대한민국의 학문 발전에 기여하고자 하는 세경사 이해연사장의 결단으로 본서 "동연 · 영상과 함께 배우는 Lebesgue적분 입문"의 PDF를 웹에 올립니다. 원하시는 모든 분이 다운로드를 하실 수 있습니다.

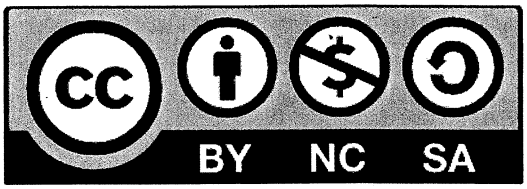
2015. 09. 30.

세경사 대표 이해연 이해연.

저자 최병선 崔秉善

이 저작물에는 크리에이티브 커먼즈 저작자표시-비영리 4.0 국제 라이선스가 적용 되어 있습니다. 이 라이선스의 설명을 보고 싶으시면 다음 웹사이트를 참조하세요.

http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/



* 높은 해상도의 출력과 제본을 원하시면, 현대문화사 (hun1249@hanmail.net)로 연락하십시요.

동연 · 영상과 함께 배우는

Lebesgue 적분 입문

IM&F시리즈 7

동연 · 영상과 함께 배우는

Lebesgue 적분 입문

최 병 선 지음

世 經 社

To IK

머 리 말

어떻게 하면 Lebesgue적분의 개념을 쉽게 설명할 수 있을까? 이것이 오랫동안 본저자의 머리 속을 맴도는 문제였다. 여기서 쉽게 설명한다는 것은 고등학교에서 미적분을 배운 학생들이 이해할 수 있는 수준을 의미한다. 그래서, 본저자의 딸 '동연'과 아들 '영상'이가 대학교 2년생과 1년생일 때, 본저자가 Lebesgue적분을 가르친다는 마음으로 책을 쓸 것을 오랫동안 생각해왔다. 특히, 부모와 자식 간의 관계를 돈독히 하고 또 새로운 수학을 배우는데 대한 두려움을 없애주려고, 옛날 그리스에서 수학을 가르칠 때 쓰던 방식인 '대화'의 형식으로 원고를 쓰기로 했다. 원래 원고작성을 시작했을 때의 책제목은 '고등학교 수학에서 Lebesgue적분으로'였다. 그러나, 원고를 학부생과 대학원생들에게 읽혀본 결과, 고등학교에서 어지간히 수학을 잘한 학생이 아니면 무리라고 해서 책의 제목을 바꾸었다. 그러나, 아직도 본저자의 생각은 고등학교에서 수학의 기본적 소양을 알차게 닦은 대학생이라면 본서를 충분히 읽을 수 있으리라 생각한다(어쩌면 본저자의 바람일지도 모르지만…).

본저자의 생각으로는, 앞으로 순수학문에서 뿐만 아니라 실생활에서도 확률적(stochastic)이라는 단어가 매우 중요해질 것이다. 예를 들어, IT의 바탕이 되는 정보이론, 신호와 영상이론, 통신, 그리고 최근 들어 발전속도가 아주 빠른 재무이론(finance) 등에서는 어떤 문제를 결정적(deterministic)이 아닌 확률적이라는 관점에서 접근해야 하는 경우가 많다. 이러한 확률적 현상을 이해하고, 분석하고, 응용하는데 확률론이 매우 중요한 역할을 하는 것은 당연하다. 그리고, 확률론을 제대로 공부하기 위해서는 Lebesgue적분을 알아야만 한다. 또한, 금융공학, 정보과학, 양자역학 등을 이해하는데 Hilbert공간이라는 개념은 필수불가결한 것이다. 이러한 Hilbert공간을 구축하는데도 Lebesgue적분이 꼭 필요하다. 따라서, Lebesgue적분은 다양한 학문들을 익히는데 필요하며, 그 필요성은 앞으로 더욱 커질 것이다. 본서는 이러한 Lebesgue적분을 소개하는 입문서이다. 본서는 결코 Lebesgue적분을 자세히 설명하는 책은 아니다. 본서의 수준은 다음 책들을 읽기 위한 기초를 다지는 정도가 될 것이다.

이외숙 · 최병선 (2003). 『측도론』, 세경사.

이성백 (2002). 『확률론』, 세경사.

본서를 만드는데도 역시 많은 사람들의 도움이 있었다. 우선, 본서를 읽고 평을 해준 연세대학교 대학원생들인 이상원, 김기온, 그리고 정여진에게 감사한다. 항상 그러했듯이, 부경대학교의 이성백 교수께서 원고를 읽고 많은 점을 지적해주었다. 그리고 본서가 출판될 수 있도록 도움을 주신 世經社 김재은 사장님과 직원 여러분에게 감사한다.

본서는 본저자가 쓴 스무 번째 책이다. 일부 독자들은 책의 구성에서 짐작했겠지만, 본저자가 쓰고 있는 여러 원고들 중에서 본서의 원고를 스무 번째 책으로 선택한 이유는 본서를 가족에게 헌정하기 위한 것이다. 항상 너무 바빠서 가족과 많은 시간을 지내지 못하는 미안함을 스무 번째 책에 담겠다는 것이 지난 몇 년 동안의 다짐이었다. 사랑하는 동연, 영상 그리고 아내에게 미안함과 고마움을 이 글로써 대신하고자 한다.

2003년 11월
Iraq의 어린이들을 생각하면서
안산을 걷던 날

최 병 선 씀

차 례

머 리 말 7

제 1 장 서 론 13

1.1 왜, Lebesgue적분을 공부해야 하는가? / 13
1.2 미적분의 역사 / 15
1.3 Newton과 Leibnitz / 21
1.4 Cavalieri의 원리 / 27

제 2 장 무한과 집합론 33

2.1 집합론의 등장 / 33
2.2 집합의 농도 / 34
2.3 가산집합 / 37
2.4 카아티젼곱 / 41
2.5 농도의 대소 / 43
2.6 멱집합의 농도 / 45
2.7 비가산집합의 농도 / 47

제 3 장 Lebesgue측도 53

3.1 Lebesgue적분의 필요성 / 53
3.2 Riemann적분이 불가능한 함수 / 59
3.3 Riemann적분과 Jordan측도 / 63
3.4 Lebesgue측도 / 66
3.5 대수와 σ-대수 / 73
3.6 Banach공간과 Hilbert공간 / 75
3.7 Borel집합 / 80
3.8 영집합 / 86
3.9 Cantor집합 / 88

제 4 장 Lebesgue적분 95

4.1 Lebesgue가측함수 / 95
4.2 Lebesgue적분의 정의 / 99
4.3 Lebesgue적분의 성질 / 104
4.4 Lebesgue적분의 수렴정리들 / 108
4.5 Littlewood의 세 가지 원칙들 / 122
4.6 Lebesgue적분의 수렴정리들의 증명 / 124

제 5 장 복습과 발전 131

5.1 가산가법성 / 131
5.2 Carathéodory정리 / 133
5.3 가측집합과 σ-대수 / 137
5.4 가산가법성의 증명 / 140

제 6 장 Lebesgue측도와 확률론 143

6.1 확률측도 / 143
6.2 누적분포함수 / 151
6.3 확률밀도함수 / 152
6.4 절대연속분포 / 154
6.5 누적분포함수의 분해 / 156
6.6 결 론 / 160

참고문헌 165

색 인 167

제 1 장

서 론

1.1 왜, Lebesgue적분을 공부해야 하는가?

F : 이제 너희들도 고등학교를 졸업했으니 미분과 적분을 조금은 알고 있겠지? 지금부터는 앞으로 많이 쓰이게 될 새로운 적분에 대해서 아빠와 공부하기로 하자.

Y : 아빠! 우리가 고등학교에서 배운 적분 말고도 또 다른 적분이 있어요?

D : 이 바보야, 너는 그것도 모르니?

F : 그렇단다. 너희들이 고등학교에서 배운 적분을 Riemann적분이라고 한다. 그러나, 면적(area)이나 부피(volume)에 관한 문제들 중에는 Riemann적분으로는 해결되지 않는 것들이 있단다. 그래서, Stieltjes적분, Lebesgue적분, Wiener적분, Ito적분 그리고 Stratonovich적분 등이 여러 학문분야에 도입되어 사용되고 있단다. 이 중에서도 Lebesgue적분은 확률문제를 다루는데 있어 중요한 역할을 한다. 아빠는 너희들에게 Lebesgue적분의 기초적인 개념을 가르쳐주고 싶구나.

D : 아빠! 꼭 Lebesgue적분을 배워야 하나요?

F : 앞으로는 순수학문에서 뿐 아니라 실생활에서도 '확률적'이라는 단어가 매우 중요해질

것이다. 예를 들어, IT의 바탕이 되는 정보이론(information theory), 신호와 영상이론(signal and image procesisng), 통신(communications)이나 최근 들어 발전속도가 아주 빠른 재무이론(finance) 등에서는 어떤 문제를 결정적(deterministic)이 아닌 확률적(stochastic)이라는 관점에서 접근해야 하는 경우가 많다. 이러한 현상을 이해하고, 분석하고, 응용하는데는 확률론이 아주 중요한 역할을 한단다. 그리고, 확률론을 제대로 공부하기 위해서는 Lebesgue적분이 꼭 필요하단다.

Y : 아빠! 그럼 고등학교에서 배운 Riemann적분은 쉬운거고, 대학교에서 배우는 Lebesgue적분은 어려운 것이어요?

F : 아빠는 그렇게 생각하지 않는다. 고등학교에서 체계적인 훈련을 받아서 스스로 수학을 깨우칠 능력을 지닌 학생에게는 Lebesgue적분을 이해하는 것이 그리 어렵지는 않을 것이다. 물론, 입시를 위해 주입식으로 수학을 공부한 사람에게는 매우 어렵게 느껴지겠지만….

D : 아빠 서재에 있는 Lebesgue적분에 관한 책들은 이해할 수 있기는커녕 단순히 읽어내려 가는 것조차도 어려워요. Lebesgue적분이 그렇게 중요하다는데, 왜 Lebesgue적분이 필요한지를 속시원히 말해주는 책이 없어요.

F : 글쎄…. 현재로서는 면적이나 부피가 만족해야만 하는 성질들은 Riemann적분으로는 설명할 수 없으나 Lebesgue적분으로는 설명 가능한 성질이 있다는 정도만 알면 될 것 같다. 특히, 확률론을 공부하는데는 Lebesgue적분이 Riemann적분과 어떻게 다른가 하는 정도만 알면 충분할 것 같구나.

Y : 그 차이는 어디서 오는 것이어요?

F : Riemann적분은 Jordan측도를 바탕으로 한 적분이고, Lebesgue적분은 Lebesgue측도를 바탕으로 한 적분이다. 따라서, Jordan측도와 Lebesgue측도의 차이를 이해하면, 이 두 적분들 사이의 차이를 이해할 수 있을 것이야.

D : 아빠가 우리들에게 가르쳐 주시려고 하는 것이 그 차이군요.

F : 그렇단다. 이 책의 목적은 Riemann적분을 알고 있는 사람이 이 책의 내용을 다 이해하면 Lebesgue적분이 무엇인지를 알 수 있도록 하는 것이란다.

Y : 이 책을 읽기 위해서는 우선 고등학교에서 배운 적분, 즉 Riemann적분을 이해하고 있어야겠군요.

F : 그렇다. 금융공학, 정보과학, 양자역학 등을 이해하는데 Hilbert공간이라는 개념은 필수 불가결한 것이다. 이러한 Hilbert공간을 구축하는데도 Lebesgue적분이 꼭 필요하다. 따라서, Lebesgue적분은 다양한 학문들을 익히는데 꼭 필요하며, 또한 앞으로는 Lebesgue적분이 더욱 중요해질 것이다. 그래서, 아빠가 동연이와 영상이에게 직접 Lebesgue적분의 개념을 심어주고 싶단다.

1.2 미적분의 역사

F : 아빠가 너희들에게 항상 강조했듯이, 어떤 학문이든 역사적인 접근을 하는 것은 매우 중요하단다. 이는 앞서간 사람들이 어떻게 생각했는지를 이해하고, 이를 바탕으로 미래를 생각해볼 수 있기 때문이지. 아빠는 수학도 예외는 아니라고 생각한다. 우선 미적분의 역사에 대해서 간단히 살펴보기로 하자.

Y : 아빠! 미적분은 Newton과 Leibnitz가 발견한 것이지요?

D : 그것을 모르는 사람이 어디 있니?

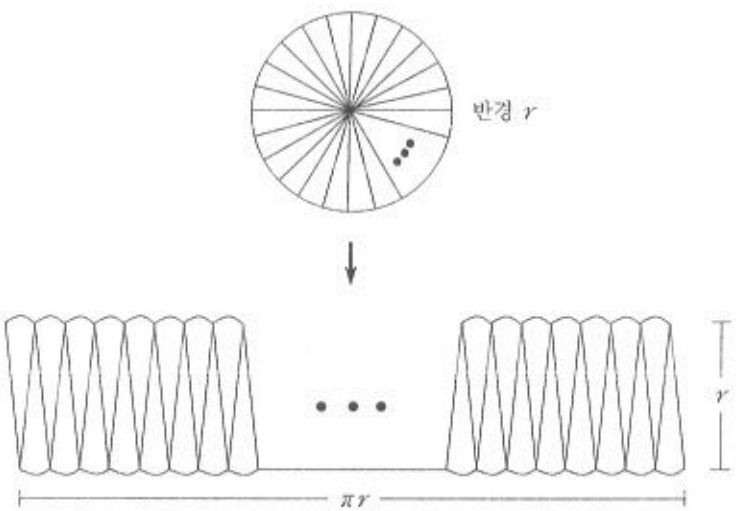
F : 꼭, 그렇다고 할 수는 없단다. 고대 이집트사람들도 적분의 기본적인 개념을 알고 있었으니까. 너희들도 이집트는 나일강의 산물이라는 말은 들었겠지? 고대 이집트의 풍요로움은 나일강의 범람에 의한 것이었다. 그러나, 이러한 나일강의 범람은 파라오에게는 골치거리였을 것이다. 한 번의 범람이 지나가면, 나일강의 위치와 폭이 바뀌었을 것이다. 따라서, 강변의 비옥한 땅을 소유한 귀족들 사이의 분쟁이 끊이지 않았을 것이고, 이러한 분쟁을 현명하게 판결해주기 위해서 파라오는 토지를 측량하는 방법이 필요했을 것이다. 땅을 측량한다는 것은 곧 면적을 계산한다는 것이고, 이는 적분의 개념이 필요했다는 뜻이란다.

Y : 아빠! Cleopatra도 적분을 알았을까요? 미인과 미적분…. 잘 어울리지 않는데요?

D : Boys will be boys!

F : Cleopatra 자신이 적분을 알았는지는 알 수 없지만, Cleopatra가 알렉산드리아의 도서관을 지키려고 노력했던 기록을 바탕으로 생각하면, 그 여왕은 학문의 중요성을 인식했던 것은 분명하다. 아빠가 너희들에게 질문을 하나 하마. 미분과 적분에서 가장 필요한 개념은 무엇이지?

【그림 1.2.1】 원의 넓이



Y : 그거야, 극한(limit)이죠. 미분은 비(ratio)의 극한이고, 적분은 합의 극한이니까요.

F : 아주 잘 대답했다. 미적분을 이해하기 위해서는 극한이라는 개념을 필요로 한다. 보통 사람들은 아주 가까이 간다는 것을 극한이라는 말로 대신한다. 그러나, 극한이라는 것은 상당히 어려운 개념이다. 동연아, 언제 극한의 개념을 처음 배운 것 같니?

D : 음~, 초등학교 때 원의 넓이를 계산하는 공식을 유도하면서 처음 배운 것 같아요. 반지름이 r인 원의 넓이를 계산하기 위해서 다음과 같이 생각했어요. <그림 1.2.1>에서처럼, 원을 피자파이라고 생각하고, 이 피자파이를 $2n$개의 조각들로 나누어, 그 중에서 n개는 호(arc)가 아래쪽을 향하게 붙여놓고, 이 두 조각의 피자조각들 사이에 다른 한 피자조각을 끼워놓아요. 결과적으로, 피자의 넓이는 밑변의 길이가 원주 $2\pi r$을 둘로 나눈 πr이고 높이는 원의 반지름 r인 직사각형의 넓이와 비슷하고, 따라서 원의 넓이는 πr^2과 비슷해요. 이 때, 피자조각들의 개수를 무한히 크게 하면, 즉 $n \to \infty$이면 이 직사각형의 넓이는 πr^2에 수렴해요. 즉, 원의 넓이는 πr^2이어요.

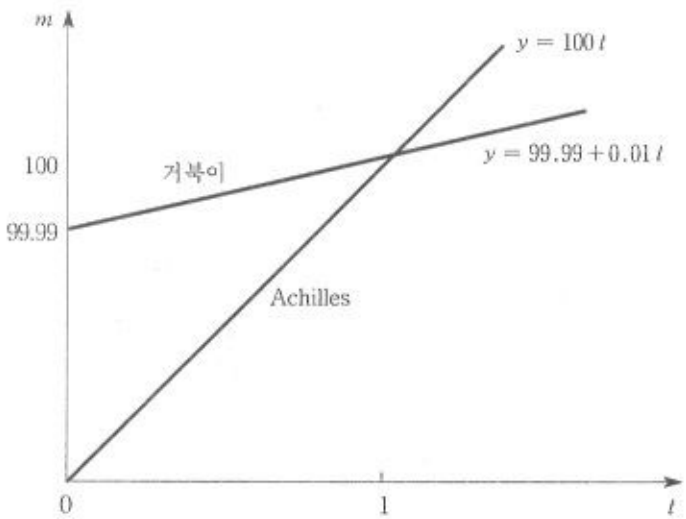
F : 아주 잘 설명했다. 이러한 방법은 천문학의 대가인 Kepler (1571~1630)가 원의 넓이를 구하는데 사용한 방법이란다.

【그림 1.2.2】 17세기 일본문헌에 나타난 원의 넓이를 구하는 방법

D : 아빠, 저는 이 방법을 Kepler가 발견했다고 생각하지는 않아요. 서재에 있는 『*A History of Pi*』라는 책의 19쪽에 <그림 1.2.2>가 수록되어 있어요. 이 그림은 1698년에 쓰여진 일본의 문헌에 나타난 것이어요. 또한, Leonardo da Vinci도 16세기에 이 방법을 사용했다고 해요.

F : I am proud of you! 그렇다. Kepler가 이 방법을 사용하기는 했지만, 많은 사람들은 이 방법은 이미 고대 메소포타미아에서 사용되었다고 생각한단다. 로마제국과 중세가톨릭교회의 지배 하의 1000여 년 동안, 유럽의 학문 수준은 고대 이집트나 메소포타미아의 수준에서 크게 발전되지 않았다. <그림 1.2.1>의 방법도 르네상스시대에 고대 문명의 흔적을 다시 찾아낸 것이라고 할 수 있겠지. 여하튼 오늘날에는 초등학생들도 이 방법을 알고 있지만, Kepler시대의 학자들에게는 놀라울 정도로 대담하게 무한의 성질을 이용한 것이었단다. 그런데, 이러한 방법은 고대의 기하학에 심취해 있던 학자들의 반격에 부딪쳤다. 그들이 어떠한 논리를 폈는지 짐작할 수 있겠니?

【그림 1.2.3】 Zenon의 파라독스



Y : 그것은 아마도 Zenon (B.C. 490~B.C. 429경)의 파라독스(paradox)와 관계가 있었을 거에요. 왜냐하면, Kepler의 방법에는 극한이라는 개념이 들어갔으니까요.

F : 그렇다. 영상이가 아빠와 누나에게 Zenon의 파라독스를 설명해주겠니?

Y : Zenon의 파라독스는 그리스신화에 나오는 Achilles의 문제 또는 화살의 문제로 설명할 수 있어요. 즉, 달리기를 잘하는 Achilles는 앞에 가는 거북이를 추월할 수 없다는 것이지요. 예를 들어, Achilles는 초속 100미터로 달리고, 거북이는 초속 1센티미터로 달린다고 해요. 거북이가 Achilles의 앞쪽 99.99미터인 지점에 있다고 가정하고, Achilles와 거북이가 동시에 같은 방향으로 달린다고 가정해요. Achilles가 거북이가 있던 장소까지 99.99미터를 달려가는 동안, 거북이는 0.9999센티미터를 달리지요. 다시, Achilles가 0.9999센티미터 달려가면, 거북이는 0.00009999센티미터 앞쪽에 있어요. 이와 같은 방법으로 설명하면, Achilles가 거북이를 추월할 수 없다는 결론을 얻을 수 있어요. 그러나, 실제 현상은 Achilles가 쉽게 거북이를 추월하므로, 이는 파라독스이어요.

F : <그림 1.2.3>처럼, XY-평면에서 X축에 시간을, 그리고 Y축에 Achilles와 거북이가 달린 거리를 그려보면, 이러한 Zenon의 논리가 잘못되었다는 것을 쉽게 알 수 있단다. Zenon의 논리대로라면, 거북이가 달리는 시간의 합은 1초 미만이고 또한 Achilles가

달리는 시간의 합도 1초 미만이다. 그러나, 만일 거북이나 Achilles가 달리는 시간이 1초 이상이면, Achilles는 거북이를 추월할 것이다. 오늘날 Zenon의 파라독스는 단순한 우문에 불과하지만, 그리스시대에는 이러한 무한문제의 해를 찾는 것이 불가능하다고 생각했다. 다시 Kepler가 원의 넓이를 구하던 시절로 돌아가보자. 당시에 그리스의 학문에 심취되어 있던 학자들은 다음과 같이 Kepler의 방법에 반격을 가하고, 무한이라는 개념이 기하학에 들어오는 것을 허락하지 않았다. 즉, 이 미소한(infinitesimal) 피자조각들을 나열한 것의 밑변의 합이 원주와 같다는 것은 맞다. 그러나, 만일 $n \to \infty$이면, 미소한 피자조각의 밑변은 점으로 볼 수 있다. 그러나, 점은 위치를 나타낼 뿐 크기가 없는 것이므로, 크기가 없는 점들이 아무리 많이 모여도 원주가 될 수 없다는 것이다. 물론 고대 그리스시대의 학자들도 같은 생각을 했지만, 무한의 개념으로 명확하게 설명한 것은 아니었다. 그러나, 시대가 발전함에 따라, 언제까지나 무한이라는 개념을 수학영역 밖에 둘 수는 없었단다.

D : 아빠! 아까 설명하신 Kepler의 방법은 고등학교 때 배운 Cavalieri (1598~1647)의 원리와 같은데요.

F : 그렇다. 옛날에는 동서양을 불문하고 학문을 하는 것은 사치였다고 할 수 있다. 먹고 살기도 힘든데 학문을 한다는 것은 어지간한 특권층이 아니면 불가능한 것이었지. 언젠가 일본의 센다이에 갔다가 거기에서 큰 신사를 구경한 적이 있었다. 그 때 400여 년 전 이 신사의 승려가 쓴 책을 그 지방의 대학교수가 현대의 수학으로 풀어놓은 책을 기념품으로 사온 적이 있었다. 그 책의 내용이 오늘날 고등학교 수학으로는 풀 수 없는 고차원적인 것이라 매우 놀랐었지. 마찬가지로, 서양에서도 귀족이나 가톨릭이나 기독교에 귀의한 종교인들에 의해서 수학이나 과학이 많이 발전하게 되었다. Cavalieri는 유명한 Galilei (1564~1642)의 수제자인 Castelli에게서 수학을 사사한 예수교의 승려들 중의 한 사람이다. Cavalieri는 Kepler가 제시한 원의 넓이를 구하는 방법에서 힌트를 얻어, 면적이나 부피를 구하는 체계적인 방법을 발견하였다. 이것이 고등학교에서 Cavalieri의 원리라고 배우는 것이다. 이 Cavalieri의 원리에 대해서는 뒤에서 자세히 다루게 될 것이다. Cavalieri는 다음 식을 증명하였다.

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}, \quad (n = 1, 2, \cdots, 9)$$

Y : 미적분이 Newton과 Leibnitz에 의해 발견되었다고 알려져 있지만, 실제로는 그 전에

수많은 사람들에 의해서 미적분에 관한 다양한 연구가 이루어졌었군요.

D : 미적분은 Kepler나 Cavalieri뿐 아니라 Fermat, Decartes, Torricelli 등 수많은 수학자들에 의해서 연구되었어요. 그러나, 17세기와 18세기에 걸쳐 시대의 요구로 유럽의 수학계는 급격한 혁신기를 맞이했는데, 그 중심에는 Newton과 Leibnitz가 있었고 그들이 미적분의 체계를 세웠다고 할 수 있어요.

F : 아까도 말했듯이, 미분과 적분을 정의하기 위해서는 극한의 개념을 필요로 한단다. 극한의 개념을 미적분에 도입한 사람은 Cauchy (1789~1857)이다. Cauchy는 1821년 그의 저서 『에콜폴리테크닉에서의 해석학과정』에서 극한을 다음과 같이 정의했다. 변수가 취해가는 값이 차츰 일정한 값에 접근해서 그 차이가 임의로 주어진 값보다 적어질 때, 그 일정한 값을 처음 변수의 극한이라 한다. Cauchy는 이 책에서 극한값 이외에도 오늘날 우리가 사용하는 변수, 상수, 함수, 무한소, 연속 등을 정의하였다. 또한, 1823년 그의 저서 『무한소해석강의』에서는 오늘날의 $\varepsilon-\delta$ 법을 사용하였다. Cauchy는 이 책에서 도함수와 정적분을 정의하고, 평균값정리와 미적분학의 근본정리(the fundamental theorem of calculus)를 제시하였다. 너희들도 이 정리들을 알고 있지?

D : 고등학교에서 배웠어요. 평균값정리는 Rolle의 정리를 일반화한 것이죠. Rolle (1652~1719)은 1691년 다음과 같은 정리를 발견했어요. 만일 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능하며, 또한 만일 $f(b) = f(a)$이면, $f'(c) = 0$을 만족하는 $c \in (a, b)$가 존재한다. 이 정리는 너무 당연하게 보였기 때문에, 어느 누구도 증명하려 하지 않았어요. 평균값정리는 이 Rolle의 정리를 확장한 것으로 다음과 같아요. 만일 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 또한 만일 개구간 (a, b)에서 미분가능이면, 다음 식을 만족하는 $c \in (a, b)$가 존재한다.

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Cauchy 이전의 사람들은 이 평균값정리의 중요성을 인식하지 못했어요. Cauchy는 평균값정리를 사용해서, 미분과 정적분 사이의 관계를 나타내는 미적분학의 근본정리 (the fundamental theorem of calculus)를 발견했어요. 그 후, 사람들은 평균값정리의 중요성을 인식하기 시작했어요. 오늘날, 이 평균값정리를 일반화한 다음과 같은 정리를 Cauchy의 평균값정리라고 불러요. 만일 함수들 $f(x)$와 $g(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 또한 만일 개구간 (a, b)에서 미분가능이면, 다음 식을 만족하는 $c \in (a, b)$가 존재한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

F : 아주 열심히 공부해 왔구나. 영상이는 이 Cauchy의 평균값정리를 사용해본 적이 있니?

Y : 그럼요. L'Hospital정리가 Cauchy의 평균값정리의 따름정리라고 할 수 있으니까요.

F : 그렇다. 여하튼, Cauchy는 평균값정리를 사용해서 미적분학의 근본정리를 발견했다. 반면에, Riemann (1826~1866)은 같은 문제를 Cauchy와는 반대방향에서 다루었다. 영상아, 고등학교 때 정적분을 어떻게 정의했지?

Y : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음과 같은 합을 정의해요.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k)$$

여기서 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$이고, $x_k \le c_k \le x_{k+1}$이어요. 만일 S_n의 극한이 존재하면, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 구간 $[a, b]$에서의 적분이라고 해요. 즉, 다음과 같이 정적분을 정의하지요.

$$\lim_{\max_k |x_{k+1}-x_k| \to 0} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) \right\} = \int_a^b f(t)\,dt$$

F : 그렇다. 이러한 정적분의 정의가 Riemann에 의한 정의이다. 그리고, 합 S_n을 Riemann합이라고 부른다. 엄격히 말하면, Riemann은 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이라고 가정하지 않고 유계라고(bounded) 가정했다. Riemann은 불연속점들이 있어도 적분가능한 예를 들어서, 연속함수와 적분가능함수의 차이를 명확히 하였다. 이렇게 Riemann이 정의한 적분을 Riemann적분이라 부른다. 그러나, 일반적으로 Riemann적분은 연속함수에 대해서 정의한다. 앞에서도 언급했듯이, 너희들이 고등학교 수학시간에 배운 적분은 Riemann적분이다.

1.3 Newton과 Leibnitz

F : 너희들은 아빠가 지난번에 준 『과학사 속의 대논쟁 10』이라는 책을 읽었겠지. 그 책에서 미적분학은 거의 동시에 영국의 Isaac Newton과 독일의 Gottfried Wilhelm

Leibnitz에 의해서 독립적으로 발견되었다는 것을 알 수 있었을 것이다. 사실, 이 두 사람들의 분쟁은 단순히 수학사적 분쟁이 아니라 철학적 · 종교적 그리고 외교적 분쟁이기도 하였다. 동연이가 Newton의 어린 시절에 대해서 간단히 말해보겠니?

D : Isaac Newton은 1642년 12월 25일 영국의 Woolsthorpe이라는 작은 시골의 농가에서 태어났어요. Newton의 아버지는 얼마되지 않는 농지를 경작해서 간신히 생계를 유지하였지요. 그는 36살에 이웃마을 처녀와 결혼하였어요. 그러나 불행하게도 몇 개월 만에 사망하였어요. 그 때, 어머니의 뱃 속에는 Isaac이 있었어요. 즉, Newton은 유복자이지요. Newton은 미숙아로 태어났고, 또한 아주 작고 약한 아이였어요. Newton이 3살 때, 어머니는 이웃의 목사와 재혼을 하였고, Newton은 이부형제들과 같이 자랐지요. 어렸을 때, Newton은 천재의 싹을 전혀 보이지 않았다고 해요. 초등학교 시절 그는 결코 신동이 아니었고, 도리어 약간 뒤쳐진 멍청한 게으름뱅이였어요. 따라서, 학교 성적은 늘 최하위였죠. 동급생들은 허약하고 멍청해보이는 Newton을 놀림감으로 삼았고, 이에 Newton은 그 상황을 극복하기 위해서 열심히 공부를 해야겠다고 마음을 먹었다고 해요. 그 후, 그는 완전히 다른 사람처럼 되어 공부에 열중했고, 그 결과 학교를 졸업할 때 전교 최고의 성적을 얻었지요. 초등학교 시절에도 그는 학과공부 이외에 다양한 역학적인 완구를 고안하고 제작하는 것을 즐겼다고해요. 훗날 Newton이 유체역학이나 중력에 관한 물리학적 발견을 이루는 싹은 이미 이때부터 생겼다고 할 수 있겠지요. Newton이 14살 때, 의붓아버지가 죽어서, 그는 가족과 함께 고향으로 돌아갔어요. 고향으로 돌아간 Newton은 학업을 포기하고 농사에 전념해서, 어머니와 함께 가족의 생계를 돌보아야 했지요. 그러나, 그의 성격은 농사에 맞지 않았어요. 그는 시간이 있을 때마다 수학책이나 물리책을 읽으며, 밤을 새우는 일도 드물지 않았다고 해요. Newton의 숙부는 Newton과 같은 수재를 평생 농부로 썩혀서는 안 된다고 Newton의 어머니를 설득하였어요. 이 숙부의 지원을 받은 Newton은 18살 때인 1660년, 숙부의 모교인 Cambridge대학에 진학하였어요.

F : 아주 잘 정리해주었다. 앞에서도 말했지만, 옛날에는 먹고 살기가 힘들어서, 귀족이나 승려와 같은 특권층을 제외하고는 공부를 할 기회가 없었다. 그래도, 1660년 쯤에는 사람들이 많이 깨어 있었고, 특히 Newton의 숙부는 목사로서 다른 사람보다 학문의 중요성을 아는 사람이었다. 이러한 작은 행운이 인간의 세계관을 바꾸게 한 위대한 사람을 탄생시킨 것이다. 영상이가 Newton의 젊은 시절에 대해서 말해보렴.

Y : Cambridge대학에서 Newton은 평생의 스승인 Isaac Barrow (1630~1667)를 만났어

요. Barrow는 Cambridge대학의 수학교수였지만, 정치적 박해를 받아서 1655년부터 1658년까지 프랑스, 이탈리아, 독일, 그리고 동양을 유랑하였어요. 이러한 방랑길에 새로운 지식을 접한 그는 지식이 풍부하고 생각이 깊은 사람이었어요. 그는 일찍이 Newton의 우수한 재능을 발견하고는, Newton을 특별히 지도하였어요. Newton도 Barrow교수의 학식과 온정에 깊이 감사하였지요. 훗날, Barrow교수는 스스로 Cambridge대학의 교수직을 사직하고, Newton을 후계자로 만들었어요. 교수직에서 은퇴한 Barrow는 승려로 활동하였어요. Newton이 제시한 미적분학의 근본사상인 접선과 역접선의 문제는 Newton과 Barrow의 공동연구에 따른 것으로 전해지고 있어요. Barrow교수와 Newton의 아름다운 사제관계는 오늘날까지도 인구에 회자되고 있지요. Newton이 Cambridge대학 재학중에 기록한 수첩이 오늘날까지 현존하는데, 그 안에는 각의 등분법이나, 폐곡선의 넓이를 구하는 것, Wallace가 제시한 무한의 수론(arithimetica infinitorum)의 주석 등 많은 기하학문제와 역학문제에 대한 해답이 실려 있어요. 이는 Newton의 대학시절 공부가 수학과 과학에 집중되었음을 의미하지요. Newton은 23살에 학사(Bacholar of the Arts)를 받았어요. 미적분학에 대한 Newton의 연구는 1664년 경부터 시작되었다고 해요. 1665년에 페스트가 Cambridge시에 창궐하였고, 이로인해 Cambridge대학은 휴교를 하였지요. 고향에 돌아온 Newton은 광학과 수학의 연구에 전력하여, 1665년과 1666년에 걸쳐 Newton의 3대 업적으로 불리는 빛의 스펙트럼분석, 만유인력의 법칙, 미적분학을 발견하였어요. 또한, 이 시기에 이항정리, 방정식이론과 무한급수에 관한 여러 정리들을 발견했어요. 전염병이 수그러들어 Newton이 Cambridge로 돌아간 것은 1667년으로, 그는 그 후 앞에서 언급된 연구 성과를 정리하기 위해 전력을 기울였어요. 1668년에는 당시로서는 최고의 학위인 석사(Master of the Arts)를 받고, Cambridge대학의 교수가 되었어요.

F : Newton의 3대 업적은 모두 20대 초반에 이룬 것으로 인류사를 바꾼 것이라고 할 수 있을 정도로 중요한 것이다. 많은 사람들이 수학이나 물리학에서는 20대와 30대에 어떤 업적을 이루지 못하면, 그 후로는 별다른 성과를 얻지 못하는 것으로 말들을 한다. 그러나, 아빠의 생각은 다르다. Newton시대와는 달리 오늘날은 지식(knowledge)과 정보가 넘쳐나는 시대이다. 그럴듯한 새로운 것을 만들려면, 이에 관한 기존의 지식들을 어느 정도 파악하고 있어야 한다. 이 어느 정도라는 것이 옛날과는 달리 평생을 배워도 따라갈 수 없을 만큼 많은 것이다. 따라서, 혁신적이며 유용한 생각을 해내는 것이 쉽지 않은 세상이다. 너희들은 어떤 일이든 조급하게 생각하지 말고, 길게 그리고 깊이 생각하며 살아가기를 바란다. 동연아, Newton의 연구태도는 어떠하였니?

D : Newton의 조교의 글에 의하면, Newton은 항상 연구에 몰두하고, 아주 드물게 다른 사람을 방문하거나 초대하였다고 해요. 그는 어떤 취미생활도 하지 않았고, 더구나 건강을 돌보는데 게을리 하였어요. 그에게는 공부 이외에는 모든 것이 무의미한 것이었나 봐요. 지나친 연구생활과 이에 따른 불규칙한 식사와 수면에 의해, Newton은 자주 병에 걸려 병상에 누워 있어야만 했다고 해요. 어느 날, Newton의 집에 촛불로 인한 화재가 발생해서, Newton이 피나는 노력으로 작성한 수많은 귀중한 원고들이 불에 타버렸어요. 그 중에는 오랜 시간 공들여 작성했고, 또한 다시는 만들 수 없는 귀중한 것들도 있었지요. 이 일에 충격을 받은 Newton은 한동안 심한 우울증에 시달렸고 또한 연구할 의욕을 완전히 잃었다고 해요. 1694년에 그의 문하생 중의 한 명이 재무감독청의 장관이 되었는데, 은사인 Newton이 정신적으로 다시 활기를 찾았으면 하는 마음으로 Newton을 왕립조폐국장으로 임명했어요. 1703년, Newton은 왕립학회의 회장으로 추대되었고, 죽을 때까지 이 회장직을 맡았어요. 1705년에 Newton은 여왕에게서 기사 작위(knight)를 받았어요. Newton은 85살에 생을 마치고 Westminster수도원에 묻혔어요.

F : 앞에서 Newton이 미적분을 발견했다고 말했지만, 그와는 독립적으로 Leibnitz도 미적분을 발견한 것으로 알려져 있다. 미적분의 발견에 관한 Newton과 Leibnitz 사이의 논쟁은 그리 점잖은 것이라고 할 수는 없지. 영상이가 Leibnitz의 생애에 대해서 간단히 말해보겠니?

Y : Gottfried Wilhelm Leibnitz는 1646년 7월 1일 독일의 라이프찌히에서 태어나 1716년 11월 4일에 죽었는데 그의 가족은 폴란드에서 온 이주자였다고 해요. 아버지는 라이프찌히대학 도의학(道義學) 교수였으나, Leibnitz가 6살 때 세상을 떠났어요. 따라서, Leibnitz는 홀어머니 밑에서 성장했지요. Leibnitz는 독학으로 기초교육을 마치고, 1661년 15살에 라이프찌히대학에 입학한 후 법학을 공부하였고, 이에나대학에서 철학을 연구하였어요. 그는 아주 박학다식한 사람으로, 전공인 법학 이외에도 수학, 신학, 철학 등 모든 방면에 흥미를 가지고 있었으며, 각 분야에서 그 나름의 독특한 식견을 가졌어요. Leibnitz는 17살에 알트도르프대학에서 법학박사를 받았죠. 그는 알트도르프대학에서 교수를 제의받았지만 이를 거절했어요. 그 후, 24살 때 공소원의 판사가 되어 법률의 개량에 종사했지요. 1672년에 Leibnitz는 파리에 파견되었는데, 그곳에서 당시 유명했던 많은 과학자들과 교류하게 되었어요. 특히, 수학의 대가인 Decartes와 Huygens와 교류하면서, 수학에 큰 매력을 느꼈어요. Huygens는 네덜란드 태생의 물리학자 겸 천문학자로서, 망원경을 개량해서 토성의 둘레를 연구하고, 빛의 파동설에 관한

Huygens의 원리를 발견한 학자예요. Leibnitz는 이들과 교제하면서 진지하게 수학을 연구하게 되었다고 해요. 특히 Huygens는 진자의 진동에 대한 자신의 연구를 정리한 저서를 Leibnitz에게 보내주었고, Leibnitz는 이 책을 정독하면서 고등수학에 흥미를 갖게 되었다고 해요. 1673년 1월부터 3월까지 런던에 머무르는 동안에, 수학자 Bell과 친해졌고, Bell로부터 수학의 연구에 대한 많은 영향을 받았어요. 다시 파리로 돌아온 Leibnitz는 Huygens의 지도 하에서 체계적으로 수학을 공부하였다고 해요.

