assignment -An Applicatio n of a Metho d of Lyapunov", Transportation Science Vol. 18, No. 3, 245-252.