F : 그래, Leibnitz는 어렸을 때부터 체계적인 수학교육을 받은 사람은 아니다. 그는 취미생활로 수학을 공부한 것이다. 어떤 면에서는 이것이 장점이 되었다고 할 수 있다. 즉, 과거의 수학체계의 관습에 얽매이지 않는 자유분방한 생각으로, 수학적 기호나 계산방법을 고안하였다. 오늘날 우리가 사용하는 비례식 $a:b = c:d$의 표기법은 Leibnitz가 제안한 것이다. 또한, 그는 행렬식(determinant)의 사용을 제안하였다. Leibnitz는 파리에 머물 때, 가감승제를 자유롭게 할 수 있는 편리한 계산기를 발명하기도 했단다. 특히 미적분학을 발견하여, Newton과 거의 같은 시기에 이를 세상에 발표했다. 오늘날, 우리가 사용하는 미분기호 $\frac{dy}{dx}$나 적분기호 $\int$도 Leibnitz가 고안한 것이다. 18세기에 사람들은 미적분은 Newton이 발견한 것이라고 생각했다. 따라서, Leibnitz는 단순히 편리한 여러 표기법들을 고안한 정도이고, 근본적인 원리는 Newton의 발견을 표절한 것에 지나지 않는다고 생각했다. 이러한 미적분의 발견에 대한 논쟁에 대해서 동연이가 설명할 수 있겠니?

D : 1674년 Leibnitz가 기록한 노트에 의하면, 그는 이미 미적분에 대한 해법의 일부를 기록하고 있어요. 그러나, 이것은 아직 학문으로서의 체계를 이루지 못했고, 또한 근본원리에 대한 설명도 없이, 단지 그의 생각의 일부를 기록한 것에 지나지 않았지요. 이러한 생각을 어느 정도 정리된 형태로 발표한 것은 1684년이어요. 이 해에 Newton은 『프린키피아(*Principia*)』의 저술에 집중하기 시작했어요. 이보다 앞선 1676년에 Leibnitz가 왕립협회에 소속된 어떤 수학자에게 무한급수에 관한 자신의 연구를 설명하자, 그 수학자는 Leibnitz에게 그 문제는 이미 Newton이 중요한 결론을 얻어 발표하였다고 말했어요. Leibnitz는 그 수학자에게 Newton의 연구논문을 구해달라고 했고, 1676년 6월 13일과 10월 24일에 Newton의 편지들이 그 수학자에게 도착했어요. 그러나, 한 편지는 단순히 유동량과 유동률에 관한 방정식을 기술하였고, 다른 한 편지는 접선의 역문제에 관한 것이었어요. 즉, Newton은 이 편지들에서 미적분에 대해서 거의 아무것도 가르쳐주지 않았지요. 1677년 6월 21일 Leibnitz는 Newton에게 dx와 dy 표기법을 사

용한 미적분을 소개하고 많은 예제들과 이들의 해법들을 적은 편지를 보냈어요. 결론적으로 말하면, Newton은 미적분을 1665년과 1666년에 걸쳐 발견한 것으로 판단되며, Leibnitz는 1673년에서 1676년에 걸쳐 발견한 것으로 생각되지요. 그러나, Leibnitz는 1684년에서 1686년에 걸쳐 연구결과를 발표하였고, Newton은 1704년에서 1736년에 걸쳐 연구결과를 발표하였어요.

F : 처음에는 Newton과 Leibnitz의 관계가 좋았다. 따라서, 누가 미적분을 먼저 발견했느냐를 두고 그렇게 큰 싸움을 할 이유가 없었다. 모든 큰 싸움이 그러하듯이, 옆에서 부추기는 사람들이 있었지. 영상이가 그 과정을 간단히 말해보겠니?

Y : Wallis는 그의 저서 『대수학』에서 Newton의 미적분에 대해서 언급했어요. 이를 읽은 Johan Bernouille는 Newton이 Leibnitz의 연구를 바탕으로 미적분을 발견했다고 주장했어요. 또한, 1704년에 Newton의 저서 『광학』의 부록에 Newton의 미적분에 대한 논문이 실리자, Leibnitz는 자신이 주도해서 만든 저널 「*Acta Eruditorum*」에 익명으로 이 논문에 대한 비평을 가했지요. 이에 1708년 옥스퍼드대학의 어떤 물리학교수가 왕립협회에 "Leibnitz의 미적분은 Newton이 발견한 결과에서 이름과 기호를 바꾸어 발표한 것이다. 따라서, Leibnitz가 완전히 Newton을 표절한 것이다"라는 서한을 보내었어요. 이것을 묵과할 수 없었던 Leibnitz는 이 문제를 심판해 주도록 영국의 왕립협회에 제소했어요. 왕립협회에서는 심판위원회를 만들어, 이 문제를 철저하게 조사하기로 했지요. 조사는 Newton, Leibnitz, Collins, Huygens 사이에 왕래한 문서들의 날짜와 내용을 바탕으로 진행되었어요. 그 판정은 1712년 발행된 「왕래 서간집(*Commercium epistlicum*)」이라는 문서로 발표되었어요. 이 문서에는 "미적분을 처음 발견한 사람은 Newton이다"라고 적혀 있어요. 그러나, Leibnitz가 표절한 것이라고는 판정하고 있지 않아요. 그런데, 영국의 왕립협회에서 구성한 이 심판위원회의 분위기나 판결문서의 기본적 정신이 Leibnitz에게 적의가 있는 것이었으므로, 국제적으로 왕립협회의 태도를 비난하는 목소리가 커져서, 오랫동안 이 논쟁이 계속되었어요. 이 문제에 영국인과 독일인 사이의 국민감정이 개입된 것은 당연한 일일지도 몰라요. 결국, 누가 미적분을 먼저 발견하였느냐는 싸움은 단순히 수학사적인 문제가 아니라, 철학적 · 종교적 그리고 외교적 분쟁이 관련된 것이었지요.

F : 이제 간단히 결론을 맺을 시간이 되었구나. 미적분을 발견한 것은 Newton이 Leibnitz보다 앞서지만, Leibnitz는 Newton보다 간편한 표기법과 계산법을 이용해서 미적분학을 발달시켰다. Leibnitz가 미적분에 대한 생각을 독자적으로 발전시키는 과정에서

Newton의 편지 등에 의해 약간의 힌트를 얻었을지는 모르지만, Leibnitz가 Newton의 생각을 완전히 표절한 것은 아니란다.

1.4 Cavalieri의 원리

F : 아빠가 너희들에게 수학을 가르쳐 주는 과정에서 첫 번째 어려움을 느꼈던 문제는 뿔의 부피를 설명하는 것이었다. 밑면적이 S이고 높이가 a인 뿔의 부피 V는 얼마지?

Y : 당연히 $V = \frac{1}{3}Sa$이지요.

F : 그렇다. 그러나, 그 당연한 식을 구하기 위해서는 적분의 개념이 필요하다. 너희들이 기억할지 모르겠지만, 초등학교 학생이었던 너희들에게 이 공식을 쉽게 이해시키기 위해서 아빠는 여러 날 고민했단다. 어느 날 안산을 등산하다가, 사각뿔의 공식을 쉽게 유도하는 방법을 생각해 내었단다. 즉, 밑이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 a인 어떤 사각뿔의 부피가 $a^3/3$이라는 것을 너희들에게 증명해 보였다.

D : 아! 기억나요. 아빠는 정육면체를 합동인 3개의 사각뿔들로 나누어, 사각뿔의 부피를 구했어요.

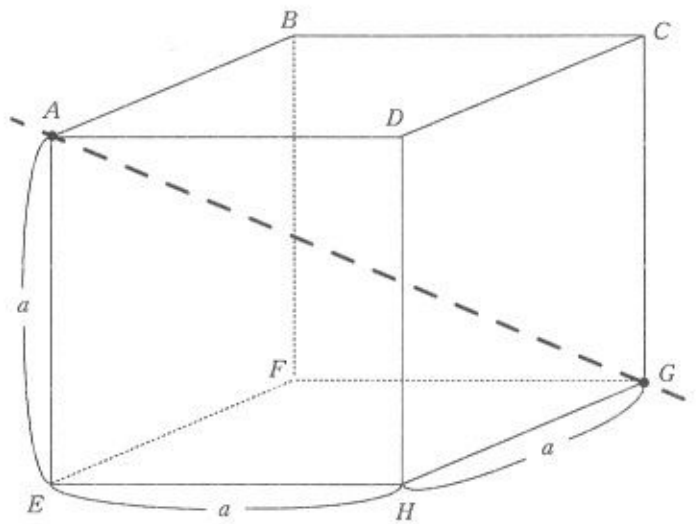
F : 그렇다. 동연이가 다시 설명할 수 있겠니?

D : 네. <그림 1.4.1>을 살펴보기로 해요. 한 변의 길이가 a인 정육면체 $ABCDEFGH$는 밑면이 정사각형 $ADHE$이고 꼭지점이 G인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $ABFE$이고 꼭지점이 G인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $ABCD$이고 꼭지점이 G인 사각뿔로 나눌 수 있어요. 그리고, 이 3개의 사각뿔들은 합동이어요. 따라서, 각 사각뿔의 부피는 정육면체의 부피 a^3의 1/3인 $a^3/3$이어요.

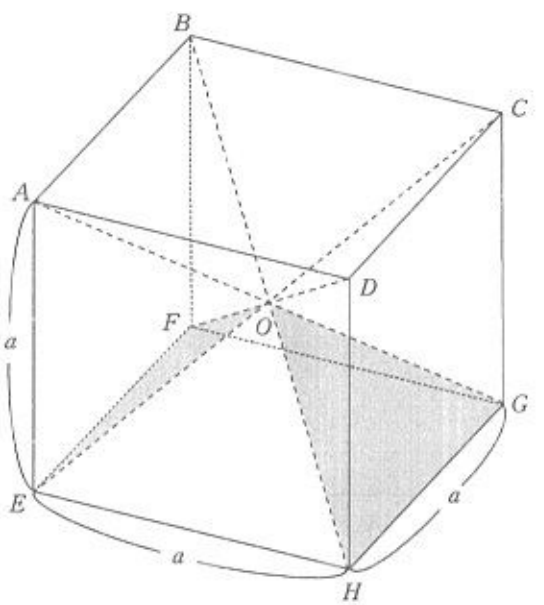
F : 아주 잘 설명했다. 그 당시 이와 비슷한 방법으로 밑이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 $a/2$인 어떤 사각뿔의 부피가 $a^3/6$이라는 것을 증명했었는데, 이번에는 영상이가 설명할 수 있겠니?

D : 네. <그림 1.4.2>를 살펴보기로 해요. 한 변의 길이가 a인 정육면체 $ABCDEFGH$에서 대각선 AG와 대각선 BH가 만나는 점을 O라 하면, 점 O는 이 정육면체의 무게중심이어요. 이 정육면체는 밑면이 정사각형 $ABCD$이고 꼭지점이 O인 사각뿔, 밑면이

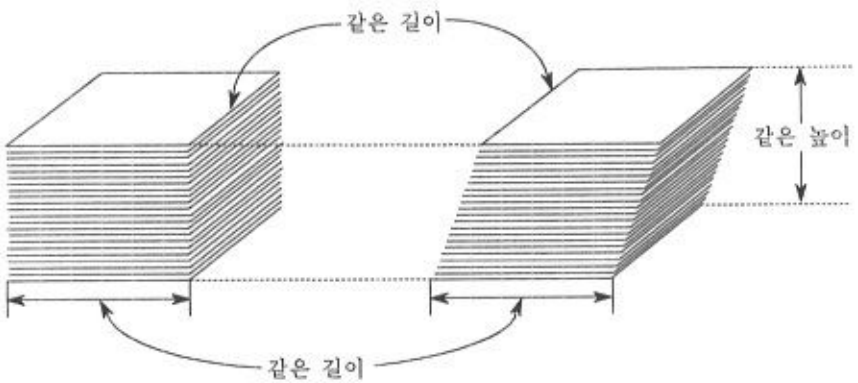
【그림 1.4.1】 정육면체 = 3개의 합동인 사각뿔들



【그림 1.4.2】 정육면체 = 6개의 합동인 사각뿔들



【그림 1.4.3】 Cavalieri의 원리와 육면체의 부피



정사각형 $ABFE$이고 꼭지점이 O인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $BCGF$이고 꼭지점이 O인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $DCGH$이고 꼭지점이 O인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $DAEH$이고 꼭지점이 O인 사각뿔, 밑면이 정사각형 $EFGH$이고 꼭지점이 O인 사각뿔로 나눌 수 있어요. 그리고, 이 6개의 사각뿔들은 합동이어요. 따라서, 각 사각뿔의 부피는 정육면체의 부피 a^3의 1/6인 $a^3/6$이어요.

F : 아주 잘 설명했다. 이제 <그림 1.4.1>에 있는 밑이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 a인 사각뿔의 부피가 $a^3/3$이라는 것을 알았다. 그렇다면, 밑이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 a인 어떠한 사각뿔의 부피도 $a^3/3$이라는 것을 어떻게 증명할 수 있을까?

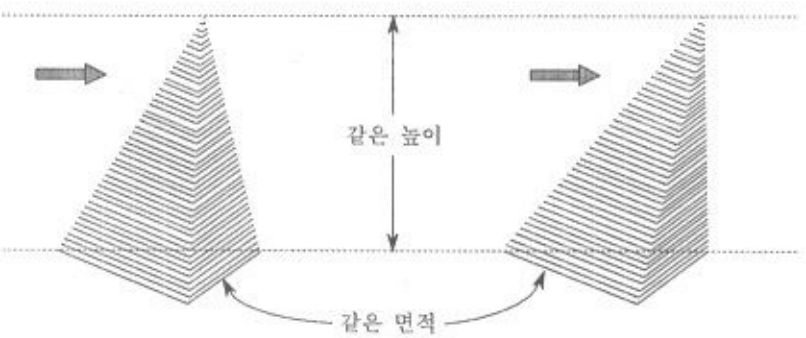
Y : 그거야, Cavalieri의 원리를 적용하면 되지요.

F : 그럼, 영상이가 Cavalieri의 원리를 설명해보거라.

Y : <그림 1.4.3>을 보세요. 좌측 그림은 합판을 쌓아서 만든 직육면체이지요. 이 직육면체를 피사의 사탑처럼 옆으로 밀면 우측의 육면체가 되요. 각 합판의 부피에 변함이 없으므로 두 육면체들의 부피는 같아요. 이것이 Cavalieri의 원리예요.

F : 그렇다. Cavalieri의 원리는 직육면체처럼 이미 부피를 알고 있는 물체를 약간 변형한 물체의 부피를 구하는데 유용하다. 밑면적이 동일하고 높이가 동일한 2개의 뿔들의 부피가 동일함을 <그림 1.4.4>에서 알 수 있다.

【그림 1.4.4】 Cavalieri의 원리와 뿔의 부피



D : 이 Cavalieri의 원리에 의해서, 밑이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고 높이가 a인 어떠한 사각뿔의 부피가 $a^3/3$이라고 말할 수 있군요.

F : 자, 이제 Cavalieri의 원리를 요약해볼까? 우선, 영상이가 평면도형에 대해서 요약하고, 다음에 동연이가 입체도형에 대해서 요약해보려무나.

Y : 만일 2개의 평면도형들을 일정한 방향의 직선으로 잘랐을 때 절단면의 길이가 항상 동일하면, 이 두 평면도형들의 면적들은 동일하다.

D : 만일 2개의 입체도형들을 일정한 방향의 평면으로 잘랐을 때 절단면의 면적이 항상 동일하면, 이 두 입체도형들의 부피들은 동일하다.

F : 입체도형에 대한 Cavalieri의 원리를 확장하면 다음과 같다. 만일 2개의 입체도형들을 일정한 방향의 평면으로 잘랐을 때 절단면의 면적들이 항상 α 대 β이면, 이 두 입체도형들의 부피들의 비는 α 대 β이다. 이 Cavalieri의 확장원리를 체계적으로 증명하려면 적분의 개념이 도입되어야 한다. 고등학교에서 적분을 배운 사람이라면, 충분히 Cavalieri의 확장원리를 증명할 수 있을 것이다. 그러나 증명이 없다하더라도, 직관적으로 보아 이 확장원리가 성립하지 않는다고 말할 아무런 근거가 없어 보인다. 이제 밑이 한 변의 길이가 b인 정사각형이고 높이가 a인 어떠한 사각뿔의 부피가 $ab^2/3$라는 이유를 알았지?

Y : 네. 또한, 밑면적이 S이고 높이가 a인 뿔의 부피 V가 $V = \frac{1}{3}Sa$라는 것도 알았어요.

F : 아빠가 생각하기에 적분이라는 것은 너무 자연스러운 개념이다. 적분이란 어떤 면적이나 부피를 계산할 때 'divide and conquer'라는 작전을 쓰는 것에 불과하다. 우선, 적분의 대상을 자유자재로 다룰 수 있는 작은 부분들로 나누어, 이들의 면적이나 부피를 구한다. 다음 단계로, 이들의 합을 구함으로써, 전체의 면적이나 부피를 계산하는 것이다. 따라서, 아빠는 학생들에게 적분은 단지 숫자들의 합일 뿐이라고 강조한단다. 이제 Lebesgue적분을 이해하는데 필수불가결한 집합에 대해서 생각해보기로 하자.

제 2 장

무한과 집합론

2.1 집합론의 등장

F : 지난 시간에 미적분에서 극한의 중요성에 대해서 살펴보았다. 극한에 대해서 체계적으로 살펴보기 위해서는 우선 집합에 대해서 알아야 한다. 이 절에서는 집합과 무한(infinity)에 대해서 살펴보기로 하자. 요즈음은 초등학교나 중학교에서도 집합을 가르친다. 그러나, 집합의 개념이 만들어진 것은 그리 오래된 것이 아니다. 누가 집합론을 창시했지?

D : Georg Cantor (1845~1918)가 1870년대부터 1890년대에 걸쳐서 집합론을 창시했어요. Cantor는 삼각급수에 관한 연구를 위해서 실수의 집합들에 관하여 깊이 고찰하였어요. 그러다가, 집합의 일반적 개념을 생각해 내었지요.

F : 그렇다. Cantor 이전에는 집합의 개념을 거론한 사람이 없었지. 또한, Cantor가 논한 것과 같은 형식으로 무한에 대해서 논한 사람도 없었다. 그의 이론은 정말로 혁명적이고 대담한 것이었다. 따라서, 당시 사람들로서는 집합론을 쉽게 받아들일 수가 없었단다. 이에 대해서, Cantor는 "수학의 본질은 그 자유성에 있다"라는 말로 자신의 이론의 정당성을 주장했다. 그 후, 집합론은 차차 수학에 흡입되며, 수학, 특히 수학적 내용을 기술하는데 큰 영향을 미쳐서, 오늘날에는 초등학교와 중학교에서도 집합에 대해서 배우게 되었단다.

Y : 우리가 배우고자 하는 Lebesgue적분과 집합론은 어떤 연관이 있어요?

D : 앞에서 아빠가 말씀하실 때, 너는 화장실에 갔었니? 적분은 합의 극한이므로, 무한의 개념이 필요하다고, 아빠가 말씀하셨잖아.

Y : 맞습니다. 맞고요…. 또한, 무한이라는 개념을 설명하기 위해서는 집합이라는 개념을 이용하는 것이 편리하다고도 말씀하셨지.

2.2 집합의 농도

F : 지금부터는 Cantor의 집합론에서 가장 큰 줄기라고 할 수 있는 기수(cardinality)에 대해서 살펴보자. 기수란 어느 집합의 원소들의 개수를 의미한다고 할 수 있다. 원소들의 개수가 아주 많아서 셀 수 없는 경우가 있기 때문에 기수 대신에 농도라는 단어를 사용하기도 한다. 유한집합에서는 기수가 큰 문제가 되지 않지만, 원소들의 개수가 무한인 무한집합에서는 기수라는 개념이 매우 중요하단다. 너희들은 일대일(one-to-one) 사상(mapping 또는 morphism)에 대해서 알고 있지? 동연이가 설명해보겠니?

D : 사상은 함수를 의미해요. 다음과 같은 두 명제들이 만족될 때, 집합 f를 집합 X에서 집합 Y로 가는(into) 사상이라고 하고, $f: X \to Y$로 표기해요.

(a) 집합 X에 속하는 임의의 원소 x에 대해서, $(x, y) \in f$를 만족하는 집합 Y의 원소 y가 존재한다. 이러한 관계를 보통 $y = f(x)$라고 표기한다.

(b) 만일 $(x, y_1) \in f$이고, 또한 만일 $(x, y_2) \in f$이면, $y_1 = y_2$이다.

Y : 누나, 내가 일대일 사상을 설명할래. 사상 $f: X \to Y$가 다음 명제를 만족하면, f를 일대일 사상이라고 해요.

만일 $x_1 \neq x_2$이면, $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. (2.2.1)

이러한 일대일 사상 f를 단사(injective)라고도 해요. 또한, 집합 Y의 임의의 원소 y에 대해서 $y = f(x)$가 되는 원소 x가 집합 X에 존재하면, 사상 $f: X \to Y$를 전사(surjective) 또는 집합 X에서 집합 Y 위로 가는(onto) 사상이라고 해요. 마지막으로, 만일 사상 $f: X \to Y$가 단사인 동시에 전사이면, 이 사상을 전단사(bijective)라고 해요.

F : 명확히 알고 있구나. 사상 $f: X \to Y$가 전단사라는 것은 임의의 원소 $y \in Y$에 대해서 $f(x) = y$인 원소 $x \in X$가 단 하나 존재한다는 것이다. 만일 사상 f가 전단사이면, 각 $y \in Y$에 대해서 $y = f(x)$를 만족하는 $x \in X$를 대응시킴으로써 역사상(inverse mapping) $f^{-1}: Y \to X$를 정의할 수가 있다. 물론 역사상 f^{-1}도 전단사이다. 또한, 만일 사상 $f: X \to Y$가 전단사이면, 이 사상 f는 단사이므로 일대일 사상이다. 따라서, 이 경우에는 사상 f를 집합 X에서 집합 Y로 가는 일대일 대응(one-to-one correspondence)이라고도 말한다. 비록, 이 말이 단사를 뜻하는 '일대일 사상'과 혼동할 수도 있지만, 전단사를 잘 나타내는 용어이다.

D : 아빠! 집합 X의 원소와 집합 Y의 원소 사이에는 일대일 대응을 이룬다는 것과 집합 X에서 집합 Y로 가는 일대일 대응, 즉 전단사가 존재하는 것이 동치인가요?

F : 그렇다. 그러한 경우에 집합 X와 집합 Y는 일대일 대응을 이룬다고도 말한다. 또는 간단히, 집합 X와 집합 Y는 대등하다고(equivalent) 말하고, $X \sim Y$로 표기한다. 여기서 대등은 농도대등(cardinality equivalent)을 의미하는 것을 이해하겠지? 결론적으로 말해, 만일 $X \sim Y$이면, 집합 X에서 집합 Y로 가는 전단사가 존재하는 것이다. 영상이가 유한집합들을 사용해서 대등을 설명해보겠니?

Y : 예를 들어, 서로 다른 원소들 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 서로 다른 원소들 $y_1, y_2, \cdots, y_n$이 존재한다고 가정하면, 유한집합 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$과 유한집합 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$은 대등해요. 즉, 각 x_i에 대해서 y_i를 대응시키면, 집합 X에서 집합 Y로 가는 일대일 대응을 얻을 수 있어요. 집합 X와 집합 Y를 일대일 대응시키는 사상들은 $n!$개 존재해요.

F : 임의의 집합들 X, Y, Z에 대해서 다음과 같은 반사율(reflectivity), 대칭률(symmetry) 그리고 추이율(transitivity)이 성립함을 알 수 있다.

(a) 반사율 : $X \sim X$

(b) 대칭률 : $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

(c) 추이율 : $X \sim Y$ and $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

일대일 대응의 정의를 사용해서 이 성질들을 쉽게 증명할 수 있다. 자세한 증명은 Pinter (1970, p. 78)를 참조하도록 해라. 영상아, 유한집합들을 사용해서 이 일대일 대응의 성질들을 직관적으로 설명할 수 있겠니?

Y : A piece of cake! 서로 다른 원소들 $x_1, x_2, \cdots, x_n$으로 구성된 유한집합 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$이 자신과 일대일 대응하는 것은 자명해요. 즉, 반사율이 성립해요. 만일 유한집합 X가 유한집합 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$과 일대일 대응하면, $y_1, y_2, \cdots, y_n$은 서로 다른 원소들이지요. 따라서, 집합 Y는 집합 X에 일대일 대응해요. 즉, 유한집합 X와 유한집합 Y가 대등하다는 것은 집합 X의 원소들의 개수와 집합 Y의 원소들의 개수가 동일하다는 것과 동치예요. 따라서, 대칭률이 성립해요. 만일 유한집합 X가 유한집합 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$과 일대일 대응하면, $y_1, y_2, \cdots, y_n$은 서로 다른 원소들이고, 또한 만일 유한집합 Y가 유한집합 $Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$과 일대일 대응하면, $z_1, z_2, \cdots, z_n$은 서로 다른 원소들이어요. 따라서, 집합 Z는 집합 X에 일대일 대응하지요. 즉, 추이율도 성립해요.

F : 앞에서 정의했듯이, 유한집합 X의 원소의 개수를 집합 X의 기수(cardinal number) 또는 농도라 부르며, $\#X$ 또는 $\mathrm{card}\, X$ 또는 $|X|$ 등으로 표기한다. 즉, 유한집합 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$의 기수는 n이다. 유한집합들 X와 Y가 동일한 기수를 가지면, 즉, $\#X = \#Y$이면, 유한집합들 X와 Y가 대등하다. 따라서, 집합 X에서 집합 Y로 가는 전단사가 존재한다. 또한, 역도 성립한다. 따라서, 다음 명제가 성립한다.

$$\#X = \#Y \quad \Leftrightarrow \quad X \sim Y \tag{2.2.2}$$

Cantor는 이러한 생각을 무한집합으로 확장해서, 무한집합에 농도라는 개념을 도입했다. 직관적으로 생각해서, 무한집합들 중에서 농도가 가장 작은 것은 무엇일까?

Y : 모든 자연수들의 집합이 아닐까요?

F : 그렇다. 모든 자연수들의 집합이 가장 자연스러운 답일 것이다. 그런데, 모든 유리수들의 집합도 답이 될 수 있단다.

D : Euclid의 기하학원론에 "부분은 전체보다도 작다"라는 말이 있다던데… 모든 자연수들의 집합은 모든 유리수들의 집합의 진부분집합이어요. 그런데도 모든 자연수들의 집합의 농도와 모든 유리수들의 집합의 농도가 같나요?

F : 그렇단다. 이러한 현상들 때문에 무한집합을 다루는 것은 어렵고 조심스러운 것이다. 우리가 크기를 비교하려면, 우선 서로 크기가 같다는, 즉 대등이라는 개념이 필요하다. 동연아, 무한집합에서 크기가 같다는 것을 어떻게 정의할 수 있을까?

D : 우선 무한집합 X의 농도(또는 기수)가 존재한다고 가정하고, 이를 $\#X$로 표기하기로

해요. 유한집합과는 달리 무한집합의 경우에는 실제로 그 원소의 개수를 셀 수가 없어요. 그렇다면, 무한집합의 경우에는 농도의 개념을 상대적으로 정의해야겠지요. 따라서, 무한집합들의 크기가 같다는 개념을 다음과 같이 정의해야 할 것 같아요.

정의 2.2.1 만일 무한집합 X에서 무한집합 Y로 가는 전단사가 존재하면, 'X와 Y는 같은 농도를 갖는다' 또는 농도가 대등이라고 하며, $\#X = \#Y$로 표기한다. □

F : 정말로 잘 정의했다. 이제 동연이가 체계적이고 논리적인 사고를 하는구나. <정의 2.2.1>에 의해서, 임의의 집합들 X, Y, Z에 대해 다음과 같은 반사율, 대칭률, 그리고 추이율이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

(a) 반사율 : $\#X = \#X$

(b) 대칭률 : $\#X = \#Y \Rightarrow \#Y = \#X$

(c) 추이율 : $\#X = \#Y$ and $\#Y = \#Z \Rightarrow \#X = \#Z$

2.3 가산집합

F : 이미 너희들도 알고 있겠지만, 자연수 전체의 집합을 Z_+, 정수 전체의 집합을 Z, 유리수 전체의 집합을 Q, 그리고 실수 전체의 집합을 R로 표기한다. 한 예로, 자연수 전체의 집합과 유리수 전체의 집합이 대등이라는 것을 $\#Z_+ = \#Q$로 표기할 수 있다. 곧 이 식을 증명하게 될 것이다. 동연아, 어떤 무한집합이 가산(countable)이라는 것은 무엇을 의미하지?

D : 무한집합 중에서 자연수 전체의 집합 Z_+와 대등한 집합 X를 가산집합이라고 해요. 다시 말해서, 만일 Z_+에서 X로의 전단사가 존재하면, X를 가산이라 해요. 따라서, 각 $n \in Z_+$에 대해서 $f(n) = x_n$을 만족하는 $x_n \in X$이 유일하게 존재하는 전단사 f가 존재해요. 즉, $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$라고 쓸 수 있어요. 가산집합에서는 원소들을 $x_1, x_2, x_3, \cdots$으로 배열해서, 첫 번째, 두 번째, 세 번째라고 번호를 붙일 수 있어요. 가산(countable 또는 denumerable)이라는 용어는 이와 같은 뜻에서 생겼어요. 결론적으로, 다음과 같이 가산집합을 정의할 수 있어요.

정의 2.3.1 만일 집합 X가 $\#X = \#Z_+$를 만족하면, 집합 X는 가산이다. □

F : 그렇단다. <정의 2.3.1>에서 알 수 있듯이, 모든 가산집합의 농도는 동일하다. 가산집합의 농도를 가산농도라 부르고 $\aleph_0$로 표기한다. 이를 aleph-null이라 읽는다. 여기서 $\aleph$는 히브리어의 첫 번째 자모이다. 명백하게, $\#Z_+ = \aleph_0$이다. 가산집합은 어떤 성질들을 가지고 있을까?

Y : 가산집합에 관한 첫 번째 명제는 다음과 같아요.

명제 2.3.1

가산집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$의 임의의 무한부분집합은 가산이다.

<정의 2.3.1>에서 알 수 있듯이, 이 명제를 증명하는 것은 집합 Z_+의 무한부분집합이 가산이라는 것을 증명하는 것과 같아요. 따라서, 지금부터는 집합 Z_+의 무한부분집합이 가산이라는 것을 증명해볼게요. 집합 Z_+의 무한부분집합 C에서 가장 작은 원소를 c_1으로 표기하고, 집합 $C_1 = C$에서 원소 c_1을 제외한 나머지 원소들의 집합을 C_2라고 정의해요. 이 집합 C_2에서 가장 작은 원소 c_2를 제외한 나머지 원소들의 집합을 C_3라 해요. 같은 방법으로 $c_3, C_4, c_4, C_5, \cdots$를 정의하면, 명백하게 $C = \{c_1, c_2, c_3, \cdots\}$이고 따라서 집합 C는 가산집합이어요. 예를 들어, 짝수들의 집합 $D = \{2, 4, 6, \cdots\}$은 Z_+의 진부분집합이지만, Z_+와 대등하지요.

D : 가산집합에 관한 두 번째 명제는 다음과 같아요.

명제 2.3.2

만일 무한집합 X에서 가산집합 Y로의 단사가 존재하면, X는 가산이다.

이 명제의 증명도 어렵지 않아요. 만일 사상 $f: X \to Y$가 단사이면, 집합 X의 치역 $f(X)$와 집합 X는 대등하므로 $f(X)$는 무한집합이지요. 집합 $f(X)$가 가산집합

Y의 무한부분집합이므로, 앞에서 설명한 <명제 2.3.1>에 의해서, 집합 $f(X)$는 가산이어요. 따라서, 집합 X도 가산이지요.

Y : 가산집합에 관한 세 번째 명제는 다음과 같아요.

명제 2.3.3

만일 가산집합 X에서 무한집합 Y로의 전사가 존재하면, Y는 가산이다.

이 명제를 다음과 같이 증명할 수 있어요. 집합 X가 가산이므로, $X \sim Z_+$이다. 가정에 의해서 집합 Z_+에서 집합 Y로의 전사가 존재해요. 사상 $f: Z_+ \to Y$가 전사이면, 각 $y \in Y$에 대해서 집합 $D_y = \{n \mid n \in Z_+, f(n) = y\}$를 정의하기로 해요. 집합 D_y는 Z_+의 부분집합이지만 공집합은 아니지요. 따라서, 집합 D_y에 속하는 최소의 자연수가 존재해요. 이 자연수를 d_y로 표기하기로 해요. 만일 $y \in Y$와 $z \in Y$가 서로 다르다면, $D_y \cap D_z = \phi$이고 따라서 $d_y \neq d_z$이지요. 즉, 무한집합 Y의 원소 y에 $d_y \in Z_+$를 대응시키는 사상은 무한집합 Y에서 가산집합 Z_+로의 단사에요. 따라서, <명제 2.3.2>에 의해서 집합 Y는 가산이어요.

F : <명제 2.3.1>~<명제 2.3.3>은 가산집합의 중요한 성질들을 보여준다. 유한집합과 가산집합을 총칭하여 최대가산집합이라고 한다. 이 명제들을 요약하면 다음과 같다. 가산집합의 임의의 부분집합은 최대가산집합이다. 만일 집합 X에서 가산집합 Y로의 단사가 존재하면, X는 최대가산집합이다. 만일 가산집합 X에서 집합 Y로의 전사가 존재하면, Y는 최대가산집합이다.

D : 이 명제들을 사용해서, 앞에서 언급한 식 $\#Z_+ = \#Q$을 증명할 수 있겠군요?

F : 그렇다. 자연수 전체의 집합과 유리수 전체의 집합이 대등이라는 것을 증명하기 위해서, 우선 정수 전체의 집합 Z가 가산임을 증명하기로 하자. 다음과 같은 사상을 살펴보자.

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2}, & (m\text{이 홀수인 자연수}) \\ -\dfrac{m}{2}, & (m\text{이 짝수인 자연수}) \end{cases}$$

명백하게, 이 사상 f는 가산집합 Z_+에서 무한집합 Z로의 전사이다. 따라서, <명제

2.3.3>에 의해서 정수 전체의 집합 Z는 가산이다.

Y : 그러면, $\#Z_+ = \#Z$이군요. 가장 작은 무한집합은 가산집합이지요?

D : 당근이지! 어떤 무한집합도 반드시 가산집합을 부분집합으로 포함해. 너는 이 성질을 증명할 수 있어?

Y : 잘났어! 정말. 그렇지만, 그 정도는 나도 증명할 수 있어. 어떤 무한집합 X의 임의의 한 원소 x_1을 선택하고, $X_1 = X - \{x_1\}$이라 정의하자. 집합 X_1의 임의의 한 원소 x_2를 선택하고, $X_2 = X_1 - \{x_2\}$라 정의하자. 같은 방법으로, 각 $n(=2, 3, \cdots)$에 대해서, 집합 X_n의 임의의 한 원소 x_{n+1}을 선택하고, $X_{n+1} = X_n - \{x_{n+1}\}$라 정의하자. 집합 X는 무한집합이므로, 각 자연수 n에 대해서 $X \neq \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$이고 또한 X_n도 무한집합이다. 따라서, 무한집합 X는 가산집합 $\{x_1, x_2, \cdots\}$을 포함한다. <명제 2.3.1>에서 알 수 있듯이, 가산집합의 무한부분집합은 가산이다. 따라서, 가장 작은 무한집합은 가산집합이라고 할 수 있다.

F : 아주 재미있는 증명이었다. 무한집합의 가장 큰 특징은 그 자신과 대등한 진부분집합을 포함한다는 것이다. 이를 다음과 같이 설명할 수 있다. 무한집합 X의 최대가산인 부분집합을 Z라 하고, $Y = X - Z$라 하자. 만일 Y가 무한집합이면, Y는 가산의 부분집합 U를 포함한다. 집합 $V = Y - U$를 정의하면, 다음 식들이 성립한다.

$$Y = U \cup V, \quad X = Z \cup U \cup V$$
$$U \cap V = \phi, \quad Z \cap U = \phi, \quad Z \cap V = \phi$$

집합 Z는 최대가산이고 집합 U가 가산이므로, $Z \cup U$도 가산집합이다. 따라서, 집합 U에서 $Z \cup U$로의 전단사 h가 존재한다. 다음과 같은 사상 $f: Y \to X$를 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & (x \in U) \\ x, & (x \in V) \end{cases}$$

명백하게, 사상 f는 무한집합 Y에서 무한집합 X로의 전단사이다. 따라서, 무한집합 X의 부분집합 Y는 X와 대등하다. 결론적으로, 무한집합은 그 자신과 대등한 진부분집합을 포함한다. 이와 같은 논리를 바탕으로, 19세기의 비판주의적 수학자의 하나인 Dedekind (1831 ~ 1916)는 무한집합을 다음과 같이 정의했다.

정의 2.3.2 만일 집합 X가 그 자신과 대등한 진부분집합을 포함하면, 집합 X는 무한집합이다. □

2.4 카아티젼곱

F : 너희들은 고등학교 때, 카아티젼곱(Cartesian product) 또는 직적(direct product)에 대해서 배웠다. 동연이가 카아티젼곱을 설명할 수 있겠니?

D : 집합들 X와 Y에 대해서 순서쌍들의 집합 $X\times Y=\{(x, y)\mid x\in X, y\in Y\}$를 카아티젼곱이라고 해요. 마찬가지로, 집합들 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대해서 카아티젼곱을 다음과 같이 정의해요.

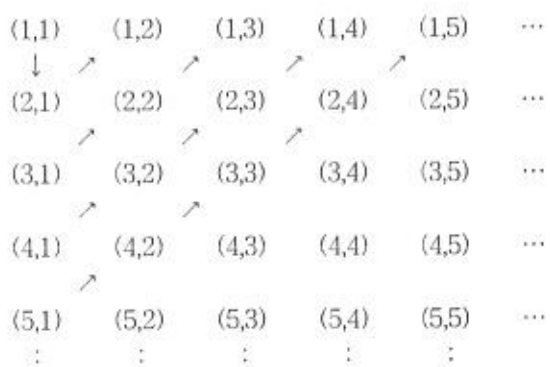
$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2, \cdots, x_n\in X_n\}$$

F : 유리수 전체의 집합 Q가 가산임을 증명하기 위해서, 우선 가산집합들의 카아티젼곱이 가산임을 보이기로 하자. 즉, 다음과 같은 명제를 증명해보아라.

명제 2.4.1

가산집합들 X와 Y의 카아티젼곱 $X\times Y$도 가산이다.

Y : 가산집합의 정의에 의해서, <명제 2.4.1>의 증명은 카아티젼곱 $Z_+\times Z_+$가 가산임을 보여주면 되요. 카아티젼곱 $Z_+\times Z_+$가 가산임을 보이기 위해서, 이 집합의 원소들을 다음과 같이 배열하기로 해요.



그리고, 화살표의 순서에 따라 $Z_+\times Z_+$의 각 원소에 양의 정수를 차례로 대응시켜 나갑니다. 즉, 다음과 같은 사상 f를 정의합니다.

$$f(1,1) = 1$$
$$f(2,1) = 2,\ f(1,2) = 3$$
$$f(3,1) = 4,\ f(2,2) = 5,\ f(3,1) = 6$$
$$\cdots$$

사상 f는 $Z_+\times Z_+$에서 Z_+로의 전단사이지요. 즉, $Z_+\times Z_+$는 가산집합이어요.

D : 이 사상 f가 다음 식을 만족하는 것을 쉽게 알 수 있어요.

$$f(m,\ n) = \left(\sum_{l=1}^{m+n-2} l\right) + n = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + n$$

또한, 같은 방법으로 가산집합들 $X_1, X_2, \cdots, X_n$의 카아티젼곱도 $X_1\times X_2\times \cdots \times X_n$도 가산임을 쉽게 증명할 수 있어요.

F : 이제는 유리수 전체의 집합 Q가 가산임을 증명할 수 있다. 누가 해보겠니?

Y : 제가 할게요. 임의의 유리수는 정수 m과 자연수 n의 비 m/n으로 나타낼 수 있어요. 자연수 전체의 집합 Z_+도 가산집합이므로, <명제 2.4.1>에 의해서 $Z\times Z_+$는 가산집합이지요. 따라서, 가산집합 $Z\times Z_+$의 원소 (m, n)에 유리수 m/n을 대응시키는 사상 $f(m, n) = m/n$은 가산집합 $Z\times Z_+$로부터 무한집합 Q로의 전사입니다. 즉, <명제 2.3.3>에 의해서 유리수 전체의 집합 Q는 가산입니다.

F : 멋있는 증명이었다. <명제 2.4.1>에 의해서, 유한개의 가산집합들의 합집합은 가산집합임을 알 수 있다. 이 성질을 가산개의 가산집합들의 합집합으로 확장할 수 있다. 즉, 다음 명제가 성립함을 알 수 있다.

명제 2.4.2

가산개의 가산집합들의 합집합은 가산집합이다.

누가 이 명제를 증명할 수 있겠니?

D : 제가 할게요. 가산개의 가산집합들 $X_1, X_2, \cdots$ 의 합집합 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$을 살펴보기로 해요. 이 가산집합들을 다음과 같이 표기할 수 있어요.

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots\}$$
$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots\}$$
$$\vdots$$
$$X_m = \{x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn}, \cdots\}$$
$$\vdots$$

집합 S의 각 원소 x_{mn}에 대응하는 $(m, n) \in Z_+ \times Z_+$가 존재해요. 즉, $Z_+ \times Z_+$의 각 원소 (m, n)에 S의 원소 x_{mn}을 대응시키는 사상은 가산집합 $Z_+ \times Z_+$에서 S로의 전사이어요. 따라서, <명제 2.3.3>에 의해서 S는 가산이 되지요.

2.5 농도의 대소

F : 지금까지는 가산집합의 농도 $\aleph_0$에 대해서 다루었다. 지금부터는 비가산집합의 농도에 대해서 살펴보자. 우선, 농도의 대소관계를 어떻게 정의해야 할까?

Y : 어차피 <정의 2.2.1>에서 사상을 사용해서 농도를 정의하였으므로, 농도의 대소관계도 사상을 사용해서 정의해야 할 것 같아요. 만일 유한집합 X에서 유한집합 Y로의 단사가 존재하면, 유한집합 X의 농도 $\#X$가 유한집합 Y의 농도 $\#Y$보다 작거나 같지요. 즉, $\#X \leq \#Y$이지요. 이 성질을 확대해서, 다음과 같은 정의를 할 수 있어요.

정의 2.5.1 만일 집합 X에서 집합 Y로의 단사가 존재하면, 집합 Y의 농도가 집합 X의 농도보다 작지 않다고 하고, $\#X \leq \#Y$로 표기한다. □

F : 훌륭하게 논리를 전개하였다. 그리고, <정의 2.5.1>은 보편적으로 사용되는 정의이다. <정의 2.5.1>에 의해서 다음 조건들이 동치라는 것을 쉽게 알 수 있다.

(a) 집합 X에서 집합 Y로의 단사가 존재한다.

(b) 집합 X가 집합 Y의 어떤 부분집합과 대등하다.

(c) $\#X \leq \#Y$

D : <정의 2.5.1>에 의해서, 임의의 집합 X에 대해서 반사율이 성립해요. 또한, 유한집합들 X, Y, Z에 대해서 농도가 추이율(transitivity)을 갖는 것은 자명해요. 즉, 다음 명제가 성립해요.

명제 2.5.1

$$\#X \leq \#Y \text{ and } \#Y \leq \#Z \Rightarrow \#X \leq \#Z$$

아빠! 그렇다면, X, Y, Z가 무한집합들인 경우에도 <명제 2.5.1>이 성립하나요?

F : 그 대답은 'Yes'이다. 즉, <명제 2.5.1>은 임의의 집합들 X, Y, Z에 대해서 성립한다. 영상이가 증명할 수 있겠니?

Y : 물론이지요! 무한집합들 X, Y, Z에 대해서 <명제 2.5.1>이 성립함을 증명하는 것은 어렵지 않아요. 만일 $\#X \leq \#Y$이고 $\#Y \leq \#Z$이면, 집합 X에서 집합 Y로의 단사 f와 집합 Y에서 집합 Z로의 단사 g가 존재해요. 따라서, 각 $x \in X$에 대해서 $g(f(x))$가 대응하는 사상 $g(f(\cdot)) : X \to Z$는 단사이지요. 따라서, $\#X \leq \#Z$입니다.

F : 만일 X, Y, Z가 유한집합들이면, 다음 명제가 성립하는 것은 자명하다.

명제 2.5.2

$$\#X \leq \#Y \text{ and } \#Y \leq \#X \Rightarrow \#X = \#Y$$

만일 X와 Y가 무한집합들이면, 이 명제가 성립할까?

D : <명제 2.5.2>를 다음과 같이 해석할 수 있어요. 만일 집합 X에서 집합 Y로의 단사가 존재하고, 또한 만일 집합 Y에서 집합 X로의 단사가 존재하면, 집합 X에서 집합 Y로의 전단사가 존재해요. 시간을 충분히 준다면, 이 명제를 증명하는 것은 별로 어렵지 않을 것 같아요.

F : 그렇다. 너희들도 쉽게 증명할 수 있는 문제이다. 증명에 대한 자세한 내용은 Pinter (1970, p. 62)를 참조해라.

Y : 아빠! 만일 집합들 X와 Y가 $\#X \leq \#Y$를 만족하지만 $\#X \neq \#Y$이면, 집합 X의 농도가 집합 Y의 농도보다 작다고 하겠네요.

F : 그렇다. 그러한 경우에는 $\#X < \#Y$로 표기한다. 즉, 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

정의 2.5.2 만일 집합 X에서 집합 Y로의 단사는 존재하나 전단사가 존재하지 않으면, 집합 X의 농도가 집합 Y의 농도보다 작다고 하고 $\#X < \#Y$라 표기한다. □

2.6 멱집합의 농도

F : <정의 2.3.2>에서 알 수 있듯이, 무한집합은 반드시 자신과 대등한 진부분집합을 포함한다. 지금부터는 어떤 집합에 대해서도 반드시 그것보다 큰 농도를 갖는 집합이 존재한다는 것을 보이고자 한다. 동연아, 멱집합을 설명할 수 있겠니?

D : 네. 주어진 집합 X의 모든 부분집합들의 집합을 X의 멱집합(power set)이라 부르고, $P(X)$라 표기해요. 예를 들어, 집합 $X = \{x_1, x_2\}$의 멱집합은 다음과 같아요.

$$P(X) = \{\phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$$

F : 고등학교에서 배운 순열을 이용해서, 멱집합의 농도에 대한 개념을 잡을 수 있다. 만일 유한집합 X의 기수가 n이면, $\#P(X) = 2^n$이다. 즉, X가 유한집합인 경우에 이 집합의 농도 $\#X$는 멱집합의 농도 $\#P(X)$보다 작다. 이 성질이 무한집합에서도 성립할까? 즉, 다음 명제가 성립할까?

명제 2.6.1

임의의 집합 X에 대해서, $\#X < \#P(X)$이다.

D : 이 명제가 성립하기 위한 필요충분조건은 집합 X에서 멱집합 $P(X)$로의 단사는 존재하지만 전단사는 존재하지 않는다는 것이어요.

F : 그렇다. 동연이가 증명의 핵심을 잘 잡았다. 영상이가 <명제 2.6.1>을 증명해보겠니?

Y : 첫째로, 집합 X에서 멱집합 $P(X)$로의 단사가 존재함을 보이기로 해요. 각 $x \in X$에 대해서, $\{x\} \in P(X)$이어요. 만일 $x \neq z$이면, $\{x\} \neq \{z\}$이어요. 따라서, 사상 $f(x) = \{x\}$는 집합 X에서 멱집합 $P(X)$로의 단사이어요. 즉, $\#X \leq \#P(X)$이어요. 둘째로, 집합 X에서 멱집합 $P(X)$로의 전단사가 존재하지 않음을 보이기로 해요. 집합 X에서 멱집합 $P(X)$의 사상 $f: X \to P(X)$를 살펴보기로 해요. 집합 $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$라 정의하면, $Y \in P(X)$이지요. 만일 $u \in f(u)$이면, $u \notin Y$이지요. 또한, 만일 $u \notin f(u)$이면, $u \in Y$이지요. 따라서, $f(u) \neq Y$이어요. 즉, 임의의 $u \in X$에 대하여 $f(u) \neq Y$이지요. 따라서, 집합 Y가 사상 $f: X \to P(X)$의 치역에 속하지 않아요. 즉, $Y \notin f(X)$이어요. 이는 사상 f가 집합 X에서 멱집합 $P(X)$로의 전단사가 아니라는 뜻이지요. 즉, <명제 2.6.1>이 성립해요.

F : <명제 2.6.1>에 의해서, 우리는 주어진 집합의 농도보다 큰 농도를 갖는 집합(여기서는 멱집합)을 찾아낼 수가 있다. 즉, 농도의 크기는 끝이 없다고 할 수 있다. 만일 집합들 X와 Y가 대등하면, 멱집합들 $P(X)$와 $P(Y)$가 대등함을 보일 수 있겠니? 즉, 다음 명제를 증명해보아라.

명제 2.6.2

$$X \sim Y \Rightarrow P(X) \sim P(Y)$$

D : 제가 <명제 2.6.2>를 증명해볼게요. 만일 사상 $f: X \to Y$가 전단사라 하면, 이 사상은 집합 X의 임의의 부분집합 Z를 집합 Y의 부분집합 $f(Z)$를 대응시켜요. 지금부터 이 사상 f가 멱집합 $P(X)$에서 $P(Y)$로의 전단사임을 보이기로 해요. 사상 $f: X \to Y$가 단사이어요. 따라서, 만일 $f(A) = f(B) \in P(Y)$이면, $A = B \in P(X)$이지요. 즉, $f: P(X) \to P(Y)$도 단사이어요. 만일 $C \in P(Y)$이면, $C \subset Y$이지요. 그런데, 사상 $f: X \to Y$가 전사이므로, $C = f(D)$인 집합 $D \subset X$가 존재해요. 즉, $D \in P(X)$

이지요. 따라서, $f: P(X) \to P(Y)$도 전사이어요. 즉, 사상 f는 멱집합 $P(X)$에서 $P(Y)$로의 전단사입니다. 즉, <명제 2.6.2>가 성립해요.

2.7 비가산집합의 농도

F : <명제 2.6.1>에서 알 수 있듯이, 자연수 전체의 집합 Z_+의 멱집합 $P(Z_+)$의 농도는 Z_+의 농도보다 크다. 즉, $\aleph_0 < \#P(Z_+)$이다. 마찬가지로 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\aleph_0 = \#Z_+ < \#P(Z_+) < \#P(P(Z_+)) < \#P(P(P(Z_+))) < \cdots \qquad (2.7.1)$$

그렇다면, 실수 전체의 집합 R의 농도는 어느 정도 되는 것일까? 지금부터는 이 문제에 대해서 생각해보자. 영상아, 무한집합이 가질 수 있는 최소의 농도는 무엇일까?

Y : 무한집합이 가질 수 있는 최소의 농도는 $\aleph_0$입니다. 왜냐하면, 임의의 무한집합 X는 가산인 부분집합을 포함합니다. 따라서, $\#X \geq \aleph_0$입니다.

F : 그렇다. 잘 알다시피 가산이 아닌 무한집합을 비가산집합이라고 부른다. 이는 가산농도 $\aleph_0$보다 큰 농도를 갖는 집합이다. 비가산집합에서 가산개의 원소들을 제거한 나머지는 비가산집합일까?

D : 당연해요. 비가산집합 X에서 가산집합 Y를 뺀 $Z = X - Y$가 가산집합이면, $X = Y \cup Z$는 가산집합이어요. 이는 모순이지요.

F : 그렇다. 대표적인 비가산집합은 실수 전체의 집합 R이다. 지금부터는 이 성질을 증명해보기로 하자. 우선, 첫 번째 단계로 임의의 실수구간이 같은 농도를 가짐을 증명해보아라.

D : 우선, 폐구간 $[a, b]$와 폐구간 $[c, d]$가 대등함을 보이겠어요. 물론, $a < b$이고 $c < d$이어요. 다음과 같은 사상 $f: [a, b] \to [c, d]$를 살펴보기로 해요.

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

이 사상 f가 전단사인 것은 자명해요. 즉, $\#[a, b] = \#[c, d]$이지요. 편의상, $a <$

$c < d < b$라 놓기로 해요. 다음 포함관계들이 성립해요.

$$[c, d] \subset (a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\#[a, b] = \#[c, d] \leq \#(a, b) \leq \#(a, b] \leq \#[a, b]$$

즉, 폐구간 $[a, b]$, 반폐구간들 $[a, b)$와 $(a, b]$, 그리고 개구간 (a, b)는 모두 대등해요. 즉, 임의의 실수구간은 같은 농도를 갖지요.

F : 이제 무한집합에서 유한부분집합을 제거해도 농도가 변하지 않음을 알았을 것이다. 둘째 단계로, 임의의 실수구간과 실수 전체의 집합 R이 대등함을 보일 수 있겠니?

Y : 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$와 집합 R이 대등하다는 것을 보이기 위해서, 사상 $f(x) = \tan x$를 살펴보기로 해요. 이 사상은 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$에서 $R = (-\infty, \infty)$로의 전단사이지요. 따라서, 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$는 실수 전체의 집합 R과 대등해요. 첫째 단계의 결과를 이용하면, 임의의 실수구간과 집합 R이 대등함을 알 수 있어요.

F : 실수 전체의 집합 R의 농도를 연속농도라 부르고 $\aleph_1$으로 표기한다. 이를 aleph-one이라 읽는다. 따라서, $\#R = \aleph_1$이다. 집합 R의 부분집합 X가 어떤 개구간을 포함하면, $\#X = \aleph_1$이다. 이를 증명할 수 있겠니?

D : 앞에서와 같은 기법을 사용해서, 쉽게 증명할 수 있을 것 같아요. 이 개구간을 O라 놓으면, $O \subset X \subset R$이 성립해요. 따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\aleph_1 = \#O \leq \#X \leq \#R = \aleph_1$$

따라서, $\#X = \aleph_1$이지요.

F : 마지막 단계는 집합 R이 비가산집합임을 보이는 것이다. 즉, 다음 명제를 증명하기로 하자.

명제 2.7.1

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

이 명제의 증명은 쉬운 것이 아니므로, 아빠가 증명하기로 하겠다. 이 증명에서는 Cantor의 대각선기법을 사용한다. 앞에서 보였듯이, 집합 R은 개구간 $I=(0,1)$과 대등하다. 따라서, 개구간 I가 비가산임을 보이기로 하자. 각 $y\in I$를 무한소수 $y=0.y_1y_2y_3\cdots$로 표현할 수 있다. 여기서 $y_1, y_2, y_3, \cdots$는 각각 0에서 9까지의 자연수를 나타낸다. 이 무한소수표현에서 어떤 유한소수를 두 가지 형태로 나타낼 수 있다. 한 예로서, 다음 식들을 살펴보자.

$$0.09999\cdots = 0.09+0.009+0.0009+\cdots = 0.09\times\frac{1}{1-0.1} = 0.10000\cdots$$

즉, 유한소수 0.1은 $0.100000\cdots$ 또는 $0.099999\cdots$로 나타낼 수 있다. 이후, 유한소수를 무한소수로 표기할 때, 전자만을 사용하기로 하자. 이러한 제약 하에서, 표현 $y=0.y_1y_2y_3\cdots$는 일의적이다. 만일 집합 I가 가산이라고 가정하면, $I=\{x_1, x_2, \cdots\}$로 표기할 수 있다. 집합 I의 각 원소 x_n을 무한소수 $x_n=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots$로 표기하자. 수열 $\{x_{nn}\mid n=1,2,\cdots\}$에 대해서, 다음과 같은 수열 $\{z_n\mid n=1,2,\cdots\}$을 정의하자.

$$z_n=\begin{cases}1, & (x_{nn}\text{이 짝수})\\ 2, & (x_{nn}\text{이 홀수})\end{cases}$$

만일 $u=0.z_1z_2z_3\cdots$이라 정의하면, 명백하게 $u\in I$이다. 이 u의 소수 제 n번째 자리는 z_n이고, x_n의 소수 제 n번째 자리는 x_{nn}이고, $z_n\neq x_{nn}$이다. 따라서, 각 n에 대해서, $u\neq x_n$이다. 즉, $u\notin I$이다. 이는 모순이다. 즉, 집합 I는 비가산이다. 따라서, 연속농도 $\aleph_1$은 가산농도 $\aleph_0$보다 크다.

Y : 앞에서 증명했듯이, 비가산집합에서 가산개의 원소들을 제거한 나머지는 비가산집합이지요. 따라서, 비가산집합 R에서 가산집합 Q를 뺀 나머지인 무리수 전체의 집합은 비가산이군요. 즉, 실수 안에는 유리수들보다 무리수들이 훨씬 많이 있다는 것을 알 수 있군요.

F : 아주 잘 이해하고 있구나. 그러한 내용이 Lebesgue적분의 필요성을 이해하는데 필수적이란다. 다음과 같은 대수방정식을 살펴보자.

$$a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

계수들 $a_0, a_1, \cdots, a_p$가 정수일 때, 이 대수방정식의 근을 대수적 수(algebraic number)라 한다. <명제 2.4.1>을 사용해서, 대수적 수 전체의 집합이 $\aleph_0$라는 것을 쉽게 증명할 수 있다. 이 대수적 수들의 집합은 자연수, 유리수, 그리고 근호수(root number)로 이루어져 있다. 그리고, 대수적 수가 아닌 실수를 초월수라 한단다.

D : 실수 전체의 집합은 자연수, 유리수, 근호수 그리고 초월수로 이루어져 있군요. 그렇다면, 초월수 전체의 집합의 농도는 $\aleph_1$이겠군요.

Y : 놀랍군요. 저희들이 알고 있는 초월수는 기껏해야 π, e, Euler상수 γ뿐인데….

F : 그렇다. 어떤 2개의 수들 a와 b 사이에는 $\aleph_1$개 만큼의 초월수들이 존재한다. 이는 인간이 아직 수의 세계에 대해서 잘 알지 못한다는 뜻이 아닐까? 다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

(a) $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 = \aleph_0$

(b) $\aleph_1 + \aleph_1 + \cdots + \aleph_1 = \aleph_1$

(c) $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$

(d) $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \cdots \times \aleph_0 = \aleph_0$

(e) $\aleph_1 \times \aleph_1 \times \cdots \times \aleph_1 = \aleph_1$

Y : 아! 수의 세계는 오묘하여라! 실수 전체의 집합 R과 자연수 전체의 집합 Z_+의 멱집합 $P(Z_+)$ 중에서 어느 것의 농도가 더 커요? 그들 사이에 농도가 다른 집합이 존재하나요?

F : 좋은 질문이다. 사실, 집합 R과 멱집합 $P(Z_+)$는 대등하단다. 즉, 다음 명제가 성립한다.

명제 2.7.2

$$R \sim P(Z_+)$$

지금부터 이 명제를 증명하기로 하자. 우선, $\#R \leq \#P(Z_+)$를 증명하기로 하자. 누가 해보겠니?

D : 제가 할게요. 임의의 실수 $x \in R$에 대해서, 집합 $Q_x = \{r \mid x < r,\ r \in Q\}$라 정의하기로 해요. 정의에 의해서, $Q_x \in P(Q)$이지요. 또한, $f(x) = Q_x$인 사상 $f: R \to P(Q)$는 단사임을 쉽게 알 수 있어요. 따라서, $\#R \le \#P(Q)$이지요. 앞에서 보였듯이, $Q \sim Z_+$이어요. 따라서, 식 $\#R \le \#P(Z_+)$이 성립해요.

F : 지금부터는 $\#P(Z_+) \le \#R$를 증명하기로 하자. 이 부등식의 증명은 쉬운 것이 아니므로, 아빠가 설명하기로 하마. 자연수 전체의 집합 Z_+의 임의의 부분집합 Y는 최대가산집합이다. 따라서, $Y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$로 표기할 수 있다. 여기서 $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$이다. 또한, 사상 $g(Y) = \sum_{y \in Y} 2^{-y}$을 정의하면, 다음 식이 성립한다.

$$g(Y) = \frac{1}{2^{y_1}} + \frac{1}{2^{y_2}} + \frac{1}{2^{y_3}} + \cdots$$

즉, $g(Y)$는 소수 제 y_1째 자리, 소수 제 y_2째 자리, 소수 제 y_3째 자리, …는 1이고, 나머지 소수자리들은 0인 2진법의 수이다. 이 $g(Y)$는 $P(Z_+)$에서 $[0, 1]$로 가는 사상이다. 만일 $U \subset Z_+$이고 $U \neq Y$이면, $g(U) \neq g(Y)$이다. 즉, 사상 $g: P(Z_+) \to [0, 1]$은 단사이다. 따라서, $\#P(Z_+) \le \#[0, 1]$이다. 임의의 실수구간과 집합 R이 대등하므로, $\#P(Z_+) \le \#R$이다. 따라서, <명제 2.7.2>가 성립한다.

Y : 결론적으로, 집합 R과 멱집합 $P(Z_+)$는 대등하군요.

F : <명제 2.4.1>에서 보였듯이, $Z_+ \sim Z_+ \times Z_+ = Z_+^2$이다. 그렇다면, 다음 명제가 성립할까?

명제 2.7.3

$$R \sim R \times R = R^2$$

D : <명제 2.7.3>이 성립한다면 직선과 평면은 대등하군요.

F : 그렇단다. <명제 2.7.3>이 성립하고, 따라서 직선과 평면은 대등하단다. 영상이가 <명제 2.7.3>을 증명할 수 있겠니? 힌트는 <명제 2.4.1>과 <명제 2.7.2>를 이용하는 것이다.

Y : 네. 해볼게요. 홀수인 자연수 전체의 집합을 Z_o라 하고, 짝수인 자연수 전체의 집합을 Z_e라 하기로 해요. 자연수 전체의 집합 Z_+의 부분집합 Y에 대해서 $f(Y) = (Y \cup Z_e, Y \cup Z_o)$인 사상 f는 $P(Z_+)$에서 $P(Z_o) \times P(Z_e)$로의 전단사임을 쉽게 알 수 있어요. 즉, $P(Z_+)$와 $P(Z_o) \times P(Z_e)$는 대등하지요. 또한, $Z_o \sim Z_+ \sim Z_e$이고, <명제 2.7.2>에 의해서, $R \sim P(Z_+)$이지요. 즉, $R \sim R^2$이어요.

F : 아주 간결하고 뛰어난 증명이었다. <명제 2.7.3>은 Cantor가 발견한 것으로서, 집합론의 역사상 빛나는 업적들 중의 하나이다. 이제 동연이가 다음 명제를 증명해보아라.

명제 2.7.4

만일 $X_1 \sim X_2$이고 $Y_1 \sim Y_2$이면, $X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2$이다.

D : 가정에 의해서, 전단사 $f : X_1 \to X_2$와 전단사 $g : Y_1 \to Y_2$가 존재해요. 사상 $h(x, y) = f(x)g(y)$를 정의하면, $h : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$가 전단사임은 명백해요. 따라서, <명제 2.7.4>가 성립해요.

F : <명제 2.7.3>과 <명제 2.7.4>에 의해서, 각 자연수 n에 대해서 $R^n \sim R$임을 알 수 있다. 지금까지 가산농도 $\aleph_0$와 연속농도 $\aleph_1$에 대해서 다루었다. 또한, <명제 2.7.1>에서 $\aleph_0 < \aleph_1$를 증명하였다. 그렇다면, $\aleph_0 < \#X < \aleph_1$를 만족하는 집합 X는 존재하는 것일까? Cantor는 이 부등식들을 만족하는 집합 X는 존재하지 않을 것이라고 생각했다. 이를 연속체가설이라고 부른다. 이 가설의 성립여부는 아직 알려지지 않고 있단다.

Y : 제가 연속체가설을 증명해보고 싶어요.

F : 아빠도 영상이가 연속체가설을 증명하면 좋겠다. 그러나, 학문의 세계는 넓고 또한 깊은 것이다. 너무 일찍 목표를 정하지는 말거라. 일단 대학에서 다양한 학문분야들을 맛보고 그 과정에서 자신의 능력도 안 다음에, 평생에 걸쳐 할 일을 정해도 늦지 않다고 생각한다. 앞으로 네가 직업을 선택할 때는 명예나 금전적인 면보다는 네가 평생 좋아할 일을 택해야 한다고 아빠는 생각한단다. 이제 무한과 집합론에 대해서는 여기서 끝내고, 본격적으로 Lebesgue측도와 Lebesgue적분에 대해서 공부하기로 하자.

제 3 장

Lebesgue측도

3.1 Lebesgue적분의 필요성

F : 제 1.2 절에서 간략하게나마 Riemann적분을 정의했다. 결국 적분이란 작은 값들의 합이라고 할 수 있는데, 왜 Riemann적분 이외의 다른 적분이 필요한 것일까? 이에 대해 생각해보는 것이 이 장의 목적이다.

Y : Fourier해석이나 확률론에 관한 책들을 읽다보면, '이 적분은 Lebesgue적분이다'라고 적혀 있어요. 아빠가 금융공학이나 전자공학을 하려면 Lebesgue적분을 알아야 한다고 하셨는데, 이제 Lebesgue적분은 그렇게 현실로 다가오나요?

F : 그렇다. 대부분의 이학과 공학에서는 Riemann적분으로도 충분한 경우가 많지만, 수학적으로 볼 때 Riemann적분은 여러 가지 약점들을 지니고 있다. 이 약점들을 보완하고 확장해서, 함수해석학(functional analysis)의 기초를 형성하는 것이 Lebesgue적분이다. 오늘날의 학문세계는 Newton의 결정론적 사고관에서 벗어나, 확률적(stochastic)이라는 개념을 바탕으로 자연현상, 사회현상 그리고 경제현상을 파악하려는 경향이 있다. 이 확률적이라는 개념을 다루기에는 Riemann적분보다 Lebesgue적분이 훨씬 더 유용하다. 특히, 금융공학, 양자역학, 정보이론, 시스템론, 최적화 문제 등을 깊게 공부하기 위해서는 반드시 Lebesgue적분을 알고 있어야 한다.

Y : 아빠, 함수해석학이 무엇이어요?

F : 함수들의 집합에 위상을 도입해서 위상공간을 만들고, 그 안에서 일어나는 현상을 연구하는 것을 함수해석학이라고 한다.

D : 현재로서 우리가 알아야 할 것들을 정리하면 다음과 같겠군요?

(a) Riemann적분은 어떠한 문제점들을 내포하고 있는가?
(b) 이러한 약점들을 극복하는 방법은 무엇인가?
(c) Lebesgue적분의 정의는 무엇인가?
(d) Lebesgue적분은 Riemann적분의 약점들을 극복하는가?

Y : 아빠, Riemann적분에는 어떤 약점들이 있어요?

F : Riemann적분의 첫 번째 약점은 Riemann적분이 불가능한 함수가 있다는 것이다. 예를 들어, 가산개 이상의 불연속점을 갖는 함수는 Riemann적분을 할 수 없다. 영상아, 함수열 $\{f_n(t)\}$가 함수 $f(t)$에 일양수렴(uniform convergence)한다는 것이 무엇인지 아니?

Y : 너무 무시하지 마세요. 일양수렴의 정의는 다음과 같아요.

정의 3.1.1 함수열 $\{f_n(t)\}$가 집합 E에서 함수 $f(t)$에 일양수렴한다는 것은 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해서 다음 식을 만족하는 자연수 N이 존재하는 것이다.

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{t \in E} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \qquad \square$$

F : 영상이도 제법이구나. 아빠는 영상이를 무시하지 않는다.

Y : 흥! 이미 무시했잖아요.

F : Riemann적분의 두 번째 약점은 극한함수의 적분을 적분의 극한으로 나타내기 위해서 일양수렴성을 필요로 한다는 것이다. 즉, 만일 구간 $[a, b]$에서 $\{f_n(t)\}$가 함수 $f(t)$에 일양수렴하면, Riemann적분에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n \to \infty} (R) \int_a^b f_n(t)\,dt = (R) \int_a^b f(t)\,dt = (R) \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(t)\,dt \qquad (3.1.1)$$

여기서 $(R)\int$은 Riemann적분을 뜻한다. 만일 일양수렴조건이 성립하지 않으면, Riemann적분에서 식 (3.1.1)이 성립한다고 할 수 없다. 함수열 $\{f_n(t)\}$의 일양수렴성은 매우 강한 조건이다. 반면에, Lebesgue적분에서는 함수열 $\{f_n(t)\}$이 일양수렴성보다 훨씬 약한 조건을 만족해도 다음 식들이 성립할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \tag{3.1.2}$$

여기서 $\int$은 Lebesgue적분을 뜻한다. 이 성질을 Lebesgue수렴정리라고 하는데, 이 정리가 Lebesgue적분을 사용하는 최대 이점이라고 할 수 있다. 이 정리 덕분에 근대해석학을 구축할 수 있었다고 해도 과언이 아니다. 동연아, 일양수렴하지 않는 함수열의 예를 들어 보거라.

D : 구간 $[0,1]$에서 다음과 같이 정의되는 함수열 $\{f_n(t)\}$를 살펴보기로 해요.

$$f_n(t) = \frac{t^2}{t^2 + (1-nt)^2}, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.1.3}$$

다음 식들이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0, \ (0 \le t \le 1), \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

따라서, 함수열 $\{f_n(t)\}$는 일양수렴하지 않아요. 즉, 식 (3.1.1)이 성립한다고 장담할 수는 없어요.

F : 아주 좋은 예를 들었다. 식 (3.1.3)의 함수 $f_n(t)$는 다음 명제를 만족함을 쉽게 알 수 있다.

$$t \in [0,1] \ \Rightarrow \ |f_n(t)| \le 1$$

나중에 알게 되겠지만, 이러한 명제가 만족되면 식 (3.1.2)가 성립한다. 즉, Lebesgue적분에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

영상이는 Riemann적분에서 중적분을 할 때 적분순서를 교환할 수 있는 조건을 알고 있니?

Y : 아! 정말 다행이다. 내가 알고 있는 것에 대해서 질문 받을 때의 이 기쁨! 적분의 순서를 바꾸는데는 Fubini정리가 유용해요. Riemann적분에서 Fubini정리는 다음과 같고요. 이 정리의 증명은 Wade (2000, p. 395)에서 찾을 수 있어요.

정리 3.1.1 Riemann적분의 Fubini정리

함수 $f(\cdot,\cdot)$가 다음과 같은 세 가지 조건들을 만족한다고 가정하자.

(a) 각 $x \in [a, b]$에 대해서 함수 $f(x, \cdot)$는 구간 $[c, d]$에서 Riemann 적분가능하다.

(b) 각 $y \in [c, d]$에 대해서 함수 $f(\cdot, y)$는 구간 $[a, b]$에서 Riemann 적분가능하다.

(c) 함수 $f(\cdot,\cdot)$는 $[a, b]\times[c, d]$에서 Riemann적분가능하다.

이 세 가지 조건들이 만족되면, 다음 식이 성립한다.

$$(R)\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = (R)\int_c^d\int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

F : <정리 3.1.1>에서 알 수 있듯이, Riemann적분의 세 번째 약점은 적분순서를 교환하기 위해서 매우 강한 조건을 필요로 한다는 것이다. 반면에, Lebesgue적분에서는 적분이 존재하기만 하면, 적분의 순서를 교환하는 것이 가능하단다. Lebesgue적분에서 Fubini 정리는 다음과 같다.

정리 3.1.2 Lebesgue적분의 Fubini정리

만일 $f(\cdot,\cdot)$가 $A\times B$에서 Lebesgue적분가능하면, 다음 성질들이 성립한다.

(a) 각 $x\in A$에 대해서 함수 $f(x,\cdot)$는 집합 B에서 Lebesgue적분가능하다.

(b) 각 $y\in B$에 대해서 함수 $f(\cdot,y)$는 집합 A에서 Lebesgue적분가능하다.

(c) Lebesgue적분한 함수 $\int_A f(x,y)\,dx$는 집합 B에서 Lebesgue적분가능하다.

(d) Lebesgue적분한 함수 $\int_B f(x,y)\,dy$는 집합 A에서 Lebesgue적분가능하다.

(e) $\int_A\int_B f(x,y)\,dy\,dx = \int_B\int_A f(x,y)\,dx\,dy$

이 정리에 대한 자세한 내용은 Royden (1988, pp. 307~308)을 참조해라. 동연아, 미적분학의 근본정리(the fundamental theorem of calculus)가 무엇이니?

D : 미적분의 근본정리는 정적분과 원시함수 사이의 관계를 규명하는 것으로, 다음과 같아요.

정리 3.1.3 미적분학의 근본정리

만일 함수 $f(t)$에 구간 $[a,b]$에서 Riemann적분가능하고, 또한, 만일 구간 $[a,b]$에서 미분가능하고 $F'=f$인 함수 F가 존재하면, 다음 식이 성립한다.

$$(R)\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

F : 이 미적분학의 근본정리는 Lebesgue적분에서도 성립한다. Riemann적분의 네 번째 약점은 <정리 3.1.3>의 역이 반드시 성립한다고 할 수는 없다는 것이다. 즉, 어떤 복잡한 함수 $f(t)$의 부정적분 $F(t)=(R)\int f(t)\,dt$의 미분이 항상 $f(t)$라고 할 수는 없단

다. 예를 들어, 함수 $f(t)$가 가산개의 불연속점들을 가지고 있다면, 각 불연속점에서 F'를 어떻게 정의해야 할까? 그러나, Lebesgue적분에서는 <정리 3.1.3>의 역이 성립한다. 즉, 다음 정리가 성립한다.

정리 3.1.4

만일 함수 $f(t)$에 구간 $[a, b]$에서 Lebesgue적분가능하고, 또한, 만일 $t \in [a, b]$에 대해서 $F(t) = \int_a^t f(z)\,dz$이면, 구간 $[a, b]$의 거의 모든 점(almost everywhere)에서 $F' = f$이다.

Y : <정리 3.1.4>에서 '거의 모든 점'이라는 것이 무슨 뜻이어요?

F : 날카로운 질문이구나. 그 질문에 대한 답을 안다는 것은 Lebesgue측도를 안다는 것이다. 자세한 것은 뒤에서 배우게 되겠지만, 지금은 말 그대로 거의 모든 점에서라고 받아들이도록 해라. <정리 3.1.4>가 의미하는 바는 다음과 같다. Riemann적분에서는 어떤 함수 $f(t)$의 부정적분 $F(t)$의 미분이 항상 $f(t)$라고 할 수는 없다. 그러나, Lebesgue적분에서는 절대연속(absolutely continuous)인 함수에 대해서 이 성질이 성립한다. 이러한 정리를 Radon-Nikodym정리라고 한다. 본서에서는 Radon-Nikodym 정리를 자세히 다루지는 않지만, 재무론(finance)을 공부할 사람들은 반드시 이 정리를 알아야 한다. 금융파생상품의 가격을 공정하게 평가하기 위해서는 동치마팅게일측도(equivalent martingale measure)를 사용해야 하고, 동치마팅게일측도를 유도하는데는 Radon-Nikodym정리를 사용해야 한다.

Y : 선배들이 Hilbert공간을 이해하기 위해서는 Lebesgue적분을 알고 있어야 한다고 하는데 맞는 말이어요?

F : 그렇다. Hilbert공간의 정의는 완비(complete) 내적공간(inner product space)이다. 즉, Euclid공간의 벡터들로 이루어진 내적공간을 함수들로 이루어진 내적공간으로 확장한 것이다. 따라서, 아빠는 Hilbert공간의 분석을 포함하는 함수해석학을 해석학의 연장이라기보다는 선형대수학의 연장으로 본다. Hilbert공간을 이해하려면, Lebesgue적분에 대한 지식이 필수적이란다. 앞에서도 설명했듯이, 정보화 사회에서는 방대하고 복잡한 정보를 취급하는 경우가 많아져서, 지금까지 널리 이용되던 기초적인 수학만으로는 설명되지 않

는 문제들이 발생하고 있다. Hilbert공간을 도입하면, 이러한 문제들을 해결할 수 있는 경우가 있단다.

D : Lebesgue적분을 사용하면 Riemann적분의 약점들을 극복할 수가 있군요?

F : Lebesgue적분이 Riemann적분이 가지고 있는 모든 약점들을 극복할 수는 없지만, 적어도 앞에서 제기한 약점들은 극복할 수가 있다. 그렇다면, Lebesgue적분을 배울만한 가치가 있지 않니?

3.2 Riemann적분이 불가능한 함수

D : 아빠, Riemann적분이 불가능한 함수에는 어떤 것이 있어요?

F : 다음과 같은 Dirichlet함수를 구간 $[0, 1]$에서 살펴보자.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & (t : \text{유리수}) \\ 0, & (t : \text{무리수}) \end{cases}$$

영상이가 이 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 설명해보아라.

$$f(t) = \lim_{m \to \infty} [\lim_{n \to \infty} \{\cos(m!\pi t)\}^{2n}]$$

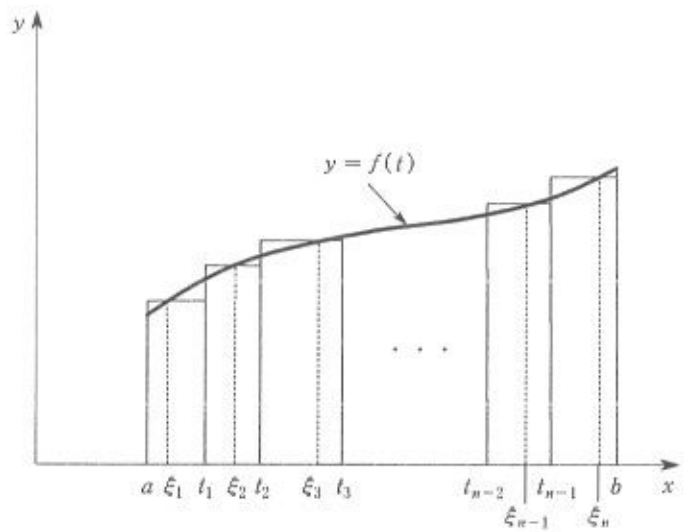
여기서 m과 n은 자연수들이다.

Y : 우선, 다음 식을 정의해요.

$$D_m(t) = \lim_{n \to \infty} \{\cos(m!\pi t)\}^{2n}, \quad (t \in [0, 1])$$

만일 $t \in [0, 1]$가 유리수이면, 식 $t = n/m!$을 만족하는 자연수들 m과 n이 존재해요. 명백하게, $\cos(m!\pi t) = \pm 1$, 즉 $D_m(t) = 1$이지요. 또한, 만일 $t \in [0, 1]$이 무리수이면, 식 $t = n/m!$을 만족하는 자연수들 m과 n이 존재하지 않아요. 따라서, 임의의 자연수 m에 대해서, $\cos(m!\pi t) < 1$이지요. 즉, $D_m(t) = 0$이지요. 그러므로, $\lim_{m \to \infty} D_m(t)$는 유리수 t에서는 1이고, 무리수 t에서는 0이어요. 내가 생각해도 멋있는 설명이다!

【그림 3.2.1】 Riemann적분의 정의



F : 그래, 멋있다. 이 함수는 구간 [0, 1]에서 Riemann적분이 가능할까?

D : 아무리 작은 소구간이라도 함수의 최대값과 최소값의 차이가 1이어요. 따라서, 이 함수는 Riemann적분이 가능하지 않아요.

F : 그렇단다. 우리는 구간 [0, 1]에서 이 함수의 적분이 가능하도록 새로운 적분을 정의하고자 한다. 이 새로운 적분이 Lebesgue적분이다. 우선, 영상이가 Riemann적분을 체계적으로 정의해보거라.

Y : Riemann적분을 정의하기 위해서, <그림 3.2.1>과 같이 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(t)$를 살펴보기로 해요. 우선, 구간 $[a, b]$를 다음 식을 만족하는 소구간들로 분할해요.

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{3.2.1}$$

또한, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$라 하고, ξ_k를 제 k번째의 소구간 $[t_{k-1}, t_k]$에 속하는 어떤 값이라 하고, 이 소구간에서 함수 $f(t)$의 최소값과 최대값을 각각 m_k와 M_k라 하고, 다음 식들을 정의하기로 해요.

$$S_L = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta t_k, \quad S_U = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k$$

$$\delta_n = \max_{1 \le k \le n} \Delta t_k$$

다음 부등식들이 성립함은 명백해요.

$$S_L \le S_n \le S_U$$

만일 하계의 상한(the greatest lower bound) $\lim_{\delta_n \to 0} S_L$과 상계의 하한(the least upper bound) $\lim_{\delta_n \to 0} S_U$가 같으면, 함수 $f(t)$는 구간 $[a, b]$에서 Riemann적분이 가능하다고 하고 S_n의 극한값을 $(R)\int_a^b f(t)dt$라 쓰지요.

F : 그럼, 동연이가 구간 $[0, 1]$에서 Dirichlet함수의 Riemann적분이 불가능한 이유를 좀 더 자세히 설명해보아라.

D : 구간 $[0, 1]$을 어떻게 분할해도, 제 k번째의 소구간 $I_k = [t_{k-1}, t_k]$에서 함수 $f(t)$의 최소값과 최대값은 각각 $m_k = 0$과 $M_k = 1$이어요. 따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$S_L = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \times \Delta t_k = 0$$

$$S_U = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \times \Delta t_k = 1$$

즉, $\lim_{\delta_n \to 0} S_L = 0 \neq 1 = \lim_{\delta_n \to 0} S_U$이지요. 따라서, Riemann적분이 불가능해요.

F : Dirichlet함수가 Riemann적분이 불가능한 이유는 구간 $[0, 1]$을 분할하는 방법에서 발생하는 것이다. 즉, 분할된 각 수구간에서의 면적을 계산할 수 없었기 때문에 발생하는 것이다. 우리가 구간 $[0, 1]$을 작은 소구간들 $\{I_k\}$로 분해할 것이 아니라 농도를 바탕으로 분해한다면, 적분이 가능할 수도 있지 않겠니?

Y : 구간 $[0, 1]$에 속하는 유리수들의 농도는 $\aleph_0$이고 무리수들의 집합의 농도는 $\aleph_1$이므로, 상대적으로 유리수들의 집합을 무시할 수 있겠군요.

F : 그렇다. Dirichlet함수는 구간 $[0, 1]$에 속한 모든 유리수들의 집합 A의 각 점에서 1을 갖고, 구간 $[0, 1]$에 속한 모든 무리수들의 집합 B의 각 점에서 함수값 0을 갖는다. 집합 A의 농도 $\aleph_0$는 집합 B의 농도 $\aleph_1$에 비해 무시할 정도로 작다. 따라서, Dirichlet함수는 말 그대로 거의 모든 점(almost everywhere, $a.e.$)에서 0이라고 할 수 있고, 결과적으로 새로운 적분에서는 Dirichlet함수의 적분값이 0으로 정해지는

것이 타당할 것 같다. 즉, 새로운 적분에서는 집합 A의 크기 $m(A)$에 함수값 1을 곱한 수 $m(A)$에 집합 B의 크기 $m(B)$에 함수값 0을 곱한 수 0을 더한 것이어야 할 것이다.

D : 그렇다면, 우리가 새로이 배우려는 Lebesgue적분에서는, 집합의 크기를 측정하는 척도를 농도로부터 유도해야 하는군요.

F : 그렇다. 그것이 Lebesgue적분의 핵심이다. Riemann적분의 관점에서 다음과 같은 적분, 즉 면적 S를 생각해보자.

$$S = (R)\int_0^1 f(t)\,dt$$

만일 $t = 1$에 해당하는 수직선을 면적 S에서 제거한 면적 S_1은 어떻게 될까?

Y : 선분에는 면적이 없으므로, 적분값에는 변함없어요. 즉, 다음 식이 성립해요.

$$S_1 = (R)\int_0^1 f(t)\,dt - 0 = S$$

F : 그렇다면, 만일 $t = 1/2$에 해당하는 수직선을 면적 S_1에서 제거한 면적 S_2는 어떻게 될까?

D : 마찬가지로, 선분에는 면적이 없으므로, 적분값에는 변함없어요. 즉, 다음 식이 성립해요.

$$S_2 = (R)\int_0^1 f(t)\,dt - 0 = S$$

F : 그럼 이런 방법으로 면적 S에서 몇 개의 수직선들을 제거해도 적분값, 즉 면적은 변함없을까?

Y : 우선, 유한개의 수직선들을 제거할 수 있어요.

D : 그럼, 무한개의 수직선들을 제거할 수는 없을까요?

F : 만일 ∞가 가산농도이면, $0 \times \infty = 0$이다. 왜 그럴까?

Y : 만일 ∞가 가산농도이면, 다음과 같은 표현을 사용할 수 있어요.

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\infty \times 0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1\right) \times 0 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 \times 0) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

F : 그러나, 만일 ∞가 연속농도이면, $0 \times \infty$는 0이 아닌 유한값이 될 수도 있다. 따라서, 면적 S에서 가산개의 수직선들을 제거해도, 면적은 변함이 없을 것이다. 뒤에서 자세히 설명하겠지만, Lebesgue는 점집합의 측도(measure)를 정의하고, 이러한 측도 하에서는 가산의 수 곱하기 0은 0임을 보였다. 따라서, 구간 $[0,1]$에서의 적분은 이 구간에 속한 각 유리수에서 갖는 함수값을 무시할 수가 있다. 이러한 이유로 Dirichlet함수는 거의 모든 점에서(almost everywhere) 0을 갖는다고 한다. 따라서, Lebesgue측도를 사용하면, 면적 S의 값은 0이다.

3.3 Riemann적분과 Jordan측도

F : Riemann적분을 좀더 자세히 이해하기 위해서는 먼저 Jordan측도를 알고 있어야 한다.

Y : 측도(measure)란 무엇을 의미하나요?

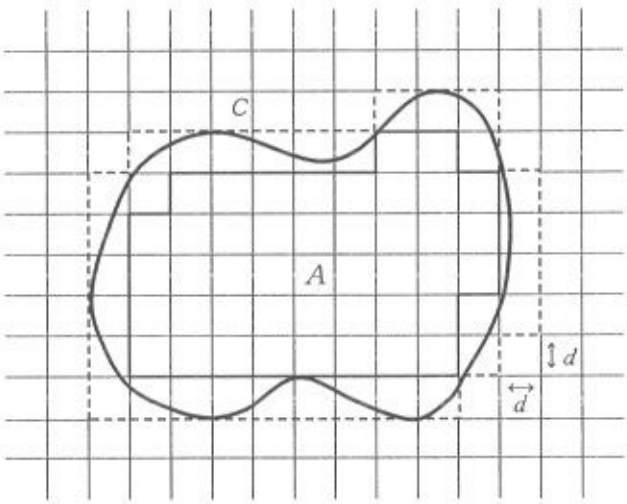
F : 쉽게 말해서, 측도란 1차원에서는 길이, 2차원에서는 면적, 그리고 3차원에서는 부피를 측정하는 척도를 의미한다. 수학에서 측도론(measure theory)은 측도를 추상적으로 논하는 것이다. 구분구적법을 사용해서, <그림 3.3.1>에서 곡선 C로 둘러싸인 집합 A의 면적을 구할 수 있겠니?

D : 제가 해볼게요. <그림 3.3.1>은 모눈 한 변의 길이가 d인 모눈종이 위에 폐곡선 C를 그린 것이라고 가정해요. 집합 A 안에 포함되는 작은 사각형들의 최대 개수를 l_d라 하고, 또한 집합 A를 포함하는 작은 사각형들의 최소 개수를 u_d라 해요. 만일 집합 A의 면적을 $j(A)$라 한다면, 다음 식들이 성립함은 명백해요.

$$l_d d^2 \le j(A) \le u_d d^2 \tag{3.3.1}$$

만일 $\lim_{d \to 0} l_d d^2 = \lim_{d \to 0} u_d d^2$이면, Jordan측도의 의미에서 집합 A의 면적은 이 극한값이어요. 이 경우에 집합 A를 Jordan가측이라고 해요. 또한, $\lim_{d \to 0} l_d d^2$와 $\lim_{d \to 0} u_d d^2$

【그림 3.3.1】 Jordan측도



각각을 집합 A의 내측도(inner measure)와 외측도(outer measure)라고 해요. 따라서, 만일 어떤 집합의 외측도와 내측도가 같으면, 이 집합을 Jordan가측이라고 해요.

F : 잘 설명했다. Jordan측도에 대한 자세한 내용은 Wade (2000, pp. 372~382)를 참조하도록해라. 결국, 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)(\geq 0)$에 대해서 Riemann적분 $(R)\int_a^b f(t)\,dt$를 구한다는 것은 Jordan가측인 집합 $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq f(x) \leq y\}$의 면적을 Jordan측도를 사용해서 구하는 것이다.

Y : 대부분의 경우, Jordan측도로 길이, 면적, 그리고 부피를 측정할 수 있을 것 같아요. 물론, 앞에서 정의한 Dirichlet함수의 경우에는 외측도와 내측도가 같지 않지만, 이 함수는 아주 특수한 경우일 것 같아요. 대부분의 경우에는 Jordan측도를 적용할 수 있지 않을까요?

F : 직관적으로는 그렇게 생각되겠지. 그러나, 깊이 공부를 하다보면, 직관적으로는 존재 이유를 설명하기가 힘든 복잡한 집합들을 다루어야 할 경우가 있단다. 즉, 세상에는 Jordan측도로는 측정할 수 없는 집합들이 아주 많단다.

D : 어떤 것이 있어요?

F : 예를 들면, <그림 3.3.1>의 집합 A에 대해서 집합 $B = \{(x, y) \in A \mid x \in Q,\ y \in Q\}$의 면적을 Jordan측도로 측정할 수 있을까?

Y : 그 문제는 Dirichlet함수를 적분하는 것과 유사한 문제이어요. 따라서, Dirichlet함수의 경우와 같은 논리로 생각하면, 한 점의 면적은 0이고, 유리수들의 카아티젼곱들은 가산개이므로 집합 B의 Jordan측도는 $0 \times \aleph_0 = 0$이 되겠지요.

F : 극한의 개념을 사용해서 좀더 자세히 설명할 수 있겠니?

Y : 저의 내공을 지켜보세요! 집합 B는 가산집합이므로, $B = \{q_1, q_2, \cdots\}$라 쓸 수 있어요. 여기서 각 q_i는 집합 A에서 X좌표값과 Y좌표값이 모두 유리수들인 점이어요. 아주 작은 양수 ε에 대해서, 점 q_1을 중점으로 하고 면적이 $\varepsilon^2/2$인 정사각형을 S_1이라고 해요. 또한, 점 q_2를 중점으로 하고 면적이 $\varepsilon^2/2^2$인 정사각형을 S_2라고 해요. 같은 방법으로, 점 q_n을 중점으로 하고 면적이 $\varepsilon^2/2^n$인 정사각형을 S_n이라고 해요. 당연히, $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$이어요. 따라서, 집합 B의 Jordan측도는 다음 식들을 만족해요.

$$j(B) \leq \varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2^2 + \cdots = \varepsilon^2$$

따라서, 만일 $\varepsilon \to +0$이면, $j(B) \to 0$이어요.

F : 아주 잘 증명했다. 이제보니 영상이의 내공이 아주 깊구나. 지금부터는 Jordan측도의 성질들을 살펴보기로 하자. Jordan가측인 집합들 전체를 J로 표기하기로 하고, 집합 J의 성질들을 설명해보거라.

D : 다음 명제들이 성립함은 자명해요.

(J1) $A_1 \in J,\ A_2 \in J \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in J$

(J2) $A_1 \in J,\ A_2 \in J \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in J$

또한, 이 명제들을 사용해서, 다음 명제가 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

(J3) $A_1 \in J,\ A_2 \in J,\ A_2 \subset A_1 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in J$

F : 그렇다. Jordan측도는 어떠한 성질들을 가질까?

Y : Jordan측도는 다음 명제들을 만족해요.

(J4) $A \in J \Rightarrow j(A) \geq 0$

(J5) $A_1 \in J,\ A_2 \in J,\ A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow j(A_1 \cup A_2) = j(A_1) + j(A_2)$

F : 그렇다. 우리는 명제 (J5)를 다음과 같이 확장할 수 있다.

(J6) 만일 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in J$이고, 또한 만일 $A_i \cap A_k = \phi,\ (i \neq k)$이면, 다음 식이 성립한다.

$$j(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = j(A_1) + j(A_2) + \cdots + j(A_n) \qquad (3.3.2)$$

이 성질을 Jordan측도의 유한가법성(finite additivity)이라 한다.

D : 명제 (J6)는 n이 가산무한(countably infinite)인 경우에는 성립하지 않나요?

F : 그 점이 문제란다. 즉, n이 가산무한일 때, 식 (3.3.2)가 성립하지 않는다는 것이 Jordan측도의 가장 큰 결점이다. 따라서, 이것이 Riemann적분의 가장 큰 취약점의 원인이 된다.

Y : 아빠! 그렇다면 Lebesgue측도는 가산가법성(countable additivity)이 성립하도록 정의해야 하겠군요.

F : 논리적으로 생각할 때 당연히 그래야겠지?

3.4 Lebesgue측도

F : Jordan측도에서는 구간들 $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, 그리고 (a, b) 각각의 길이는 $b-a$이다. 그러나 앞에서 말했듯이, Jordan측도에서는 폐구간 $[0, 1]$에 속한 유리수 전체 집합 $Q \cap [0, 1]$의 길이를 측정할 수가 없다. 그렇다면, 어떻게 기존의 Jordan측도에 의한 길이와 부합하면서, 집합 $Q \cap [0, 1]$의 길이를 측정할 수 있는 측도를 정의할 수 있을까?

D : 아빠는 제 1 장에서 적분은 단지 'divide and conquer'의 전략을 쓰는 것이라고 했고, 또한 제 3.3 절에서 Jordan측도의 가장 큰 단점은 유한가법성은 성립하나 가산가법성이 성립하지 않는 것이라고 했어요. 그렇다면, 새로운 측도에서는 측정하고자 하는 집합을 유한개가 아닌 가산무한개의 부분집합들로 나누어 생각해야 할 것 같아요.

F : 핵심을 아주 잘 파악하였구나. 그러한 새로운 측도를 Lebesgue측도라 한다. Lebesgue 측도에서도 구간 $I=[a,b]$의 길이를 당연히 $m(I)=b-a$라고 정의한다. 이 정의를 사용해서 집합 $Q\cap I$의 길이를 Lebesgue측도로 측정하기로 하자. Lebesgue의 기본적인 아이디어는 다음과 같다. 집합 $Q\cap I$는 가산집합이므로, 이 집합의 모든 원소들을 $a_1, a_2, \cdots$로 나열할 수 있다. 원소 a_k를 포함하는 반개구간을 B_k로 표기하자. 명백하게, 다음 식이 성립한다.

$$(Q\cap I)\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

반개구간 B_k의 길이를 ε_k라고 하면, Lebesgue측도 m은 다음 식들을 만족해야 한다.

$$m(Q\cap I)\le m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big)\le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \tag{3.4.1}$$

이 $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$의 값은 반개구간들 $B_1, B_2, \cdots$을 어떻게 선택하느냐에 따라 달라진다. 이 값들의 하한값을 집합 $Q\cap I$의 외측도 $U_L(Q\cap I)$라 한다. 여기서 아래첨자 L은 Lebesgue를 상징한다.

Y : 외측도 $U_L(Q\cap I)$의 정의는 Jordan측도의 상계의 하한(the least upper bound)의 정의와 동일하군요.

F : 그렇다. 집합 $Q\cap I$의 외측도를 구해보겠니?

Y : 제가 해볼게요. 각 반개구간 B_k의 길이를 $\varepsilon_k=\varepsilon 2^{-k}$라고 두면, 다음 식들이 성립해요.

$$m(Q\cap I)\le \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=\varepsilon\to 0$$

따라서, 집합 $Q\cap I$의 외측도 $U_L(Q\cap I)$는 0이어요.

D : 길이는 항상 비음이어야 하므로, 새로운 Lebesgue측도에 의한 집합 $Q\cap I$의 길이 $m(Q\cap I)$는 0이군요.

F : 그렇다. 집합 $Q\cap I$의 경우는 특수해서, 외측도만으로 Lebesgue측도값 $m(Q\cap I)$을 알 수 있었다. 그러나, 일반적으로는 외측도만으로는 Lebesgue가측성을 알 수 없다. 지금부터는 내측도를 정의하기로 하자.

Y : Lebesgue측도의 외측도와 Jordan측도의 상계의 하한(the least upper bound)이 동일하므로, Lebesgue측도의 내측도와 Jordan측도의 하계의 상한(the greatest lower bound)은 서로 다르겠군요. 그렇지 않으면, 두 측도들은 동일한 것이니까요.

F : 그렇다. Lebesgue측도에서는 내측도의 정의가 중요하며, 이 정의에 의해서 Lebesgue 측도가 Jordan측도와 구별된다. 지금 거리를 측정하려는 집합 $Q \cap I$가 유계이므로, 이 집합 $Q \cap I$의 집합 I에 대한 보집합인 $Q^c \cap I = I \setminus Q$를 살펴보자. 여기서 키포인트는 보집합을 생각한다는 것이다. 반개구간들 $E_1, E_2, \cdots$가 이 보집합 $I \setminus Q$를 덮는다고 가정하자. 즉, $(Q^c \cap I) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$이 성립한다고 하자. 반개구간 E_k의 길이를 δ_k라고 하면, Lebesgue측도 m은 다음 식들을 만족해야 한다.

$$m(Q^c \cap I) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \qquad (3.4.2)$$

이 $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$의 값은 반개구간들 $E_1, E_2, \cdots$을 어떻게 선택하느냐에 따라 달라진다. 이 값들의 하한값이 $U_L(Q^c \cap I)$이다. 이 하한값을 사용해서 내측도를 정해야 한다. 어떻게 해야 할까?

D : 그건 그리 어려운 일이 아닐 것 같아요. 외측도 $U_L(E)$는 집합 E를 포함하는 집합의 측도값의 하한이므로, 이에 해당하는 내측도 $L_L(E)$는 집합 E에 포함되는 집합의 측도값의 상한이어야 해요. 따라서, 내측도 $L_L(E)$를 외측도 $U_L(E^c)$와 연결시키면 될 것 같아요.

F : 동연이의 직관력이 대단하구나. 동연이의 아이디어를 구체화시키기로 하자. 다음 식이 성립하는 것은 명백하다.

$$I = (Q \cap I) \cup (Q^c \cap I)$$

따라서, 다음 식이 성립해야만 한다.

$$m(I) \leq U_L(Q \cap I) + U_L(Q^c \cap I)$$

즉, 다음 식이 성립해야만 한다.

$$m(I) - U_L(Q^c \cap I) \leq U_L(Q \cap I)$$

집합 $Q\cap I$의 내측도 $L_L(Q\cap I)$를 다음과 같이 정의한다.

$$L_L(Q\cap I) = m(I) - U_L(Q^c\cap I)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$L_L(Q\cap I) \le U_L(Q\cap I) \tag{3.4.3}$$

만일 외측도 $U_L(Q\cap I)$와 내측도 $L_L(Q\cap I)$가 동일하면, 집합 $Q\cap I$는 Lebesgue가측이라 하고, 이 값 $U_L(Q\cap I) = L_L(Q\cap I)$를 집합 $Q\cap I$의 Lebesgue 측도 $m(Q\cap I)$라고 한다.

Y : 추측한 대로 이 내측도 $L_L(Q\cap I)$의 정의가 Jordan측도의 경우와 다르군요.

F : 그렇다. 그 차이가 Lebesgue측도와 Jordan측도의 차이가 되고, 또한 그 차이가 Lebesgue적분과 Riemann적분의 차이로 이어지는 거란다. 따라서, Lebesgue측도의 하한과 Jordan측도의 하한의 차이를 인식하는 것이 정말 중요하다. 동연아, 내측도 $L_L(Q\cap I)$를 계산할 수 있겠니?

D : 네. 집합 $Q^c\cap I$는 비가산집합이어요. 따라서, 앞에서 외측도를 구하는 방법을 적용할 수는 없어요. 그러나, 유리수들의 집합의 보집합인 $Q^c\cap I$를 덮는 임의의 반개구간들의 집합 $\{E_k\}$는 $I\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$를 만족해요. 즉, 다음 명제가 성립해요.

$$(Q^c\cap I)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k \;\Rightarrow\; I\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

따라서, 외측도 $U_L(Q^c\cap I)$는 외측도 $U_L(I) = m(I) = b-a$와 동일해요. 즉, 집합 $Q\cap I$의 내측도는 $L_L(Q\cap I) = 0$이어요.

Y : 아! $U_L(Q\cap I) = L_L(Q\cap I) = 0$이군요. 즉, 내측도와 외측도가 같군요. 따라서, 집합 $Q\cap I$의 Lebesgue측도는 $m(Q\cap I) = 0$이군요.

F : 지금까지는 집합 $Q\cap I$의 Lebesgue측도에 대해서 살펴보았다. 이를 확장해서, 유계인 집합 $S(\subset R)$의 Lebesgue측도를 살펴보기 위해서는 Heine-Borel정리를 알아야 한다. 동연이는 이 정리를 알고 있니?

D : 네! 고등미적분책에서 본 적이 있어요. Heine-Borel정리는 다음과 같아요.

정리 3.4.1 Heine-Borel정리

만일 Euclid공간 R에 속한 집합 A가 유계이면, 식 $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$를 만족하는 유한개의 구간들 $B_1, B_2, \cdots, B_n$이 존재한다.

F : 그렇다. Heine-Borel정리는 고등미적분, 해석학, 함수론 등에서 배울 것이다. 사실, 이 정리는 콤팩트(compact)라는 개념과 연관된 것으로 여러 가지 형태로 기술될 수 있으나, 지금 너희들에게는 <정리 3.4.1>로 충분하다. 이 정리에 대한 좀더 자세한 내용은 Wade (2000, pp. 263~264)를 참조해라. 다시 유계집합 S의 Lebesgue측도를 구하는 문제로 돌아가자. 영상이가 Heine-Borel정리를 사용해서 집합 S의 외측도를 정의해보거라. 아빠가 힌트를 주마. 제 3.7 절에서 다루겠지만, 임의의 구간은 가산개의 반개구간들의 합집합으로 나타낼 수 있다.

Y : 아빠가 준 힌트와 Heine-Borel정리에 의해서, 식 $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$를 만족하는 유한개 또는 가산개의 반개구간들 $B_1, B_2, \cdots$이 존재함을 알 수 있어요. 반개구간 B_k의 길이를 ε_k라고 하면, 새로운 측도 m은 다음 식들을 만족해야 해요.

$$m(S) \le m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \tag{3.4.4}$$

우변의 합 $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$의 하한값을 집합 S의 외측도 $U_L(S)$라 해요.

F : 아주 잘했다. 이제, 동연이가 집합 S의 내측도를 정의해보거라.

D : 집합 S가 유계이므로, 이 집합을 포함하는 폐구간 I가 존재해요. 집합 S의 집합 I에 대한 보집합 $S^c \cap I = I \setminus S$를 살펴보기로 해요. Heine-Borel정리에 의해서, $(S^c \cap I) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$를 만족하는 가산개의 반개구간들 $E_1, E_2, \cdots$가 존재해요. 반개구간 E_k의 길이를 δ_k라고 하면, Lebesgue측도 m은 다음 식들을 만족해야 해요.

$$m(S^c \cap I) \le m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \tag{3.4.5}$$

우변의 합 $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$의 하한값이 $U_L(S^c \cap I)$이어요. 따라서, 다음 식이 성립해요.

$$m(I) - U_L(S^c \cap I) \leq U_L(S)$$

이 부등식의 좌변 $m(I) - U_L(S^c \cap I)$를 집합 S의 내측도 $L_L(S)$라 부르죠.

F : 만일 $U_L(S) = L_L(S)$이면, 유계집합 S는 Lebesgue가측이라고 하고 이 집합의 Lebesgue측도를 $m(S)$로 표기한다.

Y : 이제 유계가 아닌 집합의 Lebesgue측도를 정할 필요가 있겠군요? 그러나, 지금까지 사용한 방법을 쓸 수는 없을 것 같아요. 왜냐하면, Heine-Borel정리는 유계인 집합에 대해서만 성립하니까요.

F : 영상이가 아주 논리적이구나. 따라서, 우선 유계집합의 Lebesgue측도의 성질들을 조사하고, 그 성질들을 이용해서 유계가 아닌 집합의 Lebesgue측도를 정의하기로 하자. 유계집합의 Lebesgue측도는 어떤 성질들을 가질까?

D : 우선, Lebesgue가측인 유계집합들 전체의 집합을 L로 표기하면, 다음 명제들이 성립해요.

(L1) $A_k \in L,\ (k = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in L$

(L2) $A_k \in L,\ (k = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in L$

이 명제들에 의해서, 다음 명제가 성립함은 자명해요.

(L3) $A_1 \in L,\ A_2 \in L,\ A_2 \subset A_1 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in L$

Y : 또한, Lebesgue측도는 다음과 같은 명제들을 만족해요.

(L4) $A \in L \Rightarrow m(A) \geq 0$

(L5) $A_1 \in L,\ A_2 \in L,\ A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$

(L6) 만일 $A_1, A_2, \cdots \in L$이고 $A_i \cap A_k = \phi,\ (i \neq k)$이면, 다음 식이 성립한다.

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = m(A_1) + m(A_2) + \cdots \tag{3.4.6}$$

F : Jordan측도의 성질들 (J1), (J2) 그리고 (J6)는 유한개의 Jordan가측집합들에 대해서 성립한다. 반면에, 이에 대응하는 Lebesgue측도의 성질들 (L1), (L2) 그리고 (L6)는 가산개의 Lebesgue가측집합들에 대해서 성립한다. 우리는 (J6)를 Jordan측도의 유한가법성(finite additivity)이라 부르고, (L6)를 Lebesgue측도의 가산가법성(countable additivity)이라 부른다.

Y : Lebesgue측도의 가산가법성이 Lebesgue측도의 가장 중요한 특징인가요?

F : 결과적으로는 그렇다고 할 수 있다. 우선, 가산가법성을 사용해서 Lebesgue가측집합을 비유계집합까지로 확장할 수 있다. 그러나, 아빠 생각으로는 Lebesgue측도의 내측도의 정의가 Jordan측도의 그것과는 다르다는 것이 가장 중요한 점이라고 생각한다. 정의가 달라졌기 때문에, Lebesgue측도에서 가산가법성이 성립하는 것이다.

D : 아직 Lebesgue측도의 가산가법성의 중요성을 잘 모르겠어요.

F : 제 Ⅰ 장에서도 언급했듯이, Lebesgue적분의 가치를 빛나게 하는 것은 Lebesgue수렴정리이다. Lebesgue측도의 가산가법성을 이용해야 Lebesgue수렴정리를 증명할 수 있다. 사실, Lebesgue수렴정리가 존재하기 때문에, 함수해석학을 구축할 수 있단다. 예를 들어, 어떤 Lebesgue수렴정리를 사용해서 Hilbert공간의 완비성(completeness)을 증명할 수 있단다. 그러니 Lebesgue측도의 가산가법성이 중요하다고 할 수밖에….

Y : 임의의 집합은 Lebesgue가측인가요?

Y : 아! 나의 실수! 만일 임의의 집합 S가 Lebesgue가측이면, Lebesgue가측성을 정의하는 대신에 $U_L(S) = L_L(S)$라는 성질이 정리로 알려졌겠지.

F : 영상아, 누구나 실수를 하는 것이다. 실수가 두려워서 자기 생각없이 남의 의견에만 따르는 사람은 바보다. 특히, 수학을 공부할 때는 실수를 두려워해서는 안 된다. 수학은 깊게 생각하는 사람만이 할 수 있는 것이다. 생각하는 시간이 길면 길수록 실수하는 횟수도 많은 것은 자연스러운 것이다. 여하튼 Lebesgue가측이 아닌 집합의 존재가 알려져 있다. 안타깝게도 아빠의 전공이 함수해석학이 아니어서, 그러한 집합들에 대해서 정확히 알고 있지 않다. 그러나, 실용적으로 함수해석학을 응용하는데, 현재로서는 Lebesgue측도로도 충분하다고 알려져 있다. 물론, 앞으로 너희들이 더 깊은 공부를 할 때는 Lebesgue가측이 아닌 집합이 중요한 문제가 되어, 새로운 측도를 만들어야만 할 수도 있겠지!

D : 명제들 (B2)와 (B3)에 의해서 다음 명제가 성립해요.

(B4) $A_1 \in \boldsymbol{A}$, $A_2 \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \boldsymbol{A}$

F : 그렇다. 만일 집합 Ω가 무한집합이라면, 무한개의 부분집합들이 존재할 것이다. 이 경우에도 (B1)~(B3)로 충분할까?

Y : 지금 아빠는 유한가법성과 가산가법성의 차이를 설명하기 위한 공리적(axiomatic) 접근을 하시는군요. 만일 집합 Ω가 무한집합이라면, (B1)~(B3) 대신에 다음 명제들이 성립해야 집합족 $\boldsymbol{A}$가 좋은 공동체가 될 것 같아요.

(S1) $\Omega \in \boldsymbol{A}$

(S2) $A \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A^c \in \boldsymbol{A}$

(S3) $A_k \in \boldsymbol{A}$, $(k = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \boldsymbol{A}$

F : 만일 집합족 $\boldsymbol{A}$가 (S2)와 (S3)를 만족하면, $\boldsymbol{A}$를 Ω 상의 $\sigma-$ 집합환($\sigma-$ ring of sets), $\sigma-$ 가법족($\sigma-$ additive class) 또는 가산가법족(complete additive class)이라 부른다. 만일 $\sigma-$ 집합환 $\boldsymbol{A}$가 (S1)을 만족하면, $\sigma-$ 집합체($\sigma-$ field of sets), $\sigma-$ 체($\sigma-$ field), $\sigma-$ 집합대수($\sigma-$ algebra of sets) 또는 $\sigma-$ 대수($\sigma-$ algebra)라 부른다. 대수인 경우와 마찬가지로, 명제들 (S2)와 (S3)에 의해서 다음 명제가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

(S4) $A_k \in \boldsymbol{A}$, $(k = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \boldsymbol{A}$

Y : 아! $\sigma-$ 대수는 대수이다. 사랑하는 누이는 그것을 증명할 수 있수?

D : 그래! 만일 이 방에서 그것을 증명 못하는 사람이 있다면, 그건 바로 너야. 이 누님이 증명하는 것을 잘 보아라. 우선, $\Omega \in \boldsymbol{A}$이므로, 성질 (S2)에 의해서 $\phi \in \boldsymbol{A}$이다. 따라서, 만일 $A_k = \phi$, $(k = 3, 4, \cdots)$라 놓으면, 성질 (S3)는 성질 (B3)가 된다. 즉, $\sigma-$ 대수는 대수이다.

F : 그래 잘 증명하였다. 이제 Jordan측도는 대수에서 정의할 수 있고, Lebesgue측도는

3.5 대수와 σ-대수

(본저자의 의견) 제 3.5 절에서 제 3.9 절까지의 내용은 지금까지의 내용보다 약간 어렵고, Lebesgue적분을 이해하는데 꼭 필요한 내용도 아니다. 따라서, 본서를 처음 읽는 독자나 급히 Lebesgue적분을 알고 싶은 독자는 이 절들을 뛰어넘어도 큰 문제는 없을 것이다. 그러나, 본서를 두 번째로 읽거나, 좀더 체계적으로 Lebesgue적분을 공부하고 싶은 독자들은 이 절들을 정독할 것을 권한다.

D : 아빠, Lebesgue측도의 가장 중요한 성질 중의 하나가 가산가법성이라고 하셨지요? 이것은 확률을 정의할 때 이용되는 σ-대수(σ-algebra)와 관계가 있나요?

F : 그렇다. Lebesgue적분을 배우는데, 꼭 σ-대수를 정의해야 할 필요는 없다. 그러나, 우리는 이미 묵시적으로 σ-대수를 사용하였다. 어떤 집합 Ω에 대해서 살펴보자. 이 집합 Ω의 부분집합들의 모임을 집합족 $\boldsymbol{A}$라고 하자. 영상아, 집합족 $\boldsymbol{A}$가 합집합과 여집합이라는 연산들로 다스려지는 어떤 공동체를 이루기 위한 조건들을 말해보아라.

Y : 우선 엉에 해당하는 $\varnothing$가 집합족 $\boldsymbol{A}$에 속해야겠지요. 또한, 집합족 $\boldsymbol{A}$가 여집합에 대해서 닫혀 있어야 하므로 집합 $\Omega = \varnothing^c$가 집합족 $\boldsymbol{A}$에 속해야겠지요. 따라서, 다음 명제들이 성립해야 집합족 $\boldsymbol{A}$가 합집합과 여집합이라는 연산들에 의해 지배되는 어떤 공동체를 이룰 것 같아요.

$A \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A^c \in \boldsymbol{A}$

$\Rightarrow A \cup A^c \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \Omega \in \boldsymbol{A}$

$\Rightarrow \phi = \Omega^c \in \boldsymbol{A}$

(B1) $\Omega \in \boldsymbol{A}$

(B2) $A \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A^c \in \boldsymbol{A}$

(B3) $A_1 \in \boldsymbol{A},\ A_2 \in \boldsymbol{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \boldsymbol{A}$

F : 만일 집합족 $\boldsymbol{A}$가 (B2)와 (B3)를 만족하면, $\boldsymbol{A}$를 Ω 상의 집합환(ring of sets) 또는 유한가법족(finite additive class)이라 부른다. 만일 집합환 $\boldsymbol{A}$가 (B1)을 만족하면, $\boldsymbol{A}$를 집합체(field of sets), Boole집합대수(Boolean algebra of sets), Boole대수, 집합대수(algebra of sets) 또는 대수(algebra)라 부른다. 대수 $\boldsymbol{A}$가 만족시켜야 할 다른 성질은 없을까?

$\sigma-$대수에서 정의할 수 있다는 것을 알았지? 따라서, Lebesgue측도의 성질들은 $\sigma-$대수로부터 유도되는 것이다. 누가 $\sigma-$대수를 사용해서 가산가법성을 설명할 수 있겠니?

Y : 당연히 제가 해야죠. 어떤 실수집합 $\Omega(\subset R)$의 $\sigma-$대수 $\boldsymbol{A}$에서 $[0,\infty)$로 가는 집합함수 μ가 존재한다고 해요. 즉, 각 $A\in\boldsymbol{A}$에 대한 함수값 $\mu(A)(\geq 0)$가 존재한다고 해요. 이 집합함수 μ가 다음과 같은 명제를 만족한다고 가정해요.

$$A_k\cap A_j=\phi,\ (k\neq j)\ \Rightarrow\ \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) \tag{3.5.1}$$

이 경우에, 측도공간 $(\Omega,\ \boldsymbol{A},\ \mu)$는 가산가법성을 갖는다고 합니다.

F : 제법이구나. 가산가법성의 정의에 의해서, Lebesgue측도공간 $(\Omega,\ \boldsymbol{A},\ m)$은 가산가법성을 갖음을 알 수 있다.

3.6 Banach공간과 Hilbert공간

F : 길이라는 개념을 수학적으로 확장한 것을 노름(norm)이라 한다. 원래, 노름이란 벡터공간에서 정의되는 것이다.

Y : 벡터공간이 무엇이어요.

F : 영상이는 아직 벡터공간을 잘 알지 못하므로, 그냥 p차원벡터들의 모임인 Euclid공간 R^p를 벡터공간으로 생각해라.

정의 3.6.1 벡터공간 V에서 정의되는 실수값함수 $\|\cdot\|$가 다음 명제들을 만족하면, 이 함수를 벡터공간 V에서의 노름이라고 한다.

(a) $\boldsymbol{x}\in V\ \Rightarrow\ \|\boldsymbol{x}\|\geq 0$

(b) $\|\boldsymbol{x}\|=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(c) $\boldsymbol{x}\in V$ and $\alpha\in R\ \Rightarrow\ \|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$

(d) $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V\ \Rightarrow\ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ □

F : 벡터공간에 노름을 도입한 것을 노름공간(normal space)이라고 한다. 실수집합 R에서 대표적인 노름은 절대값이다. 즉, $x \in R$의 노름은 $|x|$이다. 동연이가 벡터공간 R^p에서 생각해 볼 수 있는 노름들을 말해보겠니?

D : 각 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)' \in R^p$에 대해서 다음과 같은 노름들을 생각할 수 있어요.

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{p} |x_k|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_q = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^q \right)^{1/q}, \quad (q \geq 1)$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_p|)$$

F : 잘 대답했다. 그렇다면, 두 벡터들 $\boldsymbol{x} \in V$와 $\boldsymbol{y} \in V$ 사이의 거리(metric)를 어떻게 정의해야 할까? 또한, 그 거리는 어떠한 성질들을 만족해야 할까?

Y : 두 벡터들 $\boldsymbol{x} \in V$와 $\boldsymbol{y} \in V$ 사이의 거리를 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$라고 정의하는 것이 자연스러워요. 이 거리는 다음 명제들을 만족해요.

(a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$

(b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

(c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(d) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

F : 잘 설명했다. 성질 (d)를 삼각형의 법칙이라고 부른다. 거리 $d(\cdot, \cdot)$를 사용해서, 다음과 같이 근방(neighborhood) $N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$를 정의한다.

$$N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \varepsilon\}$$

근방 $N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$를 중심이 $\boldsymbol{x}_0$인 ε-근방이라고 부르기도 한다. 지금부터는 어떤 집합 A의 내점, 외점 그리고 경계점을 정의하려고 한다. 동연이가 $N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$를 사용해서 이 점들을 어떻게 정의할지 말해보아라.

D : 만일 원소 x에 대해서 $N_\varepsilon(x) \subset A$를 만족하는 $\varepsilon(>0)$이 존재하면, 원소 x를 집합 A의 내점(interior point)이라 하겠지요. 반대로, 만일 원소 x에 대해서 $N_\varepsilon(x) \subset A^c$를 만족하는 $\varepsilon(>0)$이 존재하면, 원소 x를 집합 A의 외점(exterior point)이라 하겠지요. 만일 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 $N_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$이면, 원소 x를 집합 A의 경계점(boundary point)이라 하겠지요.

F : 잘 정의하였다. 따라서, 원소 x가 집합 A의 외점이기 위한 필요충분조건은 원소 x가 집합 A^c의 내점인 것이다. 또한, 내점도 외점도 아닌 원소를 경계점이라 한다. 너희들은 고등학교 때 이미 극한을 배웠다. 이제 $N_\varepsilon(x)$를 사용해서 극한점을 정의할 수 있겠니?

Y : 소자가 해보지요. 만일 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 집합 $N_\varepsilon(x) \cap A$가 무한개의 원소들을 포함하면, 원소 x를 집합 A의 집적점(accumulation point or cluster point) 또는 극한점(limiting point)이라 부릅니다. 만일 원소 $x \in A$에 대해서 $N_\varepsilon(x) \cap A^c = \{x\}$를 만족하는 $\varepsilon(>0)$이 존재할 때, 원소 x를 집합 A의 고립점(isolated point)이라고 부릅니다.

F : 잘 정의하였다. 이러한 정의들은 해석학의 기초가 되는 것이다. 집합 $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\right\}$의 집적점과 고립점을 찾아보거라.

D : 집합 A의 집적점은 0이지만, $0 \notin A$이어요. 또한, 집합 A의 각 원소는 고립점이어요.

F : 지금부터는 실수집합 R에서의 개구간과 폐구간을 임의의 노름공간으로 확장해보자. 집합 A의 모든 집적점들의 집합을 A'로 표기하자. 집합 A'를 사용해서 폐집합과 개집합을 정의해보거라.

Y : 만일 $A' \subset A$이면, 집합 A를 '닫혀 있다' 또는 폐집합(closed set)이라고 하지요. 또한, 집합 $\overline{A} = A \cup A'$를 집합 A의 폐포(closure)라고 합니다. 만일 집합 A의 각 원소가 집합 A의 내점이면, 집합 A를 '열려 있다' 또는 개집합(open set)이라 합니다.

F : 집합 A가 개집합이기 위한 필요충분조건은 집합 A^c가 폐집합인 것이다. 동연이가 이를 증명해보아라.

D : 집합 A^c가 폐집합이라고 가정해요. 만일 $x \in A$이면, x는 집합 A^c의 집적점이 아니

어요. 따라서, $N_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap A^c = \emptyset$ 을 만족하는 $\varepsilon(>0)$이 존재해요. 즉, $N_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset A$이지요. 따라서, $\boldsymbol{x}$는 내점이어요. 즉, 집합 A는 개집합이지요. 같은 방법으로, 역을 증명할 수 있어요.

F : 잘 증명했다. 집합 E가 집합 X의 조밀집합(dense set)이라는 것은 집합 X의 각 원소 $\boldsymbol{x}$가 집합 E의 원소이거나 집합 E의 집적점인 것이다. 즉, 만일 $\overline{E} = X$이면, 집합 E가 집합 X의 조밀집합이다. 실수집합 R의 조밀집합의 예를 들어 보아라.

Y : 유리수집합 Q는 실수집합 R의 조밀집합이지요. 물론, 모든 무리수들의 집합도 실수집합 R의 조밀집합이지요.

F : 이제 점집합들과 노름을 사용해서 극한문제를 다루어보자. Euclid공간에서 수열의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 3.6.2 노름공간 V에서 정의되는 점열 $\{\boldsymbol{x}_n\}$이 원소 $\boldsymbol{x} \in V$에 수렴한다는 것은 각 $\varepsilon(>0)$에 대해서, 다음 명제를 만족하는 자연수 $N(\varepsilon)$이 존재하는 것이다.

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon$$

이 경우에 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$로 표기하고, $\boldsymbol{x}$를 극한점(limit point) 또는 극한(limit)이라 부른다. □

Y : 아빠, 수렴을 공부하다보면 완비(complete)라는 단어가 나오는데, 무슨 뜻이어요?

F : 완비라는 개념은 함수해석학에서 중요한 것이다. 완비를 설명하기 위해서는 우선 Cauchy열을 정의해야 한다.

정의 3.6.3 노름공간 V에서 정의되는 점열 $\{\boldsymbol{x}_n\}$이 Cauchy열이라는 것은 각 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 명제를 만족하는 자연수 $N(\varepsilon)$이 존재하는 것이다.

$$m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \leq \varepsilon$$ □

D : 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\|$$

따라서, 노름공간 V에서 수렴하는 수열은 Cauchy열이지요. 그런데, Cauchy열은 수렴하나요?

F : 만일 그렇다면, 구태여 Cauchy열을 정의할 필요가 없겠지. 즉, 수렴하는 수열과 Cauchy열은 다른 것이다. 그 차이를 나타내는 것이 완비성(completeness)이다. 다음과 같이 완비를 정의한다.

정의 3.6.4 노름공간 V가 완비라는 것은 각 Cauchy열이 수렴하는 것이다. 즉, 만일 각 Cauchy열 $\{x_n\}$에 대해서 식 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$을 만족하는 $x \in V$가 존재하면, 노름공간 V가 완비라고 한다. □

D : 그렇다면, 완비가 아닌 노름공간이 존재하겠군요.

Y : 당근이지! 유리수집합 Q를 노름공간으로 생각하고, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$가 되도록 수열 $\{x_n\}$을 다음과 같이 정의해요.

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.41,\ x_4 = 1.414,\ \cdots$$

수열 $\{x_n\}$이 Cauchy열인 것은 자명해요. 그러나, $\sqrt{2} \notin Q$이어요. 따라서, 유리수집합 Q는 완비가 아니어요.

D : 아! 자랑스런 나의 아우님!

Y : 노름공간이 완비라는 것은 특별한 의미가 있나요?

F : 노름공간은 벡터공간에 거리 개념을 도입한 것이다. 이 노름공간을 다루는 함수해석학에서 다음과 같이 정의되는 Banach공간은 중요한 역할을 한다.

정의 3.6.5 만일 노름공간 V가 완비이면, V를 Banach공간이라 부른다. □

D : 완비인 노름공간을 Banach공간이라고 부르는군요. 그러나, Banach공간에는 거리만 존재하지 두 점들(벡터들) 사이의 각은 정의되지 않지요.

F : 그렇다. 두 벡터들 $x \in V$와 $y \in V$가 이루는 각을 어떻게 정의해야 할까? 또한, 그 각은 어떠한 성질들을 만족해야 할까?

Y : 두 벡터들 $x \in V$와 $y \in V$ 사이의 각을 θ라고 할 때, $\cos\theta$는 벡터의 내적 $\langle x, y \rangle$와 밀접한 관계가 있어요. 고등학교 수학시간에 다음 식을 정의했어요.

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\| x \|}\sqrt{\| y \|}}$$

내적은 각을 나타내는 척도이니, 내적은 다음 명제들을 만족해야 할거에요.

(a) $x, y, z \in V \Rightarrow \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(b) $\alpha \in R$ and $x \in V \Rightarrow \langle \alpha x, y \rangle = |\alpha| \langle x, y \rangle$

(c) $x, y \in V \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$. 여기서 등호는 $x = 0$에서만 성립한다.

F : 명제들 (a)~(d)를 만족하는 함수 $\langle \cdot, \cdot \rangle$를 내적이라 하고, 벡터공간에 내적연산자를 추가한 것을 내적공간이라 부른다. 이제 우리는 Hilbert공간을 정의할 수 있게 되었다.

정의 3.6.6 만일 내적공간 V가 완비이면, Hilbert공간이라 부른다. □

D : 이 절에서 배운 개념들과 정리들이 Lebesgue적분을 공부하는데 도움이 되겠지요.

F : 물론이다. 이 개념들과 정리들은 Lebesgue적분을 다루는 실해석학뿐 아니라 함수해석학의 기초가 되는 것들이다.

3.7 Borel집합

F : 제 3.4 절에서 Lebesgue가측이 아닌 집합이 존재한다고 말했고, 또한, 실용적으로 함수해석학을 응용하는데는 Lebesgue측도로도 충분하다고 말했다. 그렇다면, Lebesgue가측집합을 개집합들이나 폐집합들로 나타낼 수 있을까? 이 절에서는 σ-대수를 이루는 가측집합들의 집합족에 대해서 살펴보자. 동연아, 폐집합들의 교집합이나 합집합은 폐집합일까?

D : 폐집합들의 교집합은 폐집합이고, 유한개의 폐집합들의 합집합도 폐집합이라는 것을 쉽게 알 수 있어요. 그러나, 가산개의 폐집합들의 합집합은 폐집합이 아닐 수도 있어요. 예를 들어, 각 유리수 q 하나로 이루어진 집합 $\{q\}$는 폐집합이지요. 그러나, 유리수 전체의 집합 Q는 가산개의 폐집합들의 합집합이지만 폐집합은 아니어요. 한 예로, 무리수 $\sqrt{2}$는 유리수집합 Q의 집적점이지만 $\sqrt{2}$는 Q에 속하지 않아요.

F : 그렇다. 실수 전체의 집합 R에서 Lebesgue측도의 정의는 폐구간 $[a, b]$의 측도를 $m([a, b]) = b - a$로 정의하는데서 시작되었다. 따라서, Lebesgue측도를 온전하게 정의하기 위해서는 모든 폐집합들을 포함하는 σ-대수를 알아야 한다. 따라서, 개집합들이나 폐집합들보다 더 일반적 형태의 집합들을 살펴보아야 한다. 우선, 모든 개집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수가 존재할까?

D : 그럴 것 같아요. 주어진 집합족 C에 대해서 다음과 같은 집합족 A를 정의하기로 해요.

$$A = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \,\middle|\, C_i = \emptyset \text{ or } C_i \in C \text{ or } C_i^c \in C \right\}$$

집합족 A가 σ-대수임을 쉽게 알 수 있어요. 또한, 집합족 C를 포함하는 다른 σ-대수 D가 존재하면, D는 A를 포함해요. 따라서, 주어진 집합족 C에 대해서, 집합족 C를 포함하는 가장 작은 σ-대수 A가 일의적으로 존재해요. 즉, 모든 개집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수 B가 유일하게 존재해요.

F : 그렇다. 집합족 C를 포함하는 가장 작은 σ-대수 A를 집합족 C에 의해서 생성된 σ-대수라고 부른다. 또한, 모든 개집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수 B를 Borel 집합족이라 부르고 이 집합족에 속하는 각 집합을 Borel집합이라 한다. 그렇다면, 모든 폐집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수는 무엇일까?

Y : 그것도 Borel집합족이겠죠. 왜냐하면, 개집합의 여집합은 폐집합이고, 폐집합의 여집합은 개집합이기 때문이어요.

F : That's my boy! 누가 그 성질을 증명해보겠니?

D : 그 성질은 일반적인 노름공간 V에서 성립하므로, 저는 노름공간 V에서 그 성질이 성립함을 증명해 보이겠어요. 노름공간 V의 부분집합인 G를 개집합이라고 하고, x를 G의 원소라고 가정해요. 개집합의 정의에 의해서, 다음 명제를 만족하는 양수 r이 존재하지요.

$$\|x-y\| < r \Rightarrow y \in G$$

즉, $\|x-y\| < r$이고 $y \in G^c$인 y는 존재하지 않아요. 따라서, x는 G^c의 집적점이 아니어요. 이는 G^c가 자신의 모든 집적점들을 포함한다는 것을 의미해요. 따라서, G^c는 폐집합이어요. 만일 F가 폐집합이고 $x \in F^c$이면, x는 F의 집적점이 아니어요. 따라서, $\{y \in F \mid \|x-y\| < r\} = \emptyset$인 양수 r이 존재해요. 즉, 만일 $\|x-y\| < r$이면, $y \in F^c$이어요. 따라서, F^c는 개집합이어요.

F : That's my daughter! 아, 아부하며 살기 힘들다(아주 작은 소리로…). 폐집합의 여집합은 개집합이므로, σ-대수의 정의에 의해서 Borel집합족 $\boldsymbol{B}$는 모든 폐집합들을 포함한다. 따라서, Borel집합족은 모든 폐집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수이기도 하다. 그렇다면, 구체적으로 Borel집합족들을 어떻게 생성할 수 있을까?

Y : 아주 쉬운 질문이죠. Borel집합족 $\boldsymbol{B}$는 다음의 각 집합족에 의해서 생성되는 σ-대수이어요.

(a) $\{(a, b) \mid a \in R,\ b \in R\}$

(b) $\{[a, b) \mid a \in R,\ b \in R\}$

(c) $\{(a, b] \mid a \in R,\ b \in R\}$

(d) $\{[a, b] \mid a \in R,\ b \in R\}$

F : 잘 대답했다. 가산개의 폐집합들의 합집합을 F_σ라고 표기한다. 여기서 F는 닫힘을 뜻하고, σ는 합집합을 뜻한다. 따라서, 각 가산집합은 F_σ집합이고, 또한 각 폐집합도 F_σ집합이다. 물론, 가산개의 F_σ집합들의 합집합도 F_σ집합이다. 지금까지는 폐집합에 대해서 설명했다. 개구간을 가산개의 폐구간들로 나타낼 수 있겠니?

D : 쉬워요. 다음 식이 성립해요.

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n}\right]$$

F : 그렇다. 따라서, 각 개구간은 F_σ집합이고, 또한 각 개집합도 F_σ집합이다. 이로부터, Borel집합족 $\boldsymbol{B}$가 모든 F_σ집합들을 포함하는 가장 작은 σ-대수임을 알 수 있다. 가산개의 개집합들의 교집합을 G_δ라고 표기하자. 여기서 G는 열림을 뜻하고, δ는 교

집합을 뜻한다. Borel집합족 $\boldsymbol{B}$는 모든 G_δ집합들을 포함하는 가장 작은 $\sigma-$ 대수일까?

Y : 그럴 것 같아요. 각 F_σ 집합의 여집합은 G_δ 집합이어요. 따라서, $\sigma-$ 대수의 정의 (S2)에 의해서, Borel집합족 $\boldsymbol{B}$는 모든 G_δ집합들을 포함하는 가장 작은 $\sigma-$ 대수이어요.

F : 그렇다. 이 F_σ집합과 G_δ집합은 비교적 간단한 형태의 Borel집합들이다. 가산개의 F_σ 집합들의 교집합을 $F_{\sigma\delta}$로 표기한다. 같은 방법으로, 집합열 F_σ, $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, …와 집합열 G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, …을 정의할 수 있다. 이 집합열들에 속하는 각 집합은 Borel집합이다. 그러나, 임의의 Borel집합이 이 두 집합열들 중의 하나에 속하는 것은 아니다. 동연이 생각에는 Borel집합은 Lebesgue가측일까?

D : 모든 폐집합들을 포함하는 가장 작은 $\sigma-$ 대수가 Borel집합족이어요. 실수집합 R에서 Lebesgue측도의 정의는 폐구간 $[a, b]$의 측도를 $m([a, b]) = b - a$로 정의하였으므로, Lebesgue측도의 가산가법성에 의해서 각 Borel집합의 Lebesgue측도를 계산할 수 있어요. 따라서, Borel집합은 Lebesgue가측이어요.

Y : 그러나, Lebesgue가측집합이 반드시 Borel집합이라고 할 수는 없지요?

F : 그렇다. 그러나, Lebesgue가측집합과 아주 가까운 Borel집합들이 존재한다. 즉, Lebesgue가측집합 A에 대해서, 다음 식들을 만족하는 Borel집합 B가 존재한다.

$$A \subset B \quad \text{and} \quad m(A) = m(B) \tag{3.7.1}$$

또한, Lebesgue가측집합 A에 대해서, 다음 식들을 만족하는 Borel집합 C가 존재한다.

$$A \supset C \quad \text{and} \quad m(A) = m(C) \tag{3.7.2}$$

D : 아! 만일 각 Borel집합의 Lebesgue측도를 구할 수 있으면, 각 가측집합의 Lebesgue측도값을 구할 수 있겠군요.

F : 그렇다. 식 (3.7.1)을 만족하는 Borel집합 B와 식 (3.7.2)를 만족하는 Borel집합 C가 존재함을 보이기 위해서, 우선 Lebesgue가측집합 A와 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 식들을 만족하는 개집합 G가 존재함을 증명해보아라.

$$A \subset G, \quad m(G \setminus A) < \varepsilon \tag{3.7.3}$$

Y : 제가 증명을 시도해 보겠습니다. 집합 A가 Lebesgue가측이므로, 각 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 식들을 만족하는 개구간들 $I_k=(a_k, b_k)$, $(k=1, 2, \cdots)$이 존재해요.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad m(A)+\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

다음과 같은 집합들을 정의하기로 해요.

$$J_k=\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, b_k\right), \quad G=\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

집합 G는 개집합이고, $A \subset G$이지요. 또한, 다음 식들이 성립해요.

$$I_k \subset J_k, \quad m(J_k)=m(I_k)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$m(G)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(J_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{m(I_k)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right\} \le m(A)+\varepsilon$$

지금까지의 내용을 정리하면, $A \subset G$ 이고 $m(G-A)<\varepsilon$인 개집합 G가 존재해요.

F : 아주 잘 증명했다. 같은 방법으로, Lebesgue가측집합 A와 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 식들을 만족하는 폐집합 F가 존재함도 증명할 수 있겠지?

$$A \supset F, \quad m(A \setminus F)<\varepsilon \tag{3.7.4}$$

D : 제가 약간 다른 방법으로 증명해볼게요. 집합 A를 포함하는 충분히 큰 폐구간을 I라고 하기로 해요. 집합 $I \cap A^c$도 가측이므로, 식 (3.7.3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들을 만족하는 개집합 G가 존재해요.

$$I \cap A^c \subset G \subset I, \quad m(G \setminus (I \cap A^c))<\varepsilon$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$m(A \setminus (I \cap G^c)) = m(A \cap G) = m(G \setminus (I \cap A^c)) < \varepsilon$$

결론적으로, 집합 $F = I \cap G^c$는 폐집합이고, $A \supset F$ 이며, $m(A - F) < \varepsilon$이어요.

Y : 식 (3.7.3)과 식 (3.7.4)에 의해서, Lebesgue가측집합 A와 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 식들을 만족하는 폐집합 F와 개집합 G가 존재함을 알 수 있군요.

$$F \subset A \subset G, \quad m(G \setminus A) < \varepsilon, \quad m(A \setminus F) < \varepsilon \tag{3.7.5}$$

또한, 이 결과를 발전시켜서, Lebesgue가측집합과 Borel집합을 연결시킬 수 있군요.

F : 그렇다. 다음 식들을 만족하는 Borel집합들 F와 G가 존재한다.

$$F \subset A \subset G, \quad m(G \setminus A) = 0, \quad m(A \setminus F) = 0 \tag{3.7.6}$$

동연이가 이 성질을 증명해보겠니?

D : 다음 식들을 만족하는 개집합들 $G_1, G_2, \cdots$가 존재해요.

$$A \subset G_n, \quad m(G_n \setminus A) \leq \frac{1}{n}$$

집합 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$은 G_δ집합이고, $G \subset G_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족해요. 따라서, $A \subset G$이며, 다음 식들이 성립함을 알 수 있어요.

$$m(G) \leq m(G_n) < m(A) + \frac{1}{n}$$

이 부등식들에서 $n \to \infty$라 놓으면, $m(G) = m(A)$이 성립해요. 즉, 가측집합 A에 대해서, $A \subset G$이고 $m(G \setminus A) = 0$인 Borel집합 G가 존재해요. 같은 방법으로, 가측집합 A에 대해서 $F \subset A$이고 $m(A \setminus F) = 0$인 Borel집합 F가 존재함을 증명할 수 있어요.

F : 결론적으로 말하면, Borel집합은 Lebesgue가측이다. 또한, Lebesgue가측집합과 같은 측도값을 갖는 Borel집합이 존재한다.

3.8 영집합

F : Riemann적분은 Jordan측도를 이용하여 정의하고, Lebesgue적분은 Lebesgue측도를 바탕으로 정의하는 것이다. 앞에서도 언급했듯이, 대부분의 집합은 Lebesgue가측이다. 따라서, Riemann적분이 가능하지 않은 함수들 중에는 Lebesgue적분이 가능한 것들이 많다. 제 3.2 절에서 배운 Dirichlet함수가 대표적인 예이다. Lebesgue적분을 정의하기 전에 영집합(zero set)을 정의하는 것이 자연스러울 것 같다.

Y : 영집합이 공집합(empty set)을 의미하는 것은 아니겠지요?

F : 그렇다. Lebesgue측도가 0이 되는 집합을 영집합이라고 정의한다. 영집합의 예를 들어 보아라.

D : 가산집합의 Lebesgue측도는 0이어요. 따라서, 임의의 가산집합은 영집합이어요.

F : 그 역이 성립할까? 즉, 임의의 영집합은 가산집합일까?

Y : 그 역은 성립하지 않을 것 같아요. 만일 그 역이 성립한다면, 영집합을 정의할 필요가 없지요.

F : 그렇다. 비가산집합이면서 영집합인 예를 Cantor (1845~1918)가 제시하였다. Cantor 집합에 대해서는 제 3.9 절에서 자세히 다루게 될 것이다. Cantor집합 P의 특성을 요약하면, 다음과 같다.

정리 3.8.1 Cantor집합 P의 특성

(a) 집합 P는 가산집합이 아니다.

(b) $m(P) = 0$

(c) $P = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i / 3^i \mid \varepsilon_i = 0 \text{ 또는 } 2 \right\}$

(d) 집합 P는 폐집합이다. 즉, 집합 P의 각 점은 집합 P의 극한점이다.

D : 그렇군요! Cantor집합은 가산집합이 아니면서 측도가 0이군요.

F : 이제 다시 영집합의 문제로 돌아가자. 만일 영집합을 잘 이해하고 있으면, Lebesgue적

분에 관한 내용을 직감적으로 이해할 수 있을 것이다. Riemann적분이 불가능했던 Dirichlet함수 $f(t)$를 살펴보자. 이 함수는 $t \in Q \cap [0,1]$에 대해서 $f(t) = 1$이고, $t \in Q^c \cap [0,1]$에 대해서 $f(t) = 0$이다. 따라서, 구간 $[0,1]$에서 이 함수의 적분값은 집합 $Q \cap [0,1]$에서의 적분값과 같아야 한다. 그렇다면, 집합 $Q \cap [0,1]$에서의 Lebesgue적분값은 얼마이어야 할까?

D : 집합 $Q \cap [0,1]$의 Lebesgue측도가 0이므로, 이 집합은 영집합이지요. 따라서, Dirichlet함수의 Lebesgue적분값은 0일 것 같아요.

F : 아주 잘 추측했다. 뒤에서 알게 되겠지만, 영집합 위에서의 Lebesgue적분값은 0이다.

Y : 정의역의 측도가 영이므로, 그 위에서 정의되는 함수값을 무시할 수 있군요.

F : 그렇다. Lebesgue적분에서는 영집합 위에서의 함수값을 무시할 수 있다. 즉, 영집합 위의 함수값은 Lebesgue적분에 전혀 기여하지 못한다.

D : 함수들 $f(\cdot)$와 $g(\cdot)$가 집합 A에서 정의되고, 집합 N이 영집합이고, 또한 각 $t \in A \cap N^c$에서 $f(t) = g(t)$이면, 함수들 $f(t)$와 $g(t)$의 집합 A에서의 Lebesgue적분값들은 동일하군요.

F : 동연이가 이제 Lebesgue적분에 관한 감을 잡았구나. 영집합을 제외한 나머지 정의역에서 $f(t) \equiv g(t)$이면, 다음과 같이 표기한다.

$$f(t) = g(t) \ \ a.e.$$

여기서 $a.e.$는 'almost everywhere'의 약자로서 '거의 모든 점에서'라 읽는다. 어떤 책에서는 $a.s.$라고 쓰는데, 이는 'almost surely'의 약자이다. 영상이가 이러한 표기법을 Dirichlet함수에 적용해보아라.

Y : Dirichlet함수는 구간 $[0,1]$의 거의 모든 점에서 0이어요. 즉, 구간 $[0,1]$에서 Dirichlet함수와 함수 $f(t) \equiv 0$의 Lebesgue적분값들은 동일해요. 따라서, 구간 $[0,1]$에서 Dirichlet함수의 Lebesgue적분값은 0이어요.

F : 다시 한 번 강조하지만, 영집합이라는 개념은 Lebesgue적분에서 아주 중요한 것이다. 식 (3.7.2)에서 알 수 있듯이, Lebesgue가측집합 A는 Borel집합 C와 영집합 $A \cap C^c$로 나눌 수 있다. 따라서, 아직 Lebesgue적분을 정의하지는 않았지만, Lebesgue적분에서는 다음 식이 성립해야 한다는 것을 알 수 있다.

$$\int_A f(t)dt = \int_C f(t)dt$$

Y : 결국, Lebesgue적분가능한 함수의 정의역을 Borel집합으로 제한해도 되는군요.

3.9 Cantor집합

F : 비가산집합이면서 영집합인 예를 Cantor가 다음과 같이 제시하였다. 우선 폐구간 $E_0 = [0,1]$을 정의하자. 이 폐구간을 3등분하여 가운데 소구간을 제외한 나머지를 E_1으로 표기하자. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

또한, 집합 E_1의 각 소구간을 3등분하여 가운데 소구간을 제외한 나머지 소구간들의 합집합을 E_2로 표기하자. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

같은 과정를 되풀이 해서, 집합열 $\{E_n\}$을 만들면, 집합 E_n은 서로 겹치지 않고 길이가 3^{-n}인 소구간들 2^n개의 합집합이다. 또한, 다음 식이 성립한다.

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

이 집합들의 교집합을 P라 하자. 이 $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$를 Cantor집합 또는 Cantor삼진집합(Cantor ternary set)이라 부른다.

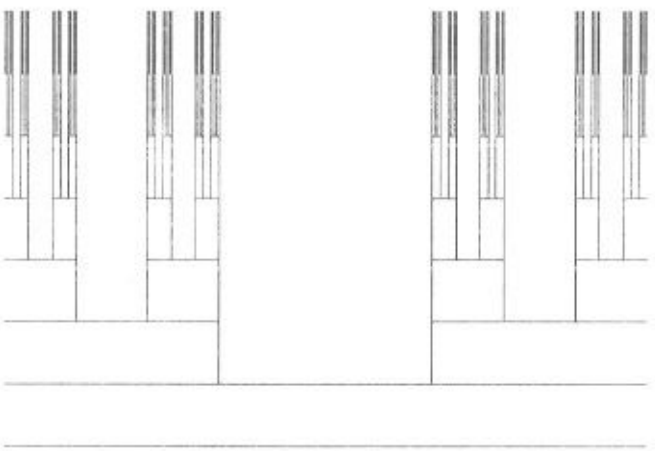
D : 제가 다시 정리해볼게요. 폐구간 $[0,1]$을 삼등분한 다음, 이 폐구간에서 길이가 1/3인 개구간 $J_{1,1} = (1/3, 2/3)$를 제거하면, 2개의 폐구간들 $I_{1,1} = [0, 1/3]$과 $I_{1,2} = [2/3, 1]$을 얻어요. 집합 $E_1 = \bigcup_{k=1}^{2^1} I_{1,k}$를 정의해요. 다음 단계로 $J_{2,2} = J_{1,1}$이라 해요. 또한 폐구간 $I_{1,1}$에서 길이가 $1/3^2$인 개구간 $J_{2,1} = (1/3^2, 2/3^2)$를 제거하면, 2개의

폐구간들 $I_{2,1}=[0, 1/3^2]$과 $I_{2,2}=[2/3^2, 3/3^2]$을 얻어요. 마찬가지로, 폐구간 $I_{1,2}$에서 길이가 $1/3^2$인 개구간 $J_{2,3}=(7/3^2, 8/3^2)$을 제거하면, 2개의 폐구간들 $I_{2,3}=[6/3^2, 7/3^2]$과 $I_{2,4}=[8/3^2, 9/3^2]$를 얻어요. 집합 $E_2=\bigcup_{k=1}^{2^2} I_{2,k}$를 정의해요. 이러한 과정을 반복하면, n번째에는 2^n-1개의 개구간들 $J_{n,1}, J_{n,2}, \cdots, J_{n,2^n-1}$을 제거하여, 길이가 $1/3^n$인 2^n개의 폐구간들 $I_{n,1}, I_{n,2}, \cdots, I_{n,2^n}$을 얻어요. 집합 $E_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$를 정의하면, 집합 $P=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$이 Cantor집합입니다.

Y : 아빠, Cantor집합을 그리기 위해서 다음과 같은 MATLAB프로그램을 짜보았어요. 이 프로그램을 수행한 결과가 <그림 3.9.1>에 수록되어 있어요.

```
function Cantor1
% Cantor Set
clf;
b = 0.1;
a(1) = 0;  a(2) = 1;
x = [0 1 1 0 0];
y = [0 0 -b -b 0];
for p = 1:6
    for q = 1:2^(p-1)
        c(q) = a(q)/3;
        c(2^(p+1)-q+1) = 1-c(q);
        c(2^p-q+1) = (1-a(q))/3;
        c(2^p+q) = 1-c(2^p-q+1);
    end
    q = 2:2^(p+1);
    a(q) = c(q);
    for k = 1:2:2^(p+1)
    x = [x NaN a(k) a(k) a(k+1) a(k+1)];
    y = [y NaN b*p-b b*p b*p b*p-b];
    end
end
plot(x,y), axis equal, axis off
```

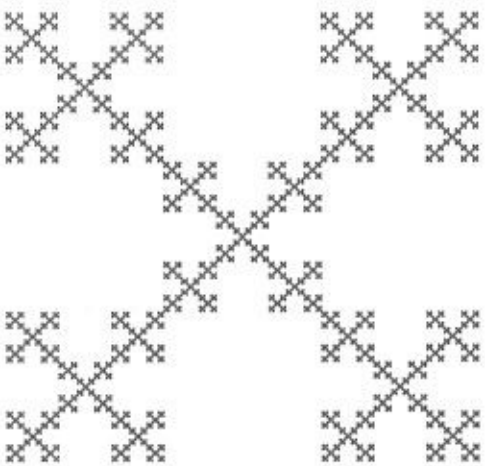
【그림 3.9.1】 Cantor집합



D : 아빠, 저는 Cantor집합을 2차원으로 확장한 그림을 그리기 위해서 다음과 같은 MATLAB프로그램을 짜보았어요. 이 프로그램을 수행한 결과가 <그림 3.9.2>에 수록되어 있어요.

```
function cantor2
% Cantor Dust
g = [1;1];
N = NaN*g;
x = [0 1 1 0 0; 0 0 1 1 0];
plot(x(1,:),x(2,:)), axis equal, axis off, pause(1)
for k = 1:8
   [p,q] = size(x);
   h = ones(1,q);
   x1 = x/3;
   x2 = x/3+[1/3*h; 1/3*h];
   x3 = x/3+[2/3*h;0*h];
   x4 = x/3+[2/3*h;2/3*h];
   x5 = x/3+[0*h;2/3*h];
   x = [x1 N x2 N x3 N x4 N x5 N];
   plot(x(1,:),x(2,:)), axis equal, axis off, pause(1)
end
```

【그림 3.9.2】 Cantor먼지



F : 동연이와 영상이가 Cantor집합의 정의를 완전히 이해했구나. 동연이가 그린 2차원 Cantor집합을 Cantor먼지(Cantor dust)라고 한다. 지금부터는 <정리 3.8.1>을 증명하기로 하자. 우선, Cantor집합은 영집합임을 증명해보아라.

Y : 아주 쉬워요. 임의의 n에 대해서 다음 식들이 성립하는 것은 명백해요.

$$m(P) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq m(E_n)$$

즉, 다음 식들이 성립해요.

$$m(P) \leq \lim_{n \to \infty} m(E_n) \leq \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

따라서, Cantor집합 P는 영집합이어요.

F : 동연아, Cantor집합이 폐집합임을 증명할 수 있겠니?

D : 제가 시도해볼게요. 다음 식이 성립해요.

$$[0, 1] \cap P^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_{n,k}$$

이 식의 우변은 구간 $[0,1]$에서 개집합이어요. 따라서, P는 폐집합이어요.

F : 아주 간결한 증명이었다. 이번에는 영상이가 Cantor집합을 다음과 같이 표기할 수 있음을 증명해보아라.

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i / 3^i \,\middle|\, \varepsilon_i = 0 \text{ or } 2 \right\}$$

Y : 정의로부터 Cantor집합 P는 폐구간들 $I_{n,1}, I_{n,2}, \cdots, I_{n,2^n}$, $(n = 1, 2, \cdots)$의 양끝점들로 이루어졌음을 알 수 있어요. 폐구간들 $I_{n,1}, I_{n,2}, \cdots, I_{n,2^n}$의 양끝점들의 집합은 개구간들 $J_{n,1}, J_{n,2}, \cdots, J_{n,2^n-1}$의 양끝점들의 집합과 집합 $\{0,1\}$의 합집합이어요. 즉, Cantor집합 P는 개구간들 $J_{n,1}, J_{n,2}, \cdots, J_{n,2^n-1}$의 양끝점들의 집합과 집합 $\{0,1\}$의 합집합이지요. 개구간들 $\{J_{n,k} \mid n = 1,2,3\}$을 3진법으로 나타내면, 다음과 같아요.

$$J_{1,1} = J_{2,2} = J_{3,4} = ([0.1]_3, [0.2]_3)$$
$$J_{2,1} = J_{3,2} = ([0.01]_3, [0.02]_3),\ J_{2,3} = J_{3,6} = ([0.21]_3, [0.22]_3)$$
$$J_{3,1} = ([0.001]_3, [0.002]_3),\ J_{3,3} = ([0.021]_3, [0.022]_3)$$
$$J_{3,5} = ([0.201]_3, [0.202]_3),\ J_{3,7} = ([0.221]_3, [0.222]_3)$$

즉, 개구간 $J_{n,k}$를 3진법으로 나타내면, 다음과 같음을 알 수 있어요.

$$J_{n,k} = ([0.\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1}1]_3, [0.\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1}2]_3)$$

여기서 각 ε_i는 0 또는 2이어요. 따라서, $a \in P$이기 위한 필요충분조건은 a를 다음과 같이 나타낼 수 있는 것이지요.

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$$

여기서 각 ε_i는 0 또는 2이어요.

F : 아주 훌륭한 증명이었다. 앞에서 Cantor집합은 가산집합이 아니라고 했다. 동연이가 이 성질을 증명할 수 있겠니?

D : 네. 앞에서 증명한 3진법표기법을 사용하기로 해요. 만일 Cantor집합 P가 가산이라면, $P = \{a_1, a_2, \cdots\}$라고 표기할 수 있어요. 또한, 각 a_n을 3진법으로 표기하면,

$a_n = [0.\varepsilon_{n,1}\varepsilon_{n,2}\varepsilon_{n,3}\cdots]_3$이어요. 여기서 각 $\varepsilon_{n,k}$는 0 또는 2이지요. 만일 $\delta_k = 2 - \varepsilon_{k,k}$라고 정의하면, $b = [0.\delta_1\delta_2\delta_3\cdots]_3 \in P$이지요. 그러나, 각 n에 대해서 $a_n \neq b$이어요. 이는 모순이지요. 즉, Cantor집합 P는 가산집합이 아닙니다.

F : 잘 증명했다. 따라서, Cantor집합은 가산집합이 아니면서 Lebesgue측도값이 0이다. Cantor집합은 Fractal이론 또는 Chaos이론을 전개하는데도 많은 역할을 한단다.

제 4 장

Lebesgue적분

4.1 Lebesgue가측함수

D & Y : 아빠! 이제 우리는 Lebesgue적분을 배울 준비가 된거죠?

F : 그렇다. 지금까지 배운 Lebesgue측도에 관한 지식을 바탕으로, Lebesgue적분에 대해서 공부하기로 하자. Lebesgue적분을 정의하려면, 먼저 Lebesgue가측함수에 대해서 살펴보아야 한다. 영상아, 다음 정리를 증명해보아라.

정리 4.1.1

만일 실함수 f의 정의역 D가 Lebesgue가측이면, 다음 네 조건들이 동치이다.

(a) 임의의 실수 a에 대해서 $\{t \mid f(t) > a\}$는 가측집합이다.
(b) 임의의 실수 a에 대해서 $\{t \mid f(t) \geq a\}$는 가측집합이다.
(c) 임의의 실수 a에 대해서 $\{t \mid f(t) < a\}$는 가측집합이다.
(d) 임의의 실수 a에 대해서 $\{t \mid f(t) \leq a\}$는 가측집합이다.

Y : 가측집합의 정의를 아는 사람에게 이 정리의 증명은 고등학교 수학 수준의 문제여요. 쉽게 할 수 있죠. 우선 (a)와 (d)가 동치임을 보이기로 해요. 다음 식들이 성립해요.

$$\{t \mid f(t) \le a\} = \{t \mid f(t) > a\}^c \bigcap D$$
$$\{t \mid f(t) > a\} = \{t \mid f(t) \le a\}^c \bigcap D$$

가정에 의해서 정의역 D가 Lebesgue가측이므로, $\{t \mid f(t) > a\}$가 가측집합이기 위한 필요충분조건은 $\{t \mid f(t) \le a\}$가 가측집합인 것이어요. 같은 방법으로, 다음 식을 사용해서, (b)와 (c)가 동치임을 보일 수 있어요.

$$\{t \mid f(t) \ge a\} \bigcup \{t \mid f(t) > a\} = D$$

지금부터는 (a)와 (b)가 동치임을 증명하기로 해요. 다음 식이 성립함은 자명해요.

$$\{t \mid f(t) \ge a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ t \,\middle|\, f(t) > a - \frac{1}{n} \right\}$$

만일 (a)가 성립하면, 이 식에 의해서 $\{t \mid f(t) \ge a\}$도 가측집합임을 알 수 있어요. 즉, (b)가 성립해요. 다음 식이 성립함은 자명하지요.

$$\{t \mid f(t) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \,\middle|\, f(t) \ge a + \frac{1}{n} \right\}$$

만일 (b)가 성립하면, 이 식에 의해서 $\{t \mid f(t) > a\}$도 가측집합이지요. 즉, (a)가 성립해요. 따라서, <정리 4.1.1>의 증명이 끝났어요.

F : 영상이 말대로 쉬운 문제였다. 그러나, 너무 자만하지는 말거라. 수학을 공부할 때는 세심한 주의를 필요로 한단다. 만일 <정리 4.1.1>의 네 가지 조건들 중 하나가 만족되면, 나머지 세 조건들도 만족된다는 것을 알 수 있었다. 만일 이 네 가지 조건들 중에서 하나가 만족되면, 함수 $f(t)$를 Lebesgue가측함수 또는 줄여서 가측함수라고 한다. 어떤 함수들이 가측함수일까?

D : 정의역 D가 가측인 연속함수는 가측함수이지요.

Y : 정의역 D가 가측인 계단함수도 가측이어요.

D : 함수 f가 정의역이 D인 가측함수라고 해요. 만일 D의 부분집합 E가 가측이면, 함

수 f의 정의역을 E로 제한한 함수 $f_E = f\chi_E$도 가측함수여요. 여기서 사용된 χ_A를 지시함수(indicator function)라고 하는데, 다음과 같이 정의되지요.

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & (t \in A) \\ 0, & (t \notin A) \end{cases}$$

F : 가측함수들에 사칙연산을 행해서 얻은 함수들도 가측이다. 즉, 만일 함수들 f와 g가 같은 정의역 D를 갖는 가측함수들이고 c가 상수이면 함수들 $f+c$, cf, $f+g$, $f-g$ 그리고 fg도 가측함수들이다. 이를 하나씩 증명해보아라.

Y : 임의의 실수 a에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid f(t) + c < a\} = \{t \mid f(t) < a - c\}$$

따라서, $f+c$가 가측함수입니다.

D : 만일 $c = 0$이면, $cf(t) \equiv 0$이어요. 함수 f의 정의역 D가 가측집합이므로, cf는 가측함수이지요. 만일 $c > 0$이면, 임의의 실수 a에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid cf(t) < a\} = \left\{t \mid f(t) < \frac{a}{c}\right\}$$

따라서, cf는 가측함수여요. 만일 $c < 0$이면, 임의의 실수 a에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid cf(t) > a\} = \left\{t \mid f(t) < \frac{a}{c}\right\}$$

따라서, cf는 가측함수여요.

Y : 임의의 실수 a에 대해서, 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid f(t) + g(t) < a\} = \bigcup_{q \in Q} (\{t \mid f(t) < q\} \cap \{t \mid g(t) < a - q\})$$

유리수집합 Q는 가산이고, Lebesgue가측집합족은 σ-대수이므로, 이 식의 우변도 가측집합이지요. 따라서, $f+g$는 가측함수여요.

D : 함수 $-f = (-1)f$는 가측이지요. 따라서, $g - f = g + (-f)$도 가측함수여요.

Y : 임의의 $a(\geq 0)$에 대해서, 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid f^2(t) > a\} = \{t \mid f(t) > \sqrt{a}\} \cup \{t \mid f(t) < -\sqrt{a}\}$$

이 식의 우변은 가측집합이어요. 만일 $a < 0$이면, $\{t \mid f^2(t) > a\} = D$이지요. 따라서, f^2는 가측함수여요. 다음 식이 성립해요.

$$fg = \frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$$

따라서, fg도 가측함수여요.

F : 가측함수들의 극한으로 얻는 함수들도 가측이다. 즉, 만일 함수들 $f_1, f_2, \cdots$이 같은 정의역 D를 갖는 가측함수들이면, 함수들 $\max\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, $\min\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim} f_n$ 그리고 $\underline{\lim} f_n$도 가측함수들이다. 이를 하나씩 증명해보아라.

D : 임의의 실수 a에 대해서, 다음 식이 성립해요.

$$\left\{t \,\middle|\, \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t) > a\right\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{t \mid f_k(t) > a\}$$

따라서, $\max\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$은 가측함수여요.

Y : 다음 식이 성립함은 자명해요.

$$\min\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} = -\max\{-f_1, -f_2, \cdots, -f_n\}$$

따라서, $\min\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$은 가측함수입니다.

D : 임의의 실수 a에 대해서, 다음 식이 성립해요.

$$\{t \mid \sup_n f_k(t) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t \mid f_k(t) > a\}$$

따라서, $\sup_n f_n$은 가측함수여요.

Y : 식 $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$이 성립해요. 따라서, $\inf_n f_n$도 가측함수지요.

D : 다음 식들이 성립해요.

$$\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k, \quad \underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$$

따라서, $\overline{\lim} f_n$과 $\underline{\lim} f_n$도 가측함수입니다.

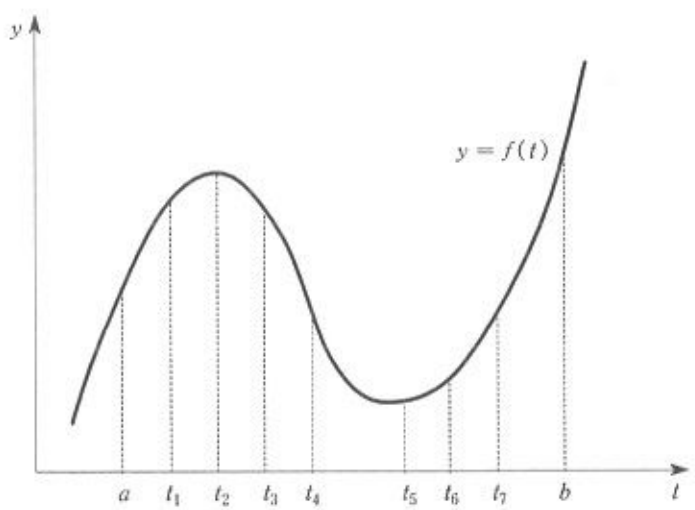
F : 잘하였다. 결론적으로, 가측함수열 $\{f_n\}$이 f에 수렴하면, 극한함수 $f = \lim_{n \to \infty} f_n$은 가측함수이다. 특히, 폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수열의 극한함수는 가측함수이다. 실제로, 일반적으로 사용되는 함수는 가측함수이고, 실용적인 함수들 중에서 Lebesgue가측함수가 아닌 함수를 찾는 것은 거의 불가능하다고 말해지고 있을 정도이다.

4.2 Lebesgue적분의 정의

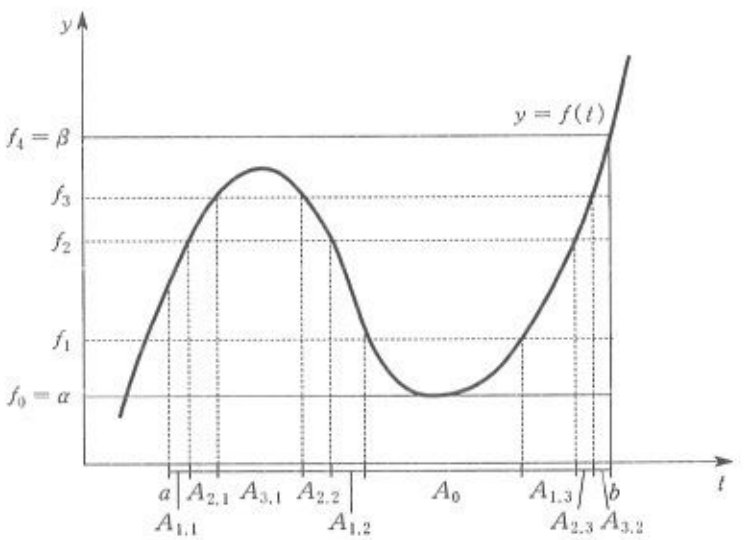
D : 드디어 Lebesgue적분을 정의할 때가 되었군요.

F : 그렇다. 우선, Riemann적분에 대해서 한번 더 생각해보자. Riemann적분은 <그림 4.2.1>처럼 정의역을 나타내는 t축을 분할해서, 그에 해당하는 조각들을 더한 것이다. 그러나, 이 방법으로는 적분하고자 하는 함수의 정의역이 Jordan가측이 아닌 함수는

【그림 4.2.1】 Riemann적분



【그림 4.2.2】 Lebesgue적분



$A_1 = A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup A_{1,3}$ $A_2 = A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup A_{2,3}$ $A_3 = A_{3,1} \cup A_{3,2}$

적분할 수 없다. 예를 들어, Dirichlet함수와 같이 Jordan가측하지 않은 집합에서 함수값이 0이 아닌 함수는 Riemann적분을 할 수 없다. 그렇다면, 이러한 함수들을 어떻게 적분해야 할까?

Y : 밀어서 안 되면 끌어보지요! <그림 4.2.2>처럼, 정의역이 아닌 치역을 분할해보기로 해요.

F : 좋은 생각이다. 지금부터 적분해야 할 $y = f(t)$를 Lebesgue가측함수라 하고, t의 영역인 정의역은 $E = [a, b]$이고, y의 영역인 치역은 $\alpha \le f(t) \le \beta$로 가정하자. 또한, 편의상 $\alpha \ge 0$으로 가정하자. 즉, 비음함수의 Lebesgue적분에 대해서 살펴보자. 치역 $[\alpha, \beta]$를 분할하는 $n+1$개의 점들이 다음 식들을 만족한다고 하자.

$$\alpha = f_0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_n = \beta$$

다음과 같은 집합들을 정의하자.

$$A_k = \{t \mid f_k \le f(t) < f_{k+1}\}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

또한, 다음 식들을 정의하자.

$$S_m = f_0\, m(A_0) + f_1\, m(A_1) + \cdots + f_{n-1}\, m(A_{n-1})$$
$$S_M = f_1\, m(A_0) + f_2\, m(A_1) + \cdots + f_n\, m(A_{n-1})$$

따라서, S_m은 함수 $f(t)$의 정의역 $E=[a, b]$에서의 적분값의 하한을 나타내고, S_M은 상한을 나타낸다.

Y : 아빠가 말씀하시는 적분값이란, 직선 $t=a$, 직선 $t=b$, t축, 그리고 함수 $y=f(t)$로 둘러싸인 면적을 의미하겠지요. 또한, 그 적분값은 S_m보다 작지 않고, S_M보다 크지 않겠지요.

D : 당연하지.

F : 이제 $\max\limits_{1 \le k \le n} |f_k - f_{k-1}| \to 0$가 만족되도록 $n \to \infty$를 취할 때, 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$\lim_{n \to \infty} S_m = \lim_{n \to \infty} S_M < \infty \tag{4.2.1}$$

식 (4.2.1)이 성립할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[a, b]$에서 Lebesgue적분가능이라고 하며, 이 극한값을 함수 $f(t)$는 구간 $[a, b]$에서 Lebesgue적분값 $\int_a^b f(t)\,dt$라 한다.

Y : Lebesgue적분에서는 정의역이 아닌 치역을 분할해서 합을 계산하므로, 구태여 함수 $f(t)$의 정의역 E를 폐구간 $[a, b]$로 정의할 필요는 없을 것 같아요. 단지, 정의역 E가 가측집합이면, 그 집합에서 Lebesgue적분을 정의할 수 있어요.

F : 영상이가 Lebesgue적분의 핵심을 잘 파악했구나. 만일 비음인 가측함수 f가 가측집합 E에서 다음 식을 만족하면, 이 함수 f가 Lebesgue적분가능 또는 줄여서 적분가능이라고 한다.

$$\int_E f < \infty$$

D : Lebesgue적분에서 중요한 것은 치역의 각 소구간 $[f_{k-1}, f_k]$, $(k=1, 2, \cdots, n)$의 간격이 0이 되도록 $n \to \infty$를 취하는 것이군요. 이것은 Riemann적분의 정의에서 사용된 조건과 비슷해요. 단, Riemann적분에서는 정의역의 각 소구간의 간격이 0이 되도록 $n \to \infty$를 취했어요.

F : 동연이도 핵심을 잘 파악했구나. 이렇게 y축을 소구간들로 나누는 방법과 Lebesgue측도를 사용해서 Lebesgue적분을 정의하면, Lebesgue측도가 0인 영집합 N에 속하는 점 t_*의 함수값 $f(t_*)$는 Lebesgue적분값에 영향을 미치지 않는다. 따라서, Riemann 적분할 수 없는 Dirichlet함수도 Lebesgue적분을 할 수가 있다. 누가 이 Lebesgue적분값을 구해보겠니?

Y : 제가 해볼게요. Dirichlet함수는 거의 모든 점에서 함수값이 0이므로, 즉, $f(t)=0$ $a.e.$ 이므로, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{M\to\infty} S_M = 0$ 이이요. 따라서, Lebesgue적분값은 $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ 입니다.

D : Riemann적분에서 정의역을 분할할 때는 어떤 점 t가 어느 소구간에 들어가는지 명확하게 말할 수 없는 경우가 있지만, 치역을 분할하면 그런 문제가 발생하지 않는군요. 따라서, 치역을 분할한 다음, 그에 대응하는 정의역의 측도값에 함수값을 곱해서 얻은 값들을 더한 것이 Lebesgue적분값이 되는군요. 참 재미있는 아이디어네요.

Y : Riemann적분가능인 함수는 Lebesgue적분가능이겠군요.

F : 그렇다고 말할 수 있다. 만일 Lebesgue적분과 Riemann적분이 모두 존재하면, Riemann적분값과 Lebesgue적분값은 동일하다.

D : 그렇다면, Lebesgue적분은 Riemann적분을 확장한 것으로 간주할 수 있군요?

F : 어떤 의미에서는 그렇게 말할 수 있다. 즉, 보통 의미로는 Lebesgue적분이 Riemann적분의 확장이라고 할 수 있다. 그러나, 엄밀히 말하면, 포함관계는 성립하지 않는다. 함수값이 유한이 아닌 경우나 무한구간에서의 적분, 즉 부적합한(improper) Riemann적분을 포함하는 넓은 의미의 Riemann적분에서는 Riemann적분 $(R)\int f(t)\,dt$가 존재하지만, Lebesgue적분이 불가능한 함수 $f(t)$가 있다.

Y : Lebesgue적분의 키포인트는 영집합 상의 함수값은 무시한다는 것이군요.

F : 그렇다. 앞에서도 언급했듯이, 가측구간 E에서 정의된 함수들 $f(t)$와 $g(t)$가 영집합 N을 제외한 집합 $E\cap N^c$의 각 점 t에서 $f(t)=g(t)$이면, $f(t)$와 $g(t)$는 거의 모든 점에서(almost everywhere) 같다고 하고, $f(t)=g(t)$ $a.e.$라고 쓴다. 이 경우에는 다음 식이 성립한다.

$$\int_E f(t)\,dt = \int_E g(t)\,dt$$

이 성질은 매우 중요하므로, 항상 기억하고 있어야 한다.

D : 앞에서, 함수 $f(t)$의 최소값 α가 비음이라고 가정했지요. 이것과 관련해서, 고등학교 때 수학시간에 Riemann적분의 정의를 두 단계로 나누어 배운 것이 생각나요. 즉, 제 1단계로 적분구간 $[a, b]$에서 피적분함수 $f(t)$가 비음이라는 가정 하에 $(R)\int_a^b f(t)dt$를 정의하였어요. 아마도, 그러한 조건 하에서 $(R)\int_a^b f(t)dt$가 면적으로서의 의미를 갖기 때문이겠죠. 그 다음 단계로, 적분구간 $[a, b]$를 피적분함수 $f(t)$가 비음인 구간 I_1과 음인 구간 I_2로 나누어, Riemann적분을 다음과 같이 정의했어요.

$$(R)\int_a^b f(t)dt = (R)\int_{I_1} f(t)dt - (R)\int_{I_2} \{-f(t)\}dt$$

이것은 중요한 의미를 갖는 것 같아요. 예를 들어, 적분 $(R)\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\,dt$를 살펴보기로 해요. 이 식의 좌변의 피적분함수가 기함수이므로 Riemann적분값이 0일 것 같아요. 그러나, 이 Riemann적분값은 다음과 같이 정의되지요.

$$(R)\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_{\varepsilon_1}^{1} \frac{1}{t}\,dt - \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon_2} \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

이 식의 우변의 적분값들은 각각 ∞이어요. 즉, 우변은 $\infty - \infty$이지요. 따라서, 이 경우에 Riemann적분은 불가능해요. 이 문제에서 유추할 수 있듯이, Lebesgue적분에서도 함수값이 비음인 경우와 음인 경우로 나누어서 생각해야 할 것 같아요.

F : 아주 잘 유추했다. Lebesgue적분에서도 피적분함수를 비음인 부분과 음인 부분으로 나누어 생각한다. 다음과 같은 함수들을 정의하자.

$$f^+(t) = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \quad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$f^+(t) \geq 0, \quad f^-(t) \geq 0$$
$$f(t) = f^+(t) - f^-(t), \quad |f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$$

만일 함수들 $f^+(t)$와 $f^-(t)$가 Lebesgue적분가능하면, 함수 $f(t)$의 적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\int f(t)dt = \int f^+(t)dt - \int f^-(t)dt$$

따라서, 우리는 비음인 함수의 Lebesgue적분만을 연구하면 된다.

4.3 Lebesgue적분의 성질

F : 지금부터는 Lebesgue적분의 특성에 대해서 살펴보자. Lebesgue적분의 극한에 관한 성질은 다음 절에서 다루기로 하고, 이 절에서는 Lebesgue적분의 기본적인 성질들을 소개할 것이다. 이 성질들에 대한 증명은 이화여자대학교의 이외숙 교수님과 아빠가 함께 쓴 『측도론』을 참조해라. 동연아, Riemann적분과 Lebesgue적분 사이의 관계는 어떠할까?

D : 앞에서도 아빠가 설명해주셨어요. 다음 정리가 성립해요.

정리 4.3.1

만일 함수 f가 유계집합 E에서 정의된 유계함수이고, 또한 만일 집합 E에서 Riemann적분이 가능하면, 이 함수 f는 집합 E에서 Lebesgue적분가능하며 또한 다음 식을 만족한다.

$$(R)\int_E f(t)dt = \int_E f(t)dt$$

F : <정리 4.3.1>에서 알 수 있듯이, 보통 의미로는 Lebesgue적분이 Riemann적분의 확장이라고 할 수 있다. 그러나, 엄밀히 말하면, 포함관계는 성립하지 않는다. 앞에서도 언급했듯이 부적합한(improper) Riemann적분을 포함하는 넓은 의미의 Riemann적분을 적용하면 Riemann적분 $(R)\int f(t)dt$가 존재하지만, Lebesgue적분이 불가능한 함수 $f(t)$가 존재한다. 동연이는 구간 $[0,\infty)$에서 다음 함수의 Riemann적분값을 구할 수 있겠니?

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & (t>0) \\ 1, & (t=0) \end{cases}$$

D : 아빠, 이 적분은 복소수함수론 시간에 contour적분의 대표적인 예제로 사용되는 것이지요? 복소수적분을 사용해서, 다음 식을 증명할 수 있어요.

$$(R)\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$$

저는 다른 방법을 시도해볼게요. 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^{\infty} e^{-yz} dz = \frac{1}{y}$$

따라서, 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^{t} \frac{\sin y}{y}\, dy = (R)\int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-yz} \sin y\, dy\, dz$$

부분적분을 사용해서, 다음 식을 유도할 수 있어요.

$$(R)\int_0^{t} e^{-yz} \sin y\, dy = \frac{1}{1+z^2} - e^{-tz}\frac{\cos t + z\sin t}{1+z^2}$$

만일 $t \geq 1$이고 $z \geq 0$이면, 다음 식이 성립해요.

$$\left| e^{-tz}\frac{\cos t + z\sin t}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{1+z} \cdot \frac{1+z}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2}$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^{\infty} \left| e^{-tz}\frac{\cos t + z\sin t}{1+z^2} \right| dz \leq (R)\int_0^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

따라서, 다음 식이 성립해요.

$$(R)\lim_{t\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-tz}\frac{\cos t + z\sin t}{1+z^2}\, dz = (R)\int_0^{\infty} \lim_{t\to\infty} e^{-tz}\frac{\cos t + z\sin t}{1+z^2}\, dz = 0$$

이 식의 첫 번째 등호는 지배수렴정리(dominated convergence theorem)에 의해서 성립하는 것이어요. 엄격히 말하면, 이 법칙은 보통의 Riemann적분에서는 적용할 수 있는 것이 아니여요. 여기서의 Riemann적분은 부적합한(improper) Riemann적분이어서 이 법칙을 적용했어요. 지금까지의 내용을 정리하면 다음과 같아요.

$$
\begin{aligned}
&(R)\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\\
&=\lim_{t\to\infty}(R)\int_0^{t}\frac{\sin y}{y}\,dy\\
&=\lim_{t\to\infty}(R)\int_0^{\infty}\int_0^{t}e^{-yz}\sin y\,dy\,dz\\
&=\lim_{t\to\infty}(R)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^2}-e^{-tz}\frac{\cos t+z\sin t}{1+z^2}\right)dz\\
&=(R)\int_0^{\infty}\frac{1}{1+z^2}\,dz\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

F : 아주 좋은 해이다. 그러나, 이 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\infty)$에서 Lebesgue적분가능하지 않다. 영상이가 증명할 수 있겠니?

Y : 물론이죠. 각 자연수 n에 대해서 다음 식들이 성립해요.

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy\geq\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin y|\,dy=\frac{2}{n\pi}$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

만일 $n\to\infty$이면, 이 부등식의 우변은 ∞로 발산해요. 즉, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\infty)$에서 Lebesgue적분가능하지 않아요.

F : 이 예는 억지로 두드려 맞춘 것 같은 역예제(counter example)이다. 그러나, <정리 4.3.1>에서 알 수 있듯이, 보편적으로 말하면, 어떤 함수가 어떤 집합에서 Riemann적분가능하면 Lebesgue적분도 가능하다. 따라서, Riemann적분의 대부분의 성질들은 Lebesgue적분에서도 성립한다. Lebesgue적분의 기본적인 성질들에 대해서 말해보아라.

Y : 다음 정리가 성립해요.

정리 4.3.2

만일 함수들 f와 g가 집합 E에서 적분가능하면, 다음 성질들이 성립한다.

(a) $|f| < \infty$ $a.e.$

(b) $\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g$

(c) 만일 $f = g$ $a.e.$이면, $\int_E f = \int_E g$이다.

(d) 만일 $f \le g$ $a.e.$이면, $\int_E f \le \int_E g$이다.

(e) 만일 $\alpha \le f(t) \le \beta$ $a.e.$이면, $\alpha m(E) \le \int_E f \le \beta m(E)$이다.

(f) 만일 집합 E의 부분집합들 A와 B가 서로소인 가측집합들이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

(g) 만일 집합 E에서 $f \ge 0$ $a.e.$이고, 또한 만일 $\int_E f(t)dt = 0$이면, $m(E) = 0$이다.

F : 잘 알다시피, $|f(t)| = \infty$이거나 $|g(t)| = \infty$인 점 t에서는 함수값 $f(t) + g(t)$가 정의되지 않는다. 만일 함수들 f와 g가 Lebesgue적분가능하다면, 이러한 점들 전체의 집합은 영집합이어야 한다. 함수 $f + g$의 적분가능성과 적분값은 이 영집합에서의 함수값들과는 무관하기 때문이다. 함수 f와 함수 $|f|$의 Lebesgue적분들 사이에는 어떠한 관계가 있을까?

D : 제가 대답해볼게요. 다음 정리들이 성립해요.

정리 4.3.3

함수 f가 집합 E에서 적분가능하기 위한 필요충분조건은 $|f|$가 적분가능인 것이다. 이 경우에, 부등식 $|\int_E f| \le \int_E |f|$가 성립한다.

정리 4.3.4

만일 함수 f가 집합 E에서 적분가능하고, 또한 만일 집합 E에서 $|g| \le |f|$ $a.e.$이면, g도 적분가능하다.

4.4 Lebesgue적분의 수렴정리들

D : 아빠! Riemann적분이 불가능한 함수를 Lebesgue적분할 수 있다는 것은 적분가능한 함수들의 범위가 넓어졌다는 것을 뜻하지요. 그러나, 단순히 적분가능한 함수들을 늘리기 위해서 Lebesgue적분을 도입하는 것은 아니지요?

F : 그렇다. 앞에서 말했듯이, Lebesgue적분이 있음으로써 Banach공간과 Hilbert공간을 다루는 함수해석학을 엄밀하게 전개할 수 있다. 함수해석학은 양자물리, 적분방정식론, 확률시스템론, 확률미분방정식 그리고 최적화 문제 등에 응용되고 있는 것이다. 따라서, 이학, 공학, 금융공학 등을 공부하는 학생들에게 Lebesgue적분은 피할 수 없는 과제가 되고 있다. 미래는 더욱 그러하리라 생각한다. 영상아, Lebesgue적분의 가장 중요한 정리가 무엇일까?

Y : 앞에서, 아빠가 Lebesgue적분의 가장 중요한 특징은 수렴정리들에 있다고 하셨잖아요?

F : 그렇다. Lebesgue적분이 중요시되는 주된 이유는 수렴정리들, 특히 Lebesgue지배수렴정리(Lebesgue dominated convergence theorem)의 위력 때문이다. 만일 Lebesgue지배수렴정리가 없다면, Banach공간이나 Hilbert공간을 엄밀하게 다룰 수가 없고, 따라서 함수해석학이 제대로 형성되지 않았을 것이다.

D : 그렇다면, 함수해석학은 Lebesgue적분 덕분에 구축되었다고 할 수 있군요? 양자역학의 수학적 기초가 Hilbert공간론이라고 하던데… 그렇다면, Lebesgue적분없이는 양자역학을 제대로 설명할 수가 없겠군요.

F : 양자역학은 상대성이론과 더불어 현대물리학의 새로운 기반이다. 특히, 양자역학은 물리학을 넘어서 정보이론에 깊이 스며들고 있다. 아빠의 사견이지만, 궁극적으로 양자역학은 컴퓨터, 생물학, 그리고 인문사회학까지 깊이 파고들 것이라고 생각한다. 따라서, 너희들 세대에서는 양자역학을 필수적으로 알고 있어야 할 것이다. 머지 않아 고등학교에서 양자역학의 기초를 가르치는 시대가 올지도 모른다. 이러한 양자역학을 이해하기 위

해서는 함수해석학을 알아야 하고, 함수해석학을 공부하기 위해서는 Lebesgue적분, 특히 Lebesgue적분에서의 수렴정리들을 이해하는 것이 필수적이다.

Y : Lebesgue적분에서 수렴정리들이란 무엇이지요?

F : 쉽게 말해서, 적분 $\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꾸는 것에 관한 정리들이다. 즉, 다음과 같은 식이 성립하기 위한 조건을 다루는 것이다.

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \tag{4.4.1}$$

D : Riemann적분에서, 함수열 $\{f_n\}$이 구간 E에서 일양수렴(uniform convergence)하면, 식 (4.4.1)이 성립한다고 배웠어요.

F : 너희들은 점별수렴(pointwise convergence)과 일양수렴의 차이를 아느냐?

Y : 제가 점별수렴에 대해서 말해볼게요. 함수열 $\{f_n\}$이 구간 E에서 함수 f로 점별수렴한다는 것은 각 $t\in E$에 대해서 식 $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$이 성립하는 것이어요. 이 경우에 함수들이 구간 E에서 연속일 필요는 없어요.

D : 제가 일양수렴에 대해서 말해볼게요. 함수열 $\{f_n\}$이 유한구간 E에서 함수 f로 일양수렴한다는 것은 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 명제를 만족하는 자연수 $N(\varepsilon)$이 존재한다는 것이어요.

$$n \geq N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \sup_{t\in E} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

F : 결국, 함수열 $\{f_n\}$이 구간 E에서 함수 f로 일양수렴한다는 것은 각 $t\in E$에서 $f_n(t)$가 $f(t)$로 수렴하는 형태가 비슷하다는 것이다. 이제, 다음 정리를 증명해보아라.

정리 4.4.1

함수열 $\{f_n\}$이 구간 E에서 함수 f로 일양수렴(uniform convergence)하면, 다음 식이 성립한다.

$$(R)\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (R)\int_E f_n$$

Y : 제가 증명해볼게요. 다음 식이 성립해요.

$$\left|(R)\int_E f_n(t)dt - (R)\int_E f(t)dt\right| \le (R)\int_E |f_n(t)-f(t)|\,dt$$

또한, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned}(R)\int_E |f_n(t)-f(t)|\,dt &\le (R)\int_E \sup_t |f_n(t)-f(t)|\,dt \\ &\le \sup_t |f_n(t)-f(t)|\,(R)\int_E dt \to 0\end{aligned}$$

여기서 극한은 일양수렴성에 의해서 성립해요.

F : 아주 좋은 증명이었다. <정리 4.4.1>은 당연히 Lebesgue적분에서도 성립한다. 동연이는 Riemann적분에서 $(R)\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 그냥 바꿀 수 없다는 반례(counterexample)를 들어볼 수 있겠니?

D : 함수열 $\{f_n(t) = nte^{-nt^2}\chi_{[0,1]}(t) \mid n = 1, 2, \cdots\}$을 생각해보기로 해요. L'Hospital 정리를 사용해서 다음 식을 쉽게 증명할 수 있어요.

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0, \quad (t \in [0,1])$$

또한, 다음 식들이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 f_n(t)dt = (R)\int_0^1 nte^{-nt^2}dt = -\frac{1}{2}e^{-nt^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n}$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = (R)\int_0^1 f(t)dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{2}$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = 0 < \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(t)dt$$

또한, 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(t) - 0| = 1$$

즉, 이 함수열은 폐구간 [0 , 1]에서 일양수렴하지 않아요. 또한, Riemann적분 $(R)\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꿀 수가 없어요.

F : 좋은 반례이다. 수렴에는 점별수렴, 일양수렴, 거의 모든 점에서 수렴, 확률수렴(convergence in probability), 평균제곱수렴(mean-square convergence) 등이 있다. 이러한 수렴개념들이야말로 해석학의 중요한 부분이다. 영상이는 해석학에서 수렴에 관한 논의가 왜 중요하다고 생각하니?

Y : 미분이나 적분의 정의가 극한을 바탕으로 하기 때문이지요. 만일 우리가 다루고자 하는 함수들의 집합이 극한연산자인 lim에 대해서 닫혀 있지 않으면, 미분이나 적분에 관한 체계적인 이론을 구축할 수 없기 때문이지요.

F : 명쾌한 답이구나. 극한이라는 개념없이는 미적분이 존재할 수가 없다. 영상이가 Riemann적분에서 $(R)\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꿀 수 없는 다른 반례를 들어볼 수 있겠니?

Y : 아빠가 쓰신 책의 예제를 사용해볼게요. 최병선(2001, p. 45)과 최병선(2002, p. 95)에 기술된 마녀모자함수들(witchhat functions)을 약간 변형해서, 다음과 같은 함수열 $\{f_n\}$을 만들기로 해요.

$$f_n(t) = \begin{cases} n\left(1 - n\left|t - \frac{1}{n}\right|\right), & \left(0 \le t \le \frac{2}{n}\right) \\ 0, & \left(t > \frac{2}{n}\right) \end{cases}$$

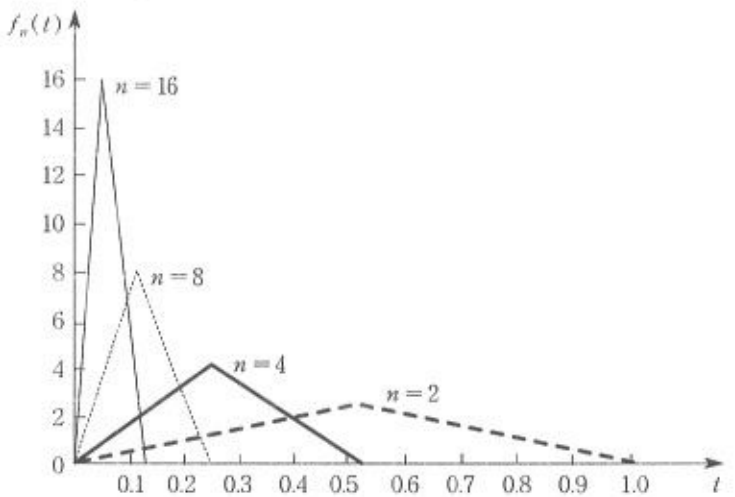
이 마녀모자함수들이 <그림 4.4.1>에 그려져 있어요. 이 함수열 (f_n)은 0으로 점별수렴하나, 일양수렴하지 않음은 명백해요. 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0$$

또한, 다음 식이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$$

【그림 4.4.1】 마녀모자함수들



따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$(R)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(t)\,dt$$

이 예제에서도 함수열이 일양수렴하지 않으면, Riemann적분 $(R)\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꿀 수 없다는 것을 알 수 있어요.

F : 영상이도 좋은 반례를 제시했구나. 다시 한 번 말하지만 Lebesgue적분에서 수렴정리란 적분 $\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꾸는 것에 관한 정리이다. 즉, <정리 4.4.1>의 일양수렴이라는 조건이 너무 강하기 때문에, 이를 약화시켜서 일양수렴이 아닌 함수열들에도 적용할 수 있도록 하는 것이다. 이에 해당하는 정리들로는 세 종류가 있다. 첫째는 단조수렴정리(monotone convergence theorem), 둘째는 유계수렴정리(bounded convergence theorem), 그리고 셋째는 Lebesgue지배수렴정리(Lebesgue dominated convergence theorem)이다. 셋째를 줄여서 Lebesgue수렴정리(Lebesgue convergence theorem)라고 부르기도 한다. 이 절에서는 이 수렴정리들에 대해서 공부하기로 하자. 그러나, 이 수렴정리들의 증명은 제 4.6 절에서 다루기로 하자.

D : 그럼, Fatou정리는 무엇이어요?

F : 공부 좀 해왔구나. Fatou정리는 Lebesgue지배수렴정리를 증명하는데 사용되는 보조정리라고 할 수 있다. Fatou정리의 결과는 등호가 아니라 부등호라는 것을 명심해라. Fatou정리는 다음과 같다.

정리 4.4.2 Fatou정리

만일 $\{f_n\}$이 집합 E에서 비음인 가측함수열이고, 또한 만일 집합 E에서 $f_n \to f$ $a.e.$ 이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Y : Fatou정리는 함수 f의 Lebesgue적분가능성의 판단기준으로 사용할 수 있겠군요?

F : 그렇다. 함수열 $\{f_n(t) = n\chi_{[0,\,1/n]}(t)\}$을 사용해서, Fatou정리가 성립함을 예증해보아라.

D : 제가 해볼게요. 임의의 $t \in (0, 1]$에 대해서, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$이다. 그러나, 이 극한은 일양수렴하지 않아요. 또한, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$$

즉, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0 < 1 = \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

따라서, Fatou정리가 성립함을 예증했어요.

Y : Lebesgue수렴정리들의 첫 번째인 단조수렴정리를 설명해주세요.

F : 단조수렴정리를 Lévy수렴정리라고도 하는데, 이 정리는 다음과 같다.

정리 4.4.3 단조수렴정리

집합 E에서 비음인 가측함수열 $\{f_n\}$이 단조증가열이라고 하자. 즉, 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$0 \le f_1(t) \le f_2(t) \le \cdots$$

만일 집합 E에서 $f_n \to f$ $a.e.$이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

D : <정리 4.4.1>에서 알 수 있듯이, Riemann적분에서는 적분 $(R)\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꾸기 위해서, 집합 E에서 f_n이 f로 일양수렴한다는 조건을 필요로 해요. 그러나, Lebesgue적분에서는 일양수렴이 아닌 점별수렴으로도 적분과 극한의 순서를 바꿀 수 있군요. 더구나, 영집합에서는 그 점별수렴이라는 조건도 만족시킬 필요가 없구요. 즉, Lebesgue적분에서는 점별수렴보다도 약화된 조건인 거의 모든 점에서 수렴(convergence almost everywhere)이라는 조건이 만족되면, 적분 $\int$과 극한 $\lim_{n\to\infty}$의 순서를 바꿀 수가 있군요.

F : 동연이가 요점을 잘 파악하였구나. 일양수렴과 점별수렴의 차이가 Lebesgue적분을 사용해서 얻는 가장 큰 이득이다. 단조수렴정리를 사용해서, 정적분 $\int_0^1 t^{-1/2}dt$를 구해보아라.

Y : 제가 해볼게요. 각 n에 대해서, 함수 $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\chi_{[n^{-1},1]}(t)$를 정의하기로 해요. 각 n에 대해서, 함수 $f_n(t)$는 가측이어요. 또한, 함수열 $\{f_n\}$은 단조증가열이어요. 따라서, 단조수렴정리에 의해서, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(2 - 2\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

D : Lebesgue수렴정리의 두 번째인 유계수렴정리를 설명해주세요.

F : 이 정리는 다음과 같다.

정리 4.4.4 유계수렴정리

가측집합 E가 $m(E) < \infty$를 만족한다고 하자. 또한, 집합 E에서 가측함수열 $\{f_n\}$에 대해 다음 식을 만족하는 상수 M이 존재한다고 가정하자.

$$|f_k(t)| \le M, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

만일 집합 E에서 $f_n \to f$ $a.e.$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

F : 유리수집합은 가산이므로 $Q = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$로 표기할 수 있다. 함수 $f_n(t) = \chi_{\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}}(t)$를 정의하자. 이 함수열 $\{f_n\}$에 유계수렴정리를 적용할 수 있을까?

D : 물론 적용할 수 있어요. 다음 식이 성립해요.

$$|f_k(t)| \le 1, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

가측집합 $[0, 1]$에서 $\{f_n\}$은 가측함수열이지요. 따라서, <정리 4.4.4>의 유계수렴정리에 의해서 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$$

그러나, 폐구간 $[0, 1]$에서 함수열 $\{f_n\}$은 일양수렴하지는 않아요. 또한, 함수 $f_n(t)$는 Riemann적분이 가능하지 않아요. 따라서, Riemann적분에서는 이 식들이 성립하지 않아요.

Y : 마지막으로, 세 번째 수렴정리인 Lebesgue지배수렴정리를 설명해주세요.

F : Lebesgue지배수렴정리는 다음과 같다.

정리 4.4.5 Lebesgue지배수렴정리

함수 g가 집합 E에서 적분가능하고, 가측함수열 $\{f_k\}$는 집합 E에서 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$|f_k(t)| \le g(t) \ a.e., \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

만일 집합 E에서 $f_n \to f$ $a.e.$이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

F : Lebesgue지배수렴정리를 적용하는 첫 번째 예제로서, 다음 식을 증명해보기로 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{t}}{1+n^2t^2}\,dt = 0$$

우선, 각 $n(=1, 2, \cdots)$에 대해서 $f_n(t) = \frac{n\sqrt{t}}{1+n^2t^2}$가 다음 식을 만족함을 증명해보아라.

$$f_n(t) \le \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad (t > 0)$$

Y : 아주 쉬워요. 식 $(1-nt)^2 \ge 0$에서 $1+n^2t^2 \ge 2nt$가 성립해요. 따라서, $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$에 대해서, 다음 식이 성립해요.

$$0 \le f_n(t) \le g(t), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

F : 정말 쉬운 문제였다. Lebesgue지배수렴정리를 사용해서, 주어진 문제를 풀 수 있겠니?

D : 제가 풀어볼게요. 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 g(t)dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

함수 $f_n(t)$가 적분가능함수 $g(t)$에 의해서 지배되므로, Lebesgue지배수렴정리에 의해서 다음 식들이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{t}}{1+n^2t^2}\,dt = 0$$

F : 두 번째 예제로, 다음 함수열 $\{f_n\}$을 사용해서 Lebesgue지배수렴정리가 성립하는지를 예증해 보거라.

$$f_n(t) = n\chi_{[1/n^3,\,8/n^3]}(t), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

D : 임의의 $t \in (0, 1]$에 대해서, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$이지요. 그런데, 이 극한은 일양수렴하지 않아요. 다음 식들이 성립해요.

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

또한, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = \frac{7}{n^2}, \quad |f_n(t)| \le g(t) \equiv 2t^{-1/3}\chi_{(0,1]}(t)$$

다음 식이 성립해요.

$$\int_0^1 g(t)\,dt = 3t^{2/3}\Big|_0^1 = 3$$

함수 $f_n(t)$가 적분가능함수 $g(t)$에 의해서 지배되므로, Lebesgue지배수렴정리에 의해서, 다음 식들이 성립해요.

$$0 = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2} = 0$$

즉, Lebesgue지배수렴정리를 예증하였어요.

F : 이 예제에서도 함수열 $\{f_n\}$이 일양수렴하지 않는다. 따라서, Riemann적분에서는 극한과 적분의 순서를 바꿀 수가 없다. 그러나, Lebesgue적분에서는 수렴정리를 사용해서 극한과 적분의 순서를 바꿀 수가 있다.

F : 세 번째 예제로, 다음 함수열 $\{f_n\}$에 대해서는 Lebesgue지배수렴정리를 적용할 수 없음을 보여라.

$$f_n(t) = \chi_{[n,\,n+1)}(t), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

D : 제가 해볼게요. 다음 식들이 성립해요.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_n^{n+1} 1\,dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim f_n = 0 < 1 = \underline{\lim} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$$

함수열 $\{f_n\}$을 지배하면서 적분가능한 함수 $g(t)$를 찾을 수가 없어요. 따라서, Lebesgue지배수렴정리를 적용할 수 없구요.

F : 이제 Lebesgue지배수렴정리를 급수로 확대하기로 하자. <정리 4.4.5>로부터 다음 따름정리가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

따름정리 4.4.1

가측함수들 $f_1, f_2, \cdots$ 각각이 가측집합 E에서 Lebesgue적분가능하고 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(t)|\,dt < \infty$$

함수 $s(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad a.e.$$

이러한 조건 하에서, 함수 s는 집합 E에서 Lebesgue적분가능하고, 또한 다음 식들이 성립한다.

$$\int_E s = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

F : <따름정리 4.4.1>을 적용해서, 다음 식을 증명하기로 하자.

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos\sqrt{t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{(2k)!}$$

Taylor정리를 사용해서, $s(t) = e^{-t}\cos\sqrt{t}$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k e^{-t}$$

우선, 각 $k(=1,2,\cdots)$에 대해서 $f_k(t) = \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k e^{-t}$라 두고, <따름정리 4.4.1>을 적용해서 주어진 문제를 풀어보거라.

Y : 아빠, 제가 풀어볼게요. 감마함수를 사용해서 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$\int_0^\infty |f_k(t)|\,dt = \frac{k!}{(2k)!}$$

따라서, 다음 식이 성립해요.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty |f_k(t)|\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(2k)!} < \infty$$

따라서, $s(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k e^{-t}$는 집합 $E = [0,\infty)$의 거의 모든 점에서 수렴하고, <따름정리 4.4.1>에 의해 $s(t)$는 집합 $E = [0,\infty)$에서 Lebesgue적분가능해요. 또한, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}\cos\sqrt{t}\,dt &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty f_k(t)\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{(2k)!}\end{aligned}$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos\sqrt{t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{(2k)!}$$

F : Lebesgue지배수렴정리를 사용해서, 다음의 Riemann-Lebesgue정리를 증명해보기로 하자.

정리 4.4.6 Riemann-Lebesgue정리

만일 함수 $f(t)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 Lebesgue적분가능하면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\, dt = 0$$

너희들 수준에서 이 정리를 증명하는 것은 어려운 일일 것이다. 그럼에도 불구하고 이 정리를 소개하는 이유는 이 정리가 Fourier해석에서 아주 중요한 역할을 하기 때문이다. 우선, 동연이가 e^{ix}는 무엇을 의미하는지 말해보거라.

D : 여기서 i는 허수로서 $\sqrt{-1}$을 뜻하지요. 함수 e^{ix}의 정의는 다음과 같아요.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

이 식을 Euler식이라고 부르지요. 이 식의 당위성은 Taylor정리로 보일 수 있어요. 실수 x에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k}$$

만일 이 Taylor전개가 복소수 ix에 대해서도 성립한다면, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

F : Taylor전개를 사용한 시도는 훌륭했다. 또한, 미분방정식의 해를 사용해서 Euler식의 정당성을 보일 수도 있다. 이제 Riemann-Lebesgue정리를 증명해보기로 하자. 누가 증명해보겠니?

Y : 제가 해볼게요. 다음과 같이 복소수의 적분을 정의하는 것은 당연해요.

은 다른 정리들의 결론에 비해서 약해요. 즉, Fatou정리의 결과는 등호가 아닌 부등호로서 나타나요. Fatou정리의 장점은 함수 f가 적분가능하지 않을 경우에도 적용할 수 있다는 것이어요. 따라서, Fatou정리는 함수 f가 Lebesgue적분가능한지 여부를 알아보는데 사용할 수 있어요.

Y : Lebesgue지배수렴정리가 강한 가정을 필요로 해요. 즉, $|f_n| \le g$를 만족하며 적분가능한 함수 g가 존재한다는 가정을 필요로 해요. 또한, 결과는 부등호가 아닌 등호로 나타나요.

D : 단조수렴정리에서는 비음함수인 f_n이 극한함수 f에 의해서 유계라는 가정을 필요로 해요. 즉, $0 \le f_n \le f$이라는 가정을 필요로 해요. 특히, 만일 극한함수 f가 적분가능하면, 단조수렴정리는 Lebesgue지배수렴정리의 특수한 경우이지요. 단조수렴정리의 장점은 함수 f가 적분가능하지 않을 경우에도 적용할 수 있다는 것이지요. 따라서, 단조수렴정리도 함수 f가 Lebesgue적분가능한지 여부를 알아보는데 사용할 수 있어요.

4.5 Littlewood의 세 가지 원칙들

F : Littlewood (1944, p. 26)는 함수해석학에 대해서 다음과 같이 언급하였다.

함수해석학에서 요구되는 지식의 정도(the extent of knowledge)는 흔히들 생각하는 것처럼 대단한 것은 아니다. 함수해석학에는 다음과 같은 세 가지 원칙들이 있다.

(a) 임의의 가측집합은 거의(nearly) 유한개의 구간들의 합집합이다.
(b) 임의의 가측함수는 거의(nearly) 연속함수이다.
(c) 임의의 수렴하는 가측함수열은 거의(nearly) 일양수렴한다.

여기서 '거의(nearly)'라는 것은 '거의 모든 점에서 ($a.e.$)'로 해석할 수 있다. 함수해석학의 결과의 대부분은 이 세 가지 원칙들의 직관적 응용이다. 또한, 이 세 가지 원칙들을 잘 이해하고 있는 사람은 함수해석학에 관한 어떠한 문제도 잘 이해할 수 있을 것이다.

D : 첫 번째 원칙 (a)는 본서의 제 3.7절의 결과와 일치해요. 즉, 다음 식들을 만족하는 Borel집합들 F와 G가 존재해요.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$$

다음 식이 성립해요.

$$|e^{-i\lambda t} f(t)| = |f(t)|$$

따라서, Lebesgue지배수렴정리에 의해서 다음 식이 성립해요.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{\lambda\to\infty} e^{-i\lambda t}\,dt$$

그런데, $\lim_{\lambda\to\infty} e^{-i\lambda t}$는 어떻게 구하지?

D : 잘 ~~한다. 풀 수도 없으면서 잘난 체하기는….

F : 그것은 쉬운 문제가 아니고, 그 답을 알기 위해서는 약수렴(weak convergence)이라는 개념을 알아야 한다. 너희들로서는 $\lambda\to\infty$일 때 함수 $e^{-i\lambda t}$가 0으로 약수렴한다고 기억하는 것으로 충분하다. 이 약수렴성에 의해서, Riemann-Lebesgue정리가 성립한다.

다른 방법으로는 Riesz-Fischer정리를 이용해서 이 정리를 증명할 수 있다.

D : 지금까지 배운 것을 정리하면, 단조수렴정리, 유계수렴정리 그리고 Lebesgue지배수렴정리에서는 일양수렴성을 요구하지 않는다는 것이 키포인트군요.

F : 그렇다. 실제로 우리가 다루는 함수들 중에는 불연속함수가 있다. 이러한 불연속함수들을 포함하는 함수공간에서는 일양수렴을 하지 않는 함수열들이 많다. 따라서, Lebesgue적분의 수렴정리들이 유용한 것이다. 이 정리들이 없으면, 함수해석학을 구축할 수 없다.

D : 함수해석학에서는 불연속함수도 포함해서 생각해야 하므로, 일양수렴이 아닌 점별수렴으로 함수열을 다루어야 하는군요.

F : 그렇다. 지금까지 배운 Fatou정리, 단조수렴정리, 유계수렴정리와 Lebesgue지배수렴정리를 비교해보아라.

Y : 이 수렴정리들은 $\lim\int f_n$을 사용해서 $\int \lim f_n$에 관한 어떤 사실을 나타내는 것이죠. 즉, 가측함수열 $\{f_n\}$이 거의 모든 점에서 함수 f로 수렴하면, 적당한 가정 하에서 $\int f_n$으로부터 $\int f$에 관한 어떤 결과를 보여주어요.

D : 이 정리들에서 Fatou정리가 가장 약한 가정을 필요로 해요. 따라서, Fatou정리의 결론

$$F \subset A \subset G, \quad m(G \setminus A) = 0, \quad m(A \setminus F) = 0$$

F : 두 번째 원칙 (b)는 다음과 같은 정리로 설명할 수 있다.

정리 4.5.1

폐구간 $[a, b]$에서 정의된 가측함수 f가 다음 식을 만족한다고 하자.

$$m(\{t \mid f(t) = \infty\} \cup \{t \mid f(t) = -\infty\}) = 0$$

임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서, 다음 식들을 만족하는 계단함수 g와 연속함수 h가 존재한다.

$$m(\{t \mid |f(t) - g(t)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon, \quad m(\{t \mid |f(t) - h(t)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$$

만일 추가적으로 $\alpha \leq f \leq \beta$이면, 다음 식들도 만족하는 계단함수 g와 연속함수 h가 존재한다.

$$\alpha \leq g \leq \beta, \quad \alpha \leq h \leq \beta$$

Y : 정말, 임의의 가측함수는 거의 연속함수라고 할 수 있군요.

F : 세 번째 원칙 (c)의 좀더 강한 형태를 Egoroff정리라고 한다. 그러나, 일반적으로 다음에 제시하는 약한 형태가 사용된다.

정리 4.5.2

가측집합 E가 $m(E) < \infty$를 만족한다고 하자. 만일 집합 E에서 정의되는 가측함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴하면, 임의의 $\varepsilon(>0)$과 $\delta(>0)$에 대해서 다음 명제들을 만족하는 가측집합 $A(\subset E)$와 자연수 N이 존재한다.

(a) $m(A) < \delta$

(b) $t \in A^c$ and $n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

F : Lebesgue지배수렴정리를 증명하는데 <정리 4.5.2>가 필요하다. <정리 4.5.2>에서, 가측함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴한다는 조건 대신에 가측함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 거의 모든 점에서 수렴한다는 조건으로 바꾸어도 정리가 성립한다.

4.6 Lebesgue적분의 수렴정리들의 증명

(본저자의 의견) 이 절에서는 Lebesgue적분의 수렴정리들의 증명에 대해서 살펴본다. 이 절에서 하는 증명들은 개략적인 것들에 불과하다. 본서를 계속 읽기 위해서, 이 증명들을 반드시 이해해야 하는 것은 아니다. 본서를 처음 읽는 독자나 이 증명들에 어려움을 느끼는 독자라면, 이 절들을 뛰어넘어도 큰 문제는 없을 것이다. 그러나, 본서를 두 번째로 읽거나, 좀더 체계적으로 Lebesgue적분을 공부하고 싶은 독자들은 이 절을 정독할 것을 권한다. 또한, 이 증명들에 대한 자세한 내용은 이외숙 · 최병선 (2003)을 참조하라.

F : <정리 4.5.2>는 Lebesgue지배수렴정리를 증명하는데 꼭 필요하다. 누가 <정리 4.5.2>를 증명해 보겠니?

D : 제가 해볼게요. 다음과 같은 집합들을 정의하기로 해요.

$$G_n = \{t \mid |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} \bigcap E, \quad E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n$$

따라서, $E_{N+1} \subset E_N$이어요. 각 $t \in E$에 대해서, $t \notin E_N$인 자연수 N이 존재해요. 즉, $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ 이지요. 제3.4절의 결과들을 사용해서, 다음 식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있어요.

$$\lim_{k \to \infty} m(E_k) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$$

이는 주어진 δ에 대해서, 식 $m(E_N) < \delta$를 만족하는 자연수 N이 존재함을 의미하지요. 즉, 다음 식이 성립해요.

$$m(\{t \in E \mid \text{어떤 } n(\geq N)\text{에 대해서 } |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}) < \delta$$

따라서, 만일 $A = E_N$이라고 하면, $m(A) < \delta$이며 또한 다음 식이 성립해요.

$$A^c = \{t \in E \mid \text{각 } n(\geq N)\text{에 대해서 } |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon\}$$

F : 좋은 증명이었다. 앞에서도 언급했듯이, <정리 4.5.2>에서 가측함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴한다는 조건 대신에 가측함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 거의 모든 점에서 수렴한다는 조건으로 바꾸어도 이 정리는 성립한다. 영상이가 <정리 4.4.4>의 유계수렴정리를 증명해보겠니?

Y : 네. <정리 4.5.2>에 의해서, 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 명제들을 만족하는 자연수 N과 가측집합 $A(\subset E)$가 존재해요.

(a) $m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$

(b) $n \geq N$ and $t \in E \cap A^c \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2m(E)}$

다음 식들이 성립해요.

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leq \int_E |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{A^c \cap E} |f_n - f|$$

따라서, $n \geq N$에 대해서 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \\
&\leq \int_A |f_n| + \int_A |f| + \frac{\varepsilon}{2m(E)}\, m(E) \\
&< M\frac{\varepsilon}{4M} + M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2m(E)}\, m(E) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E f_n \to \int_E f$$

F : 잘 증명했다. 그럼, 이번에는 동연이가 <정리 4.4.2>의 Fatou정리를 증명해보아라.

D : 영집합에서의 Lebesgue적분값은 0이어요. 따라서, 일반성을 잃지 않고, 가측함수열 $\{f_n\}$이 집합 E의 모든 점에서 점별수렴한다고 가정해요. 집합 A는 $m(A) < \infty$를 만족하고, 집합 E에서 비음이고 유계인 가측함수 h가 다음 식들을 만족한다고 가정해요.

$$h(t) \le f(t), \quad (t \in E)$$
$$h(t) = 0, \quad (t \notin A)$$

또한, 함수 $h_n = \min\{h, f_n\}$을 정의해요. 만일 M이 함수 h의 상한이면, 함수열 $\{h_n\}$은 다음 식들을 만족해요.

$$|h_n(t)| \le M, \quad (t \in E)$$
$$h_n(t) = 0, \quad (t \notin E \cap A)$$
$$h_n(t) \to h(t), \quad (t \in E \cap A)$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_E h = \int_{E\cap A} h = \lim \int_{E\cap A} h_n \le \underline{\lim} \int_{E\cap A} f_n \le \underline{\lim} \int_E f_n$$

여기서 두 번째 등호는 <정리 4.4.4>의 유계수렴정리에 의해서 성립하고, 첫 번째 부등호는 함수 $h_n = \min\{h, f_n\}$의 정의에 의해서 성립해요.

따라서, 다음 식이 성립해요.

$$\sup_{k \le f} \int_E h \le \underline{\lim} \int_E f_n$$

또한, Lebesgue적분의 정의에 의해서, 다음 식이 성립해요.

$$\sup_{k \le f} \int_E h = \int_E f$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\int_E \lim f_n = \int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n$$

F : 잘 증명하였다. 그럼, 이번에는 영상이가 <정리 4.4.3>의 단조수렴정리를 증명해보아라.

Y : 각 n에 대해서, $f_n \le f$ $a.e.$이므로, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E f \ge \int_E f_n$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E f \ge \overline{\lim} \int_E f_n$$

<정리 4.4.2>의 Fatou정리를 이용해서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있어요.

$$\int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n \le \overline{\lim} \int_E f_n \le \int_E f$$

따라서, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n$$

F : 잘 증명했다. 그럼, 이번에는 동연이가 <정리 4.4.5>의 Lebesgue지배수렴정리를 증명해보아라.

D : 함수 $g - f_n$이 비음이므로, <정리 4.4.2>의 Fatou정리에 의해서 다음 식이 성립해요.

$$\int_E (g - f) \le \underline{\lim} \int_E (g - f_n)$$

집합 E의 거의 모든 점에서 $|f| < g$이므로, <정리 4.3.4>에 의해서 f도 적분가능해요. 따라서, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E g - \int_E f \le \int_E g - \overline{\lim} \int_E f_n$$

즉, 식 $\int_E f \ge \overline{\lim} \int_E f_n$이 성립해요. 같은 방법을 $g - f_n$ 대신 $g + f_n$에 적용하면, 식 $\int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n$이 성립함을 알 수 있어요. 따라서, 다음 식이 성립해요.

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

F : 잘 증명했다. 만일 가측집합 E가 유계이면, Lebesgue측도의 가산가법성을 사용해서 Lebesgue지배수렴정리를 증명할 수 있다. 이 증명은 Lebesgue지배수렴정리를 좀더 직관적으로 볼 수 있도록 한다. 우선, 다음 식을 정의하자.

$$l_n(t) = |f(t) - f_n(t)|$$

아주 작은 $\varepsilon > 0$에 대해서, 집합 E를 다음과 같이 분해하자.

$$E_1 = \{t \in E \mid l_n(t) < \varepsilon,\ n = 1, 2, \cdots\}$$
$$E_2 = \{t \in E \mid l_1(t) \geq \varepsilon,\ l_n(t) < \varepsilon,\ n = 2, 3, \cdots\}$$
$$\vdots$$
$$E_k = \{t \in E \mid l_1(t) \geq \varepsilon, \cdots, l_{k-1}(t) \geq \varepsilon,\ l_n(t) < \varepsilon,\ n = k, k+1, \cdots\}$$
$$\vdots$$

만일 $i \neq k$이면, $E_i \cap E_k = \emptyset$ 임을 증명할 수 있겠니?

Y : 그건 간단해요. 일반성을 잃지 않고, $i < k$라고 가정해요. 만일 $t_0 \in E_i \cap E_k$이면, $t_0 \in E_i$에 의해서 $l_i(t_0) < \varepsilon$이며, 또한 $t_0 \in E_k$에 의해서 $l_i(t_0) \geq \varepsilon$이어요. 이는 모순이지요.

F : 그렇다. 집합들 $E_1, E_2, \cdots$ 은 서로소이다. 다음 집합을 정의하자.

$$F_n = E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$$

집합 E가 유계라고 가정하였으므로, 다음 식이 성립한다.

$$m(F_n) = m(E) - \sum_{k=1}^{n} m(E_k)$$

또한, Lebesgue측도의 가산가법성으로부터, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = m(E)$임을 알 수 있다. 따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = 0$$

이 식을 이용해서, 집합 E가 유계인 경우에 Lebesgue지배수렴정리가 성립함을 보일 수 있겠니?

D : 아빠, 제가 해볼게요. 다음 식들이 성립해요.

$$\int_{F_n} l_n(t)\,dt = \int_E l_n(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} l_n(t)\,dt$$

$$0 \le \int_{E_k} l_n(t)\,dt < \varepsilon m(E_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} l_n(t)\,dt < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} m(E_k) \le \varepsilon m(E)$$

또한, 다음 식들이 성립해요.

$$0 \le \int_{F_n} l_n(t)\,dt \le \int_{F_n} \{|f(t)| + |f_n(t)|\}\,dt \le 2\int_{F_n} g(t)\,dt$$

앞에서 보였듯이 $\lim_{n\to\infty} m(F_n) = 0$이므로, 다음 식이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{F_n} g(t)\,dt = 0$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{F_n} l_n(t)\,dt = 0$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E l_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} l_n(t)\,dt + \int_{F_n} l_n(t)\,dt \right) \le \varepsilon m(E)$$

이 식과 <정리 4.3.3>에 의해서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있어요.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \int_E f_n(t)\,dt - \int_E f(t)\,dt \right| &\le \lim_{n\to\infty} \int_E |f(t) - f_n(t)|\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E l_n(t)\,dt \\ &\le \varepsilon m(E) \end{aligned}$$

임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 이 식들이 성립하므로, 집합 E가 유계인 경우에 다음 식이 성립해요.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(t)\,dt = \int_E f(t)\,dt$$

F : 아주 훌륭한 증명이었다. Lebesgue수렴정리는 함수열 $\{f_n\}$이 적분가능한 함수 g에 의해서 지배된다는(dominated) 조건을 필요로 한다. 그러나, 이 정리의 가정을 좀더 약화시킬 수가 있다. 즉, Lebesgue지배수렴정리의 증명에서 g를 적당한 함수열 $\{g_n\}$으로 바꾸면, 다음과 같은 일반화된 Lebesgue지배수렴정리를 얻을 수 있다.

정리 4.6.1 일반화된 Lebesgue지배수렴정리

집합 E에서 Lebesgue적분가능한 함수열 $\{g_k\}$가 $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ $a.e.$라고 가정하자. 함수 g가 집합 E에서 적분가능하고, $\lim_{n\to\infty}\int g_n = \int g$라고 가정하자. 또한, 가측함수열 $\{f_k\}$가 집합 E에서 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$|f_k(t)| \le g_k(t) \ a.e., \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

만일 집합 E에서 $f_n \to f$ $a.e.$이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n$$

제 5 장

복습과 발전

(본저자의 의견) 이 장에서는 앞에서 배운 내용을 복습하고, 중요한 정리들을 증명하고자 한다. 따라서, 이 장의 내용은 앞의 장들과는 달리 약간 어려운 내용이다. 본서를 처음 읽는 독자는 이 장을 뛰어넘어도 다음 장을 읽는데 큰 문제는 없을 것이다. 그러나, 본서를 두 번째로 읽거나, 좀더 체계적으로 실해석학이나 함수해석학을 공부하고 싶은 독자들은 이 장을 정독할 것을 권한다. 이 장에서 다루는 문제들에 대한 좀더 자세한 내용은 이외숙 · 최병선 (2003)을 참조하라.

5.1 가산가법성

F : 너희들은 Lebesgue적분에서 가장 중요한 정리가 무엇이라고 생각하니?

D : 응용을 위해서 가장 중요한 정리는 Lebesgue지배수렴정리이고, 이론전개를 위해서 가장 중요한 정리는 Lebesgue측도의 가산가법성일 것 같아요.

F : 나도 그렇게 생각한다. 특히, Lebesgue측도가 가산가법성을 갖는다는 것이 Jordan측도와의 큰 차이점이다. 가산가법성 없는 Lebesgue측도는 생각할 수 없고, 가산가법성이 없다면 Lebesgue적분을 사용할 필요도 없다. 이 절에서는 Lebesgue측도의 가산가법성을 증명하고자 한다. 이 증명이 Lebesgue적분을 이해하는데 반드시 필요한 것은 아니

지만, 앞으로 진지하게 해석학을 공부하는데 도움이 되리라고 생각한다. 지금까지 배운 것을 정리해서, 측도란 어떻게 정의되어야 할지를 말해보거라.

D : 제가 말해볼게요. 어떤 구간 I의 길이는 이 구간의 양끝 점들의 차이인 $l(I)$로 정의되는 것이 당연해요. 길이는 어떤 집합족에 속하는 각 집합에 실수를 대응시키는 집합함수의 한 예이고, 이 경우에 정의역은 모든 구간들의 모임이지요. 측도는 길이의 개념을 구간들보다 더 복잡한 집합들로 확장한 것이어요. 한 예로, 개집합의 길이는 이 개집합을 구성하는 개구간들의 길이들의 합으로 정의할 수 있어요. 그러나, 개집합들의 모임은 우리의 목적에 비해서 지나치게 제한되어 있어요. 실수집합 R의 임의의 부분집합 E에 실수 $d(E)(\geq 0)$를 대응시키는 집합함수 d를 구축하는 것이 우리의 목적이어요. 이 $d(E)$를 E의 측도값이라고 해요. 이상적으로 말하면, 측도 d는 다음 성질들을 만족해야 해요.

(a) 실수집합 R의 각 부분집합 E에 대해 $d(E)$가 정의된다.

(b) 임의의 구간 I에 대해서, $d(I) = l(I)$이다.

(c) 만일 $\{E_n\}$이 서로소 집합들이면, 다음 식이 성립한다.

$$d(\bigcup_n E_n) = \sum_n d(E_n)$$

(d) 만일 집합 E의 측도값 $d(E)$가 존재하면, 집합 $E + y = \{x + y | x \in E\}$의 측도값도 $d(E)$이다. 즉, 측도 d는 이동(translation)에 대해 불변이다.

F : 아주 잘 설명했다. 그러나, 유감스럽게도 이 네 가지 성질들을 만족하는 집합함수 d를 구축하는 것은 불가능하다. 또한, 세 가지 조건들 (a), (b), (c)를 만족하는 집합함수의 존재여부도 알려지지 않았다. 따라서, 길이 l의 개념을 확장하는 집합함수를 만들기 위해서는, 이 네 가지 조건들 중에서 하나는 포기해야 한다. 길이 l을 확장하는 개념으로서의 집합함수라면, 조건들 (b), (c) 그리고 (d)를 반드시 만족해야 할 것이다. 따라서, 지금부터는 조건 (a)를 포기하기로 하자. 즉, 실수집합 R의 모든 부분집합 E에 대해서 $d(E)$가 정의되는 집합함수 d를 찾는 것이 아니라, 조건들 (b), (c), (d)를 만족하는 집합함수들 중에서 가능한 한 많은 부분집합들에 대해서 측도값이 정의되는 집합함수 d를 찾는 것이다. 조건들 (b)와 (d)는 너무나 당연한 조건들이다. 너희들은 조건 (c)의 중요성을 알겠니?

Y : 조건 (c)가 아빠가 계속 강조하시는 가산가법성이어요. 집합함수 d가 정의되는 부분집

합들의 모임이 σ-대수이면, 측도를 구축하는데 편리할 것이어요.

F : 그렇다. 만일 집합함수 d의 정의역이 실수집합들의 σ-대수이고 치역이 $[0, \infty]$이고, 또한 만일 서로소 집합들 $\{E_n\}$에 대해서 조건 (c)가 만족되면, 집합함수 d를 가산가법측도(countably additive measure)라고 한다. 동연아, 열린덮개(open covering)가 무엇인지 아니?

D : 네. 실수집합 R의 부분집합 A에 대해서, 식 $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$를 만족하는 개구간들의 모임 $\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$을 열린덮개라 불러요.

F : 그렇다. 열린덮개를 사용해서, 집합 A의 외측도 $m^*(A)$를 정의해보거라.

Y : 제가 해보겠어요. 집합 A의 외측도 $m^*(A)$를 다음과 같이 정의해요.

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

즉, 집합 A를 포함하는 열린덮개 $\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 중에서 $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$의 가장 작은 값을 외측도 $m^*(A)$라고 해요.

F : 맞습니다. 맞고요.

5.2 Carathéodory정리

F : 앞에서도 언급했듯이, 외측도 m^*는 실수집합 R의 모든 부분집합들에 대해서 정의된다. 그러나, 외측도 m^*는 가산가법성을 갖지 않는다. 지금부터는 외측도 m^*가 가산가법성을 갖도록 외측도를 정의하는 부분집합들의 모임을 축소해보자. 이러한 목표를 달성하기 위한 가장 좋은 방법은 다음과 같은 Carathéodory정리를 사용하는 것이다.

정리 5.2.1 Carathéodory정리

집합 E가 가측이기 위한 필요충분조건은 임의의 집합 A에 대해서 다음 식이 성립하는 것이다.

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

이 정리를 증명하기 전에, 외측도 m^*를 사용해서 Lebesgue가측을 설명해보아라.

D : 제가 설명해보겠어요. 집합 E를 포함하는 폐구간을 I를 선택하면, 집합 E의 Lebesgue 내측도는 $m_*(E) = m^*(I) - m^*(I \cap E^c)$이지요. 여기서 $m^*(I) = l(I)$이어요. 만일 $m^*(E) = m_*(E)$이면, 집합 E가 Lebesgue가측이라 하고 이 Lebesgue측도값을 $m(E)$로 표기해요. 특히, $m(I) = l(I)$이어요. 따라서, 집합 E가 Lebesgue가측이기 위한 필요충분조건은 다음과 같아요.

$$m(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c) \tag{5.2.1}$$

또한, 외측도는 Lebesgue내측도보다 작지 않으므로, 항상 다음 식이 성립해요.

$$m(I) \leq m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$$

따라서, 집합 E가 가측이기 위한 필요충분조건은 다음과 같아요.

$$m(I) \geq m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c) \tag{5.2.2}$$

F : 잘 설명했다. 이러한 성질을 확장한 것이 Carathéodory정리이다. 다음 식들이 성립한다.

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c), \quad (A \cap E) \cap (A \cap E^c) = \emptyset$$

집합 A의 열린덮개 $\{I_k\}$에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad A \cap E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap E), \quad A \cap E^c \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap E^c)$$

만일 $I_k \cap E$와 $I_k \cap E^c$ 각각의 열린덮개를 $\{I_{k,n}^{(1)} \mid n = 1, 2, \cdots\}$와 $\{I_{k,n}^{(2)} \mid n = 1, 2, \cdots\}$라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$A \subset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}^{(1)} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}^{(2)} \right)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$m^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(2)}) \right\}$$

따라서, 집합 E의 Lebesgue가측여부에 관계없이, 다음 식이 성립한다.

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{5.2.3}$$

식 (5.2.3)에 의해서, Carathéodory정리를 다음과 같이 쓸 수 있다.

따름정리 5.2.1

집합 E가 가측이기 위한 필요충분조건은 임의의 집합 A에 대해서 다음 식이 성립하는 것이다.

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

F : 이제 Carathéodory정리를 증명해보아라.

Y : 소자가 해보겠습니다. 만일 $m^*(A) = \infty$이면, Carathéodory정리가 성립함은 명백해요. 따라서, $m^*(A) < \infty$인 경우만을 다루기로 하겠습니다. 만일 E가 가측이면, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(2)}) \right\} \\ &\geq \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(1)}) \right\} + \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{k,n}^{(2)}) \right\} \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

만일 임의의 집합 A에 대해서 $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$이면, 집합 E를 포함하는 폐구간 I에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$m^*(E) \leq m^*(I) - m^*(I \cap E^c) = m_*(E)$$

여기서 마지막 등호는 Lebesgue내측도의 정의에 의해서 성립해요. 따라서, E는 가측이어요. 이로써 소자가 Carathéodory정리의 증명을 끝냈습니다.

F : 그래, 이 아빠를 흡족하게 하는 증명이었노라. 문헌에 따라서는 Carathéodory정리의 내용을 Lebesgue가측의 정의로 사용하기도 한다. Carathéodory정리를 적용해서 다음 정리를 증명해보아라.

정리 5.2.2

다음 명제들이 성립한다.

(a) 만일 $m^*(E) = 0$이면, 집합 E는 가측이다.

(b) 만일 E가 가측이면, E^c도 가측이다.

(c) 만일 E_1과 E_2가 가측이면, 합집합 $E_1 \bigcup E_2$도 가측이다.

D : Carathéodory정리에 의해서 (b)가 성립함은 당연해요. 이제 (a)를 증명해볼게요. 임의의 집합 A에 대해서 $A \bigcap E \subset E$이므로, 다음 식이 성립해요.

$$0 \leq m^*(A \bigcap E) \leq m^*(E) = 0$$

또한, 식 $A \supset A \bigcap E^c$에 의해서, 다음 식이 성립해요.

$$m^*(A) \geq m^*(A \bigcap E^c) = m^*(A \bigcap E^c) + m^*(A \bigcap E)$$

<따름정리 5.2.1>에 의해서, 집합 E는 가측이어요.

Y : 제가 (c)를 증명해볼게요. 집합 E_2가 가측이므로, 임의의 집합 A에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$m^*(A \bigcap E_1^c) = m^*(A \bigcap E_1^c \bigcap E_2) + m^*(A \bigcap E_1^c \bigcap E_2^c)$$

또한, 다음 식이 성립해요.

$$A \bigcap (E_1 \bigcup E_2) = (A \bigcap E_1) \bigcup (A \bigcap E_2 \bigcap E_1^c)$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$m^*(A \bigcap [E_1 \bigcup E_2]) \leq m^*(A \bigcap E_1) + m^*(A \bigcap E_2 \bigcap E_1^c)$$

따라서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있어요.

$$
\begin{aligned}
& m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]^c) \\
&= m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&\le m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\
&= m^*(A)
\end{aligned}
$$

여기서 끝에서 두 번째 등호는 집합 E_2의 가측성에 의한 것이고, 마지막 등호는 집합 E_1의 가측성에 의한 것이지요. 따라서, <따름정리 5.2.1>에 의해서, 집합 $E_1 \cup E_2$도 가측이어요. 이로써, 소자가 (c)의 증명을 끝냈습니다.

5.3 가측집합과 σ-대수

F : <정리 5.2.2>의 (b)와 (c)에 의해서, 가측집합들의 집합족은 대수임을 알 수 있다. 우리의 목적은 가측집합들의 집합족이 σ-대수임을 보이는 것이다. 우선, 외측도 m^*는 다음과 같이 가산준가법성(countable subadditivity)을 갖음을 증명해보아라.

정리 5.3.1

실수집합 R의 부분집합들 $A_1, A_2, \cdots$에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

Y : 제가 해보겠습니다. 어떤 k에 대해서 $m^*(A_k) = \infty$이면, <정리 5.3.1>의 부등식이 성립해요. 따라서, 지금부터는 모든 k에 대해서 $m^*(A_k) < \infty$라고 가정하기로 해요. 임의의 $\varepsilon(>0)$과 각 k에 대해서 다음 식들을 만족하는 개구간들 $I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots$이 존재해요.

$$A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{k,i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{k,i}) < m^*(A_k) + \frac{1}{2^k}\varepsilon$$

즉, $\{I_{k,i} \mid k=1,2,\cdots,\ i=1,2,\cdots\}$은 가산개의 개구간들의 모임이며, 또한 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$의 열린덮개이지요. 따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{k,i}) < \sum_{k=1}^{\infty}\left\{m^*(A_k) + \frac{1}{2^k}\varepsilon\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon$$

즉, 다음 식이 성립해요.

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

이로써 <정리 5.3.1>의 증명이 끝났습니다.

F : 잘 증명했다. <정리 5.3.1>에서는 등호가 아닌 부등호가 성립했다. 따라서, 이 성질을 가산가법성이 아닌 가산준가법성이라 한다. 다음 정리는 아주 자명해보인다. 동연이가 이 정리를 수학적 귀납법을 사용해서 증명해보아라.

정리 5.3.2

만일 유한개의 가측집합들 $E_1, E_2, \cdots, E_n$이 서로소이면, 임의의 집합 A에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n} E_k]) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

D : 우선, $n=1$인 경우에는 당연히 <정리 5.3.2>의 등식이 성립해요. 다음으로, $n-1$개의 서로소 집합들 $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$에 대해서 이 등식이 성립한다고 가정하기로 해요. 이 가정 하에서, n개의 서로소 집합들 $E_1, E_2, \cdots, E_n$에 대해서 이 등식이 성립함을 증명하겠어요. 우선, 다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \cap E_n = A \cap E_n$$

$$A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \cap E_n^c = A \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)$$

집합 E_n이 가측이므로, 다음 식들이 성립해요.

$$
\begin{aligned}
& m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n} E_k]) \\
&= m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n} E_k] \cap E_n) + m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n} E_k] \cap E_n^c) \\
&= m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k]) \\
&= m^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)
\end{aligned}
$$

여기서 세 번째 등호는 가정에 의해서 성립해요. 이로써 소녀가 <정리 5.3.2>의 증명을 끝냈사와요.

F : 아주 잘 증명했다. 이제 이 절의 목적인 다음 정리를 증명하기로 하자.

정리 5.3.3

가측집합들의 집합족은 σ-대수이다.

Y : 제가 마무리를 하겠어요. <정리 5.2.2>에 의해서, 가측집합들의 집합족이 대수임을 알 수 있어요. 따라서, 가측집합들 $E_1, E_2, \cdots$의 합집합 E가 가측임을 보이면 증명이 끝납니다. 지금부터 E가 가측성임을 증명하겠습니다. <정리 5.2.2>에 의해서, 각 n에 대해 $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$이 가측집합이고, 또한 $F_n^c \supset E^c$이지요. 다음 식들을 정의하기로 해요.

$$G_1 = F_1, \quad G_k = F_k \setminus F_{k-1}, \ (k = 2, 3, \cdots)$$

<정리 5.2.2>에 의해서, $G_1, G_2, \cdots$는 가측이어요. 다음 식들이 성립해요.

$$G_i \cap G_k = \emptyset, \ (i \neq k), \quad F_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k, \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} m^*A &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap G_k) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

여기서 마지막 등호는 <정리 5.3.2>에 의해서 성립해요. 만일 $n \to \infty$ 라면, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap G_k) + m^*(A \cap E^c) \\ &\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

여기서 마지막 부등호는 외측도의 가산준가법성에 의해서 성립해요. 따라서, E는 가측이지요. 이로써 <정리 5.3.3>의 증명이 끝났습니다.

5.4 가산가법성의 증명

F : 자~! 지금부터 Lebesgue측도의 가산가법성을 증명하기로 하자. 동연이가 Lebesgue측도의 가산가법성을 다시 설명해보아라.

D : Lebesgue측도 m의 가산가법성은 다음과 같아요. 만일 가산개의 가측집합들 E_1, E_2, …가 서로소이면, 다음 식이 성립한다.

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

F : <정리 5.3.3>에서, 가측집합들의 집합족은 σ-대수임을 증명했다. 따라서, $E_1, E_2, \cdots$가 가측집합들이면, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$도 가측집합이다. 따라서, Lebesgue측도 m의 가산가법성은 다음과 같은 외측도의 가산가법성과 동일하다.

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

누가 이 등호가 성립함을 증명해보겠니?

Y : 제가 해볼게요. <정리 5.3.3>에 의해서, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$도 가측이지요. 제5.3절에서와 마찬가지로, 다음 식들을 정의하기로 해요.

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad G_1 = F_1, \quad G_k = F_k \setminus F_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

<정리 5.3.3>의 증명에서 알 수 있듯이, 임의의 집합 A에 대해서 다음 식이 성립해요.

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap G_k) + m^*(A \cap E^c)$$

만일 $A = E$라면, $G_k \subset A$이며 다음 식들이 성립해요.

$$A \cap G_k = E \cap G_k = G_k, \quad A \cap E^c = E \cap E^c = \emptyset$$

따라서, 다음 식이 성립함을 알 수 있어요.

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k)$$

가측집합들 $E_1, E_2, \cdots$은 서로소이므로, $G_k = E_k$, $(k = 1, 2, \cdots)$이지요. 따라서, 다음 식이 성립해요.

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

또한, <정리 5.3.1>의 가산준가법성에 의해서, 다음 식이 성립해요.

$$m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

마지막 두 부등식들로부터, Lebesgue측도 m이 가산가법성을 가짐을 알 수 있어요.

F : 다시 한 번 Lebesgue측도의 가산가법성의 중요성을 강조하면 다음과 같다. 제4.6절에서 알 수 있듯이, Lebesgue측도의 가산가법성을 이용해서 Lebesgue지배수렴정리를 증명할 수 있다. 또한, Lebesgue지배수렴정리는 Lebesgue적분의 가장 중요한 정리이다. 따라서, 가산가법성이 Lebesgue적분을 사용하는 주된 원인이 된다.

제 6 장

Lebesgue측도와 확률론

(본저자의 의견) 이 장의 목적은 앞에서 배운 내용을 바탕으로 확률론의 기초를 설명하는 것이다. 즉, 지금까지 배운 내용을 응용해보는 것이다. 본서를 처음 읽는 독자는 이 장을 읽지 않아도 좋다. 그러나, 본서를 두 번째로 읽거나, Lebesgue적분을 응용하고자 하는 독자들은 이 장을 정독할 것을 권한다. 이 장에서 다루는 문제들에 대한 좀더 자세한 내용은 이성백 (2002)을 참조하라.

6.1 확률측도

F : 이 장에서는 Lebesgue측도를 확률론에 연결시키고자 한다. 앞에서도 여러 번 언급하였듯이, 실제적으로 Lebesgue측도가 가장 많이 쓰이는 곳이 함수해석학과 확률론이다. 날이 갈수록, 다양한 분야들에서 확률론이 중요해지고 있다. 이 장에서는 고등학교에서 배운 확률개념을 Lebesgue측도론을 사용해서 공리적(axiomatic) 확률개념으로 발전시키고자 한다.

Y : 갑자기 머리가 아파질 것 같아요. 아빠! 확률론은 어려운 것이어요.

F : 아빠는 그렇게 생각하지 않는다. 아빠는 처음 확률론을 접하는 사람이 순수수학적으로 확률론에 접근하는 것은 좋은 방법이 아니라고 생각한다. 확률론이라는 것 자체가 현실

적인 문제를 다루는 것이 아니겠니? 어떤 나무를 보고 세 살짜리 어린이가 그린 그림과 식물학과 대학생이 그린 그림은 달라야 할 것이다. 아직 눈(eye)도 완전히 발달되지 않은 어린이가 보는 것은 나무 전체의 윤곽 정도일 것이다. 그러나, 식물학과 대학생은 기둥, 잎, 줄기, 가지 심지어는 엽록소까지 생각하면서 그림을 그리겠지. 따라서, 각자의 눈높이에서 확률에 대해 배운다면, 확률론이 그렇게 어렵지는 않을 것이다.

D : 그러면, 우리는 Lebesgue측도를 아는 눈높이에서 확률론을 배우겠네요.

F : 그렇다. 여기서는 그러한 관점에서 확률론을 접근한다. 즉, 가장 높은 수준에서 확률론을 접근한다는 말이지. 그러나, 여기서 확률론 전체를 다루는 것은 아니고, 단지 확률론의 기본이 되는 확률측도에 대해서 공리적 접근을 한다는 것이다. 확률론에 대한 자세한 내용은 이성백 교수님이 쓰신 『확률론』을 참조해라.

Y : 아! 하영이와 하원이의 아빠가 쓰신 책이요?

F : 그렇다. 너희들이 조만간 그 책을 읽을 수 있기를 기대한다. 통계학 시간에 확률에 대해서 배울 때는 우선 확률밀도함수(probability density function)를 배우고 다음에 누적분포함수(probability distribution function)를 배운다. 그러나, 확률론에서는 먼저 누적분포함수를 배우고 그 다음에 확률밀도함수를 배운다. 이 누적분포함수는 확률측도(probability measure)로부터 출발한다. 앞에서 배운 것을 복습해가면서, 확률측도를 정의하기로 하자. 우선, 동연이가 σ-대수의 정의를 다시 복습해보거라.

D : 집합 Ω의 부분집합들로 이루어진 집합족 $\mathbf{B}$가 다음 명제들을 만족하면, $\mathbf{B}$를 σ-대수라고 해요.

(a) $\phi \in \mathbf{B}$

(b) $E \in \mathbf{B} \Rightarrow E^c \in \mathbf{B}$

(c) $E_1, E_2, \cdots \in \mathbf{B} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathbf{B}$

F : 영상아, 측도공간이란 무엇이지?

Y : 만일 집합 Ω, Ω의 부분집합들로 이루어진 σ-대수 $\mathbf{B}$, 그리고 $\mathbf{B}$에 속한 임의의 부분집합에 대해서 비음인 수를 할당하는 집합함수 μ가 다음 조건들을 만족하면, μ를 측도(measure)라고 하고 $(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$를 측도공간(measure space)이라고 해요.

(a) $\mu(\phi) = 0$

(b) 만일 $\{E_i \mid i=1, 2, \cdots\}$가 서로소인 가측집합들이면, $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$가 성립한다.

F : 잘 정리했다. 여기서 조건 (b)는 측도의 가산가법성임을 상기해라. 이성백(2002, 제2장)에서 알 수 있듯이, 집합 Ω와 Ω의 부분집합들로 이루어진 σ-대수 $\mathbf{B}$의 쌍 $(\Omega, \mathbf{B})$를 가측공간(measurable space)이라고 한다. 만일 Ω의 부분집합 A에 대해서 $A \in \mathbf{B}$이면, 집합 A를 $\mathbf{B}$에 대한 가측집합(measurable set with respect to $\mathbf{B}$)이라고 한다. 이제 확률측도를 정의할 때가 되었다. 확률측도의 특징은 무엇일까?

D : 확률측도 μ는 측도의 특별한 경우이어요. 또한, 확률은 0과 1 사이의 값이므로, 반드시 $\mu(\Omega) = 1$을 만족해야 해요.

F : 그렇다. 다음과 같이 확률측도를 정의한다.

정의 6.1.1 집합 Ω의 부분집합들의 σ-대수 $\mathbf{F}$로 이루어진 가측공간 $(\Omega, \mathbf{F})$의 $\mathbf{F}$ 위에서 정의된 함수 P가 다음 조건들을 만족할 때, P를 $\mathbf{F}$ 위에서의 확률측도라 한다.

(a) $E \in \mathbf{F} \Rightarrow P(E) \geq 0$

(b) 만일 가측집합들 $\{E_k \in \mathbf{F} \mid k=1, 2, \cdots\}$이 서로소이면, 다음 식이 성립한다.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$$

(c) $P(\Omega) = 1$

이 경우에, $(\Omega, \mathbf{F}, P)$를 확률공간(probability space), Ω를 표본공간(sample space), $\omega \in \Omega$를 표본점(sample point), 가측집합 $E(\in \mathbf{F})$를 사건(event), $P(E)$를 사건 E가 일어날 확률 또는 E의 확률이라고 한다. □

Y : <정의 6.1.1>에서 확률측도 P는 유한측도(finite measure)이며, 가산가법성을 갖음을 확인할 수 있군요.

F : 그렇다. 확률측도는 유한측도일 따름이다. 따라서, 확률측도는 보편적인 측도가 갖는 성

질들을 갖는다. 복습하는 의미에서, 확률공간 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$의 확률측도 P의 성질들을 하나씩 말해보렴.

D : 확률측도 P의 가산가법성에 의해서 다음 식이 성립해요.

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

따라서, $P(\varnothing) = 0$이어요.

Y : 서로소인 가측집합들 $E_1, E_2, \cdots, E_n$에 대해서, 확률측도 P의 가산가법성에 의해서 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=0}^{n} E_k) &= P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \cup \varnothing \cup \varnothing \cdots) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(E_k) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \end{aligned}$$

따라서, 확률측도 P는 유한가법성도 갖지요.

D : 확률측도 P의 유한가법성에 의해서 다음 식이 성립해요.

$$1 - P(E) = P(E^c)$$

따라서, 다음 명제가 성립해요.

$$E \in \mathbf{F} \;\Rightarrow\; 0 \le P(E) \le 1$$

F : 이제 실력들이 많이 늘었구나. 다음 정리는 확률론에서 매우 중요한 정리이다.

정리 6.1.1

만일 가측집합열 $\{E_n\}$이 $E_n \supset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족하고, 또한 만일 $\lim_{n \to +\infty} E_n = E$이면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \to +\infty} P(E_n) = P(E)$$

F : <정리 6.1.1>을 체계적으로 증명해보기로 하자. 우선, 영상이가 다음 식을 증명해보아라.

$$P(E \cup F) + P(E \cap F) = P(E) + P(F) \tag{6.1.1}$$

Y : Yes, sir! 다음 식들이 성립해요.

$$E \cup F = E \cup (F \cap E^c),\ E \cap (F \cap E^c) = \emptyset$$

따라서, 다음 식이 성립하지요.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F \cap E^c)$$

또한, 다음 식들이 성립해요.

$$(F \cap E^c) \cup (F \cap E) = F, \quad (F \cap E^c) \cap (F \cap E) = \emptyset$$

따라서, 다음 식이 성립합니다.

$$P(F) = P(F \cap E^c) + P(F \cap E)$$

이 식들에 의해서, 식 (6.1.1)이 성립함을 알 수 있어요.

F : 동연이가 다음 명제가 성립함을 증명해보거라.

$$E \subset F \ \Rightarrow \ P(E) = P(F) - P(F \cap E^c) \tag{6.1.2}$$

D : 만일 $E \subset F$이면, 다음 식들이 성립해요.

$$E \cup (F \cap E^c) = F, \ E \cap (F \cap E^c) = \emptyset$$

이 식들과 식 (6.1.1)에 의해서, 식 (6.1.2)가 성립함을 알 수 있어요.

F : 이제 <정리 6.1.1>을 증명해보아라.

Y : 제 차례군요. 다음 식을 정의하기로 해요.

$$F_n = E_n \cap E_{n+1}^c, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

다음 식들이 성립함은 자명해요.

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_1 \cap E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \quad F_i \cap F_k = \varnothing, \ (i \neq k)$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\begin{aligned} P(E_1) - P(E) &= P(E_1 \cap E^c) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k \cap E_{k+1}^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \{P(E_k) - P(E_{k+1})\} \\ &= P(E_1) - \lim_{n \to \infty} P(E_n) \end{aligned}$$

여기서 첫 번째 등호와 네 번째 등호는 식 (6.1.2)에 의해서 성립해요. 따라서, 다음 식이 성립합니다.

$$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P(E)$$

F : <정리 6.1.1>의 특수한 경우를 생각해보자. 만일 가측집합열 $\{E_n\}$이 $E_n \supset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족하고, 또한 만일 $\lim_{n \to \infty} E_n = \varnothing$ 이면, <정리 6.1.1>에 의해서 $\lim_{n \to \infty} P(E_n) = 0$이다. 이를 확률의 연속성공리(axiom of continuity)라고 한다. 만일 <정리 6.1.1>에서 E_n 대신 E_n^c를 대입하면, 다음 따름정리를 얻는다.

따름정리 6.1.1

만일 가측집합열 $\{E_n\}$이 $E_n \subset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족하고, 또한 만일 $\lim_{n \to \infty} E_n = E$이면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P(E)$$

F : 동연아, 확률측도 P는 가산준가법성을 갖음을 증명해보아라.

D : 네. 가측집합열 $\{E_n\}$에 대해서, $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$을 정의하면, 다음 식이 성립합니다.

$$G_n \subset G_{n+1}, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(G_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$$

여기서 첫 번째 등호는 <따름정리 6.1.1>에 의해서 성립해요. 따라서, 다음과 같이 확률측도 P의 가산준가법성이 성립합니다.

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \tag{6.1.3}$$

이를 Boole의 부등식이라 부르기도 합니다.

F : 다음 정리는 가산가법성의 성립여부를 조사하는데 아주 중요한 정리이다.

정리 6.1.2

확률공간 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$에서 다음 두 조건들은 동치이다.

(a) 확률측도 P가 유한가법성과 연속성공리를 갖는다.

(b) 확률측도 P가 가산가법성을 갖는다.

동연이가 조건 (b)로부터 조건 (a)를 유도해보아라.

D : 가산가법성이 성립하면 유한가법성도 성립해요. 따라서, 연속성공리가 성립함을 증명하면 증명이 끝납니다. 가측집합열 $\{E_n\}$이 $E_n \supset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$이고, 또한 $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$ 을 만족한다고 가정하면, 다음 식들이 성립해요.

$$E_n = [\bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1}^c)] \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1}^c)$$

이 식과 확률측도 P의 가산가법성에 의해서, 다음 식이 성립해요.

$$P(E_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k \cap E_{k+1}^c), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

이 식으로부터 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(E_k \cap E_{k+1}^c) + \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k \cap E_{k+1}^c) = P(E_1)(\leq 1)$$

따라서, 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 명제를 만족하는 자연수 N이 존재해요.

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k \cap E_{k+1}^c) < \varepsilon$$

즉, $\lim_n P(E_n) = 0$이 성립해요. 따라서, 연속성공리가 성립하지요.

F : 증명을 아주 잘했다. 영상이가 조건 (a)로부터 조건 (b)를 유도해보아라.

Y : 서로소인 가측집합열 $\{E_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$에 대해서 다음 집합들을 정의하기로 해요.

$$F_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

다음 식들이 성립함을 알 수 있어요.

$$F_n \supset F_{n+1}, \ (n = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{n \to \infty} F_n = \emptyset$$

연속성공리에 의해서, $\lim_{n \to \infty} P(F_n) = 0$이 성립해요. 또한, 확률측도 P의 유한가법성에 의해서 다음 식들이 성립합니다.

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) + P(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) + P(F_n)$$

따라서, 다음 식들이 성립해요.

$$\sum_{k=1}^{n} P(E_k) \leq P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq 1$$

여기서 $P(E_k) \geq 0$이므로, $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$는 수렴해요. 따라서, 다음 식들이 성립합니다.

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) + \lim_{n \to \infty} P(F_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$$

즉, 확률측도 P의 가산가법성이 성립함을 알 수 있어요.

6.2 누적분포함수

F : 누적분포함수를 정의하기 위해서, 우선 단조함수에 대해서 살펴보자. 점 a가 단조함수 F의 도약점(jump)이라는 것은 $F(a+) \neq F(a-)$임을 의미한다. 이 경우에 $F(a+) - F(a-)$를 도약점의 크기라고 한다. 단조함수는 다음과 같은 정리를 만족시킨다. 이 정리에 대한 증명은 이성백 (2002, 제1장)을 참조해라.

정리 6.2.1

단조함수 F는 다음 성질들을 만족한다.

(a) 단조함수 F의 불연속점들의 집합은 최대가산이다.

(b) 만일 함수들 F_1과 F_2가 단조증가이고, 집합 D는 실수집합 R의 조밀집합(dense set)이며, 또한 만일 각 $x \in D$에 대해서 $F_1(x) = F_2(x)$이면, F_1과 F_2는 같은 크기의 같은 도약점들을 갖고, 또한 F_1과 F_2는 이 도약점들 이외에서는 동일하다.

(c) 단조증가함수 F에 대해서, 함수 $\hat{F}(x) = F(x+)$를 정의하자. 이 함수 $\hat{F}$는 단조증가이며 우측연속이다. 즉, $\hat{F}(x) = \hat{F}(x+)$이다.

(d) 만일 집합 D는 실수집합 R의 조밀집합이고, 또한 만일 함수 F는 집합 D에서 단조증가하면, 함수 $\check{F}(x) = \inf\{F(t) \mid x < t \in D\}$는 실수집합 R에서 단조증가이며 우측연속이다. 즉, $\check{F}(x) = \check{F}(x+)$이다.

D : 여기서 함수 f가 우측연속이란 $\lim_{t \to x+0} f(t) = f(x)$를 의미하지요?

F : 그렇다. 측도 μ의 누적분포함수(cumulative distribution function)를 다음과 같이 정의한다.

정의 6.2.1 실수집합 R에서 모든 Borel집합들의 집합족을 $\mathbf{B}$라고 하자. 이 집합족 $\mathbf{B}$ 위에서 정의되고 유계집합에 대해서 유한값을 갖는 측도 μ를 실직선(real line) 위에서의 Baire측도라고 한다. 유한인 Baire측도 μ에 대

해서 함수 F를 $F(x) = \mu(-\infty, x]$로 정의한다. 이 함수 F를 측도 μ의 누적분포함수라고 한다. □

Y : Eureka! 이제 단조함수를 배운 이유를 알았어요. <정의 6.2.1>에 의해서, 누적분포함수 F는 단조증가함수이고, 우측연속이며, $F(-\infty) = 0$임을 알 수 있어요.

F : 그렇다. 확률공간 $(R, \mathbf{B}, P)$의 확률측도 P는 유한 Baire측도이다. 이 확률측도 P의 누적분포함수를 F라고 하자. 누적분포함수 F는 단조증가하며, 우측연속이며, $F(-\infty) = 0$이고, $F(\infty) = 1$이다. 확률측도와 누적분포함수 사이의 관계를 정리해보거라.

D : 제가 정리해 보겠습니다. 확률공간 $(R, \mathbf{B}, P)$의 확률측도 P에 대해서 다음 식을 만족하는 누적분포함수 F가 일의적으로 존재해요.

$$F(x) = P((-\infty, x]), \quad (x \in R)$$

역으로, 주어진 누적분포함수 F에 대해서 다음 식을 만족하는 확률측도 P가 일의적으로 존재해요.

$$P((a, b]) = F(b) - F(a), \quad (-\infty < a < b < \infty)$$

F : 확률측도와 누적분포함수의 관계를 잘 설명했다. 누적분포함수를 분포함수라고 부르기도 한다.

6.3 확률밀도함수

F : 지금부터는 누적분포함수로부터 확률밀도함수를 정의하기로 하자. 너희들이 알다시피, 확률분포에는 이산형과 연속형이 있다. 따라서, 이 두 가지 경우를 염두에 두고, 확률밀도함수의 자연스러운 정의를 찾아가 보기로 하자. 동연이가 누적분포함수가 퇴화되었다는 뜻을 설명해보아라.

D : 함수 $\delta_t(x) = \chi_{[t,\infty)}(x)$를 점 t에서의 점질량(point mass at t)이라 부르죠. 만일 누적분포함수가 점질량이면, 이 누적분포함수는 퇴화되었다(degenerate)고 해요. 그렇지 않으면, 비퇴화되었다(nondegenerate)고 해요.

F : 누적분포함수의 도약점들의 농도는 어떻게 될까?

Y : 누적분포함수는 단조증가함수이어요. <정리 6.2.1>에서 알 수 있듯이, 누적분포함수 F의 도약점들의 개수는 가산개이지요.

F : 이 도약점들을 $a_1 < a_2 < \cdots$ 라고 표기하자. 도약점 a_k에서 도약의 크기를 b_k라고 하면, $b_k = F(a_k) - F(a_k-)$이다. 다음과 같은 함수를 정의하자.

$$F_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{[a_k, \infty)}(x)$$

함수 $F_d(x)$는 구간 $(-\infty, x]$에서 분포함수 F의 모든 도약점들의 크기들의 합이다. 함수 $F_d(x)$를 분포함수 F의 도약부분함수(function of jumping part)라고 하자. 이 함수 $F_d(x)$는 어떠한 성질들을 가지고 있을까?

D : 분포함수 F의 도약부분함수 F_d는 다음과 같은 성질들을 갖음을 쉽게 알 수 있어요.

(a) 함수 $F_d(x)$는 단조증가이다.

(b) 함수 $F_d(x)$는 우측연속이다.

(c) $F_d(-\infty) = 0$

(d) $F_d(+\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leq 1$

F : 만일 $F = F_d$이면, 이에 해당하는 확률변수는 무슨 형태이지? 예를 들어 보아라.

Y : 그러한 경우에 F는 이산형 확률변수의 누적분포함수지요. 대표적인 예가 주사위를 던져 나오는 눈의 수를 나타내는 확률변수의 누적분포함수가 이러한 형태를 갖아요.

F : 그렇다. 만일 누적분포함수가 $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{[a_k, \infty)}(x)$이면, 함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{\{a_k\}}(x)$를 확률질량함수(probability mass function)라 한다. 누적분포함수 F에서 도약부분함수 F_d를 뺀 나머지 부분은 어떠한 성질을 가지고 있을까?

D : 이성백 (2002, pp. 15~18)에 의하면, 함수 $F_c(x) = F(x) - F_d(x)$는 비음이고 단조증가하며 연속이어요.

F : 그렇다. 그 성질의 증명은 약간 까다로와서, 구태여 여기서 설명할 필요를 느끼지 못하겠구나. 이 성질로부터 누적분포함수 F의 도약부분함수 F_d와 연속부분함수 F_c가 일의적으로 존재함을 알 수 있다. 누가 증명해볼래?

Y : 제가 해볼게요. 만일 누적분포함수 F가 도약부분함수 $F_d^{(1)}$과 연속부분함수 $F_c^{(1)}$으로 분해되고 또한 도약부분함수 $F_d^{(2)}$와 연속부분함수 $F_c^{(2)}$로 분해된다면, 식 $F_c^{(1)} + F_d^{(1)} = F_c^{(2)} + F_d^{(2)}$이 성립해요. 따라서, 다음 식이 성립하지요.

$$F_c^{(1)} - F_c^{(2)} = F_d^{(2)} - F_d^{(1)}$$

이 식의 좌변은 연속이므로, 우변도 연속이어야 해요. 우변이 연속이기 위해서는 각 도약점 a_j에서 $F_d^{(2)}(a_j) = F_d^{(1)}(a_j)$이어야 해요. 즉, $F_d^{(2)} = F_d^{(1)}$이고, 따라서 $F_c^{(1)} = F_c^{(2)}$이지요.

F : 잘 증명했다. 만일 $F = F_c$이면, 이에 해당하는 확률변수는 무슨 형태이지? 예를 들어 보아라.

D : 그러한 경우에 F는 연속형 확률변수의 누적분포함수지요. 대표적인 예로는 정규확률분포가 있어요.

F : 잘 대답했다. 지금까지 내용을 정리하면 다음과 같다.

(a) 누적분포함수 F를 $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \delta_{a_j}(x)$로 표현할 수 있다고 가정하자. 여기서 $b_j(>0)$가 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$을 만족하면, 이 누적분포함수를 이산형이라고 한다.

(b) 만일 누적분포함수 F가 연속이면, 이 누적분포함수를 연속형이라고 한다.

(c) 임의의 누적분포함수 F는 $F = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$로 나타낼 수 있다. 여기서 이산형 누적분포함수 F_1과 연속형 누적분포함수 F_2는 일의적으로 정해진다.

Y : 이산형 누적분포함수 F_1으로부터 확률질량함수(probability mass function)를 정의하고, 연속형 누적분포함수 F_2로부터 확률밀도함수(probability density function)를 정의하는군요.

F : 그렇다. 다음 절에서 이에 대해 논하기로 하자.

6.4 절대연속분포

F : 이 절에서는 확률밀도함수와 확률질량함수를 정의하기로 하자. 물론, 이 절에서의 적분

은 Lebesgue적분을 의미한다. 우선, 다음과 같이 절대연속(absolute continuity)이라는 개념을 정의하자.

정의 6.4.1 폐구간 $[a, b]$ 위에서 정의되는 함수 f가 다음 조건을 만족하면, 함수 f는 구간 $[a, b]$ 위에서 절대연속이라고 한다. 즉, 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대해서 다음 명제를 만족하는 $\delta(>0)$가 존재한다.

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

여기서 $\{(x_k, y_k) | k = 1, 2, \cdots, n\}$은 유한개의 겹쳐지지 않는 (nonoverlapping) 구간들의 집합이다. □

D : 그렇다면, 절대연속함수 f는 연속이고, 절대연속함수의 합이나 차도 절대연속함수이겠군요. 그런데, 절대연속과 확률밀도함수가 무슨 관계가 있어요?

F : 그 질문에 답하기 전에, 다음과 같은 질문을 생각해보자. 연속형 누적분포함수와 확률밀도함수와는 어떤 관계가 있을까?

Y : 연속형 누적분포함수의 미분이 확률밀도함수이지요.

F : 그렇다. 그러한 관계가 절대연속과 확률밀도함수를 연결시키는 것이다. 다음 정리가 성립한다. 이 정리의 증명은 Royden (1987, p. 110)을 참조해라.

정리 6.4.1

함수 F가 어떤 함수의 부정적분이기 위한 필요충분조건은 함수 F가 절대연속이다.

D : <정리 6.4.1>에서 알 수 있듯이, 함수 F가 구간 $[a, b]$ 위에서 절대연속이기 위한 필요충분조건은 다음 명제를 만족하는 함수 f가 존재하는 것이군요.

$$a \le x < y \le b \Rightarrow F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \tag{6.4.1}$$

Y : 그렇다면, 함수 F는 함수 f의 부정적분이고, 식 (6.4.1)의 명제는 미적분학의 근본정리(the fundamental theorem of calculus)이군요. 또한, 만일 함수 F의 도함수를 F'라고 하면, 거의 모든 점에서 $F' = f$이겠군요.

F : 그렇다. Chung (2001, p. 11)에서는 절대연속을 다음과 같이 정의하고 있다.

정의 6.4.2 함수 F에 대해서 다음 명제를 만족하는 함수 f가 존재하면, 함수 F가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 Lebesgue적분에 대해 절대연속이라고 한다.

$$x < y \;\Rightarrow\; F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \qquad \square$$

D : 앞에서 Lebesgue적분에 대해서 절대연속이라고 하셨는데, 그렇다면 다른 적분이나 측도에 대해서도 절대연속을 정의할 수 있나요?

F : 그렇다. 만일 가측공간 $(\Omega, \mathbf{B})$에서의 두 측도들 ν_1과 ν_2에 대해서 다음 명제가 성립하면, 측도 ν_2는 측도 ν_1에 대해서 절대연속이라 하고 $\nu_2 \ll \nu_1$으로 표기한다.

$$\nu_1(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu_2(A) = 0 \qquad (A \in \mathbf{B}) \tag{6.4.2}$$

만일 함수 F가 절대연속인 누적분포함수이면, 식 (6.4.1)에서 이에 해당하는 f의 특성은 무엇일까?

D : 함수 F가 단조증가이므로 $f \geq 0$ $a.e.$이고, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$이어요. 따라서, f는 연속형 누적분포함수 F에 대응하는 확률밀도함수이어요.

F : 측도의 절대연속성은 조건부기대값을 정의하거나 동치마팅게일측도(equivalent martingale measure)를 설명하는데 꼭 필요한 개념이다. 옵션과 같은 파생상품의 공정한 가격을 계산하기 위해서, 동치마팅게일측도를 사용한다. 따라서, 재무이론(finance)을 깊게 공부하려면, 절대연속성과 <정리 6.4.1>과 연관된 Radon-Nikodym정리를 알고 있어야 한다.

6.5 누적분포함수의 분해

F : 이제 이산형 누적분포함수에 대해서 알아볼 차례이다. 우선, 연속형도 아니고 이산형도

아닌 함수를 살펴보자. 만일 함수 F가 상수함수가 아니며, 또한 $F' = 0$ $a.e.$이면, F를 특이하다고(singular) 한다. 특이함수의 예를 들어 보아라.

Y : 앞에서 Cantor집합은 가산집합이 아니면서 영집합이라고 했어요. 따라서, Cantor집합을 사용해서 특이함수를 만들 수 있을 것 같아요.

F : 그렇다. 우선 동연이가 제 3.8 절에서 배운 Cantor집합을 복습해보거라.

D : 폐구간 $[0, 1]$을 삼등분한 다음, 이 폐구간에서 길이가 1/3인 개구간 $J_{1,1} = (1/3, 2/3)$을 제거하면, 2개의 폐구간들 $I_{1,1} = [0, 1/3]$과 $I_{1,2} = [2/3, 1]$을 얻어요. 집합 $E_1 = \bigcup_{k=1}^{2^1} I_{1,k}$를 정의해요. 폐구간 $I_{1,1}$에서 길이가 $1/3^2$인 개구간 $J_{2,1} = (1/3^2, 2/3^2)$을 제거하면, 2개의 폐구간들 $I_{2,1} = [0, 1/3^2]$과 $I_{2,2} = [2/3^2, 3/3^2]$을 얻어요. 폐구간 $I_{1,2}$에서 길이가 $1/3^2$인 개구간 $J_{2,3} = (7/3^2, 8/3^2)$을 제거하면, 2개의 폐구간들 $I_{2,3} = [6/3^2, 7/3^2]$과 $I_{2,4} = [8/3^2, 9/3^2]$을 얻어요. 또한, $J_{2,2} = J_{1,1}$이라고 하고, 집합 $E_2 = \bigcup_{k=1}^{2^2} I_{2,k}$를 정의해요. 이러한 과정을 반복하면, n번째에는 구간 $[0, 1]$에서 $2^n - 1$개의 개구간들 $J_{n,1}, J_{n,2}, \cdots, J_{n,2^n-1}$을 제거하여, 길이가 $1/3^n$인 2^n개의 폐구간들 $I_{n,1}, I_{n,2}, \cdots, I_{n,2^n}$을 얻어요. 이들의 합집합 $E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$를 정의해요. 이들의 교집합 $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$을 Cantor집합이라고 해요.

F : 잘 정리했다. 그럼, 지금부터 Cantor집합 P를 사용해서 특이함수를 만들어 보아라.

Y : 이 특이함수는 이성백(2002, pp. 23~24)에서 인용하는 것이어요. 우선, $k = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$과 $n = 1, 2, \cdots$에 대해서, $c_{n,k} = k/2^n$으로 정의하기로 해요. 또한, 다음과 같이 집합 U를 정의해요.

$$U = \lim_{n \to \infty} \bigcup_{k=1}^{2^n - 1} J_{n,k}$$

즉, U는 $[0, 1] \setminus P$이지요. 집합 U 위에서 함수 F를 다음과 같이 정의하기로 해요.

$$x \in J_{n,k} \Rightarrow F(x) = c_{n,k}$$

집합들 $J_{n,k}$와 $J_{l,m}$은 서로소이거나 동일하며, 또한 $k = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$에 대해서 $J_{n+1,2k} = J_{n,k}$이고 $c_{n+1,2k} = c_{n,k}$이지요. 따라서, 만일 $J_{n,k}$와 $J_{l,m}$이 동일하다면, $c_{n,k} = c_{l,m}$이어요. 결과적으로, 함수 F는 잘 정의되지요. 각 구간 $J_{n,k}$ 위에서 함수

F는 상수이어요. 또한, 구간 $J_{n,k}$ 위에서의 함수값은 구간 $J_{n,k}$의 우측에 있는 구간 $J_{l,m}$ 위에서의 함수값보다는 작아요. 따라서, 함수 F는 단조증가하지요. 또한, 다음 식들이 성립해요.

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1-} F(x) = 1$$

함수 F의 정의역을 확장하기 위해서, 다음 식을 정의하기로 해요.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0) \\ 1, & (x \ge 1) \end{cases}$$

따라서, 함수 F의 정의역은 $D = (-\infty, 0) \cup U \cup (1, \infty)$이지요. 다음 명제가 성립함을 쉽게 알 수 있어요.

$$0 \le x - y \le 3^{-n} \;\Rightarrow\; 0 \le F(x) - F(y) \le 2^{-n}$$

따라서, 함수 F는 D 위에서 일양연속이지요. 각 $x \in R$에 대해서 함수 $\tilde{F}$를 다음과 같이 정의하기로 해요.

$$\tilde{F}(x) = \inf\{F(t) \mid x < t \in D\}$$

<정리 6.2.1>의 (d)에 의해서, 함수 $\tilde{F}$는 단조증가이며 우측연속이어요. 함수 F가 D 위에서 일양연속이므로, $\tilde{F}$는 연속이지요. 즉, $\tilde{F}$는 연속형 누적분포함수이며, 각 구간 $J_{n,k}$ 위에서 상수임을 알 수 있어요. 따라서 다음 명제가 성립해요.

$$x \in R \setminus P \;\Rightarrow\; \tilde{F}'(x) = 0$$

즉, Cantor집합은 영집합이므로, $\tilde{F}$는 특이함수이어요.

F : 재미있는 예제이다. Feller (1970, p. 146)는 다음과 같은 특이함수에 관한 예를 제시하였다. 확률변수열 $\{X_n\}$이 서로 독립이고 구간 [0, 1]에서 일양분포를 갖는다고 하자. 다음과 같은 확률변수들을 정의하자.

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} X_{2k}, \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} X_{2k}, \quad W = U + V$$

이 확률변수들 U, V와 W의 누적분포함수들을 각각 $F_U(x) = \Pr(U \le x)$, $F_V(x) = \Pr(V \le x)$와 $F_W(x) = \Pr(W \le x)$로 표기하자. 함수들 F_U와 F_V는 Lebesgue측도에 대해서 특이하다. 그러나, F_W는 Lebesgue측도에 대해서 절대연속이다.

D : 특이함수는 누적분포함수에서 어떤 역할을 하나요?

F : 그 질문에 대한 답을 하기 위해서, 임의의 누적분포함수 F를 분해하기로 하자. <정리 6.4.1>에서 알 수 있듯이, 만일 F가 절대연속이면, 거의 모든 점에서 $F' = f$이다. 따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \tag{6.5.1}$$

만일 단조증가함수 F가 절대연속이 아니면, 어떻게 될까?

Y : 다음 부등식이 성립할거에요.

$$\int_a^b F'(t)dt \le F(b) - F(a) \tag{6.5.2}$$

F : 그렇다. 이를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 단조증가함수 F가 유계이고, $F(-\infty) = 0$이라고 하자. 함수 F의 도함수가 존재하는 점 x에서는 이 도함수를 $F'(x)$로 표기하자. 다음 명제들이 성립한다.

(a) 집합 $A = \{x \mid 0 \le F'(x) < \infty\}$에 대해서, $m(A^c) = 0$이다.

(b) 도함수 F'는 $(-\infty, \infty)$에서 적분가능하다.

(c) $x < y \Rightarrow \int_x^y F'(t)dt \le F(y) - F(x)$

(d) 함수 $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$와 함수 $F_S(x) = F(x) - F_{ac}(x)$를 정의하자. 함수들 F_{ac}와 F_S는 각각 $F_{ac}' = F'$ $a.e.$와 $F_S' = 0$ $a.e.$를 만족한다. 따라서, $F_S \equiv 0$이 아니면, F_S는 특이하다.

D : 그렇다면, F_{ac}를 단조증가함수 F의 절대연속부분이라 하고 F_S를 F의 특이부분이라 하겠군요.

F : 그렇다. 만일 어떤 비음함수 f가 F'와 거의 모든 점에서 동일하면, f를 F의 밀도함

수(density function)라고 한다. 특히, 함수 F가 누적분포함수인 경우에 대해서 설명해 보아라.

Y : 그러한 경우에는 f를 확률밀도함수라고 해요. 또한, 누적분포함수 F의 도약부분함수 F_d는 특이부분함수 F_S의 일부분이지요?

F : 그렇다. 특이부분함수 F_S에서 도약부분함수 F_d를 뺀 나머지를 함수 F의 특이연속부분함수라고 한다. 지금까지의 내용을 정리하면, 다음과 같다. 이 정리의 증명은 이성백(2002, pp. 26~27)을 참조해라.

정리 6.5.1

임의의 누적분포함수 F를 도약부분함수 F_d, 특이연속부분함수 F_s 그리고 절대연속함수 F_{ac}의 합으로 나타낼 수 있다. 즉, $F = F_d + F_s + F_{ac}$이다. 여기서 F_d, F_s와 F_{ac}는 일의적이다.

6.6 결 론

D : 확률측도란 측도의 특수한 경우이고, 따라서 Lebesgue측도를 이해해야만 절대연속, 누적분포함수, 확률측도, 확률밀도함수, 확률질량함수를 이해할 수 있군요.

F : 그렇다. 아빠는 확률론이라는 것을 확률측도를 바탕으로 하는 해석학 정도로 생각하고 있다. 확률론에서도 가장 중요한 것은 수렴에 관한 것이고, 이에 대한 내용은 기본적으로 Lebesgue적분의 수렴정리들을 바탕으로 하고 있다. 따라서, 확률론이나 확률과정론, 확률미분방정식 등을 이해하는데 Lebesgue측도와 Lebesgue적분을 아는 것은 필수적이다. 지금까지 우리가 대화를 통해서 공부한 내용은 Lebesgue측도와 Lebesgue적분에 관한 기초적인 것이니, 이외숙 · 최병선(2003)의 『측도론』과 이성백(2002)의 『확률론』을 한번 독파해보거라.

D & Y : 아빠! 너무 수고가 많으셨어요. 그래서 저희들이 아빠에게 드릴 선물을 준비했어요.

We $9x^2 - 6|x|y + 9y^2 = 8$ Mom and Dad.

F : 고맙다. 그런데, 식 $9x^2 - 6|x|y + 9y^2 = 8$은 무슨 뜻이지?

Y : 아! 그 이름도 거룩한 'LOVE'를 의미하지요.

F : 어떻게 그 식을 만들었지?

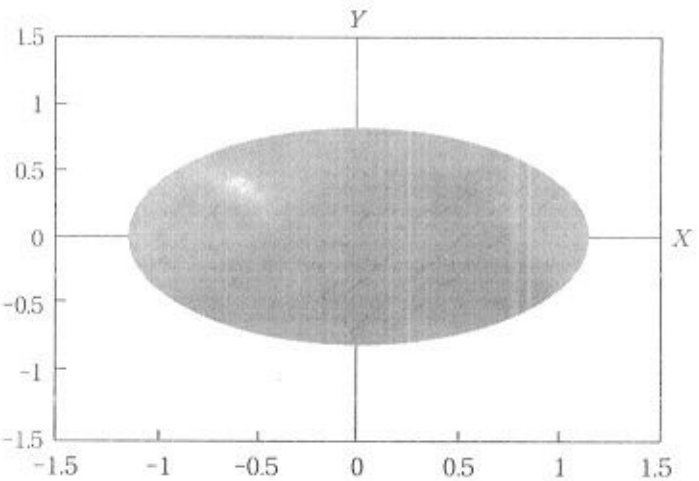
D : 우선 다음과 같은 타원함수를 생각해보았어요.

$$X^2 + 2Y^2 = \frac{4}{3} \tag{6.6.1}$$

Y : 식 (6.6.1)의 그래프를 그리기 위해서, 다음 MATLAB프로그램을 실행했어요. 그 결과로 <그림 6.6.1>이 그려졌어요.

```
function love1
    t = (0:1:360)'*pi/180;
    X=2/sqrt(3)*cos(t);
    Y=sqrt(2/3)*sin(t);
    fill(X,Y,'k')
    % draw the axis
    lin1=line([-1.5 1.5],[0 0]);
    set(lin1,'Color','k','LineWidth',1);
    lin2 =line([0 0],[-1.5 1.5]);
    set(lin2,'Color','k','LineWidth',1);
    %axis change and mark axis
    v = [-1.5,1.5,-1.5,1.5];
    axis(v)
    text(1.4,0.10,'X')
    text(0.10,1.4,'Y')
```

【그림 6.6.1】 $X^2+2Y^2=\frac{4}{3}$



D : 식 (6.6.1)의 타원함수를 $\frac{\pi}{4}$ 회전한 식은 다음과 같아요.

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{4}{3} \tag{6.6.2}$$

Y : 식 (6.6.2)를 정리하면, 다음 식이 됩니다.

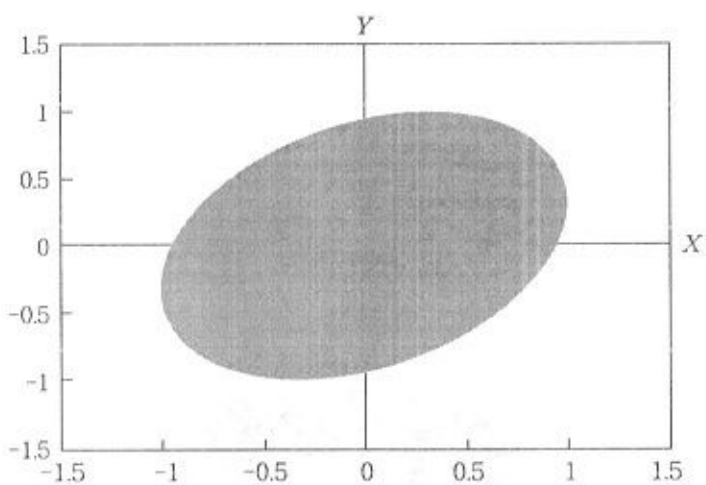
$$9x^2-6xy+9y^2=8 \tag{6.6.3}$$

D : 식 (6.6.3)의 그래프를 그리기 위해서, 다음 MATLAB프로그램을 실행했어요. 그 결과로 <그림 6.6.2>가 그려졌어요.

```
function love2
    t = (0:1:360)'*pi/180;
    x = cos(t);
    y = 1/3*x + sqrt(8/9)*sin(t);
    fill(x,y,'k')
    % draw the axis
```

```
lin1=line([-1.5 1.5],[0 0]);
set(lin1,'Color','k','LineWidth',1);
lin2 =line([0 0],[-1.5 1.5]);
set(lin2,'Color','k','LineWidth',1);
%axis change and mark axis
v = [-1.5,1.5,-1.5,1.5];
axis(v)
text(1.4,0.10,'x')
text(0.10,1.4,'y')
```

【그림 6.6.2】 $9x^2 - 6xy + 9y^2 = 8$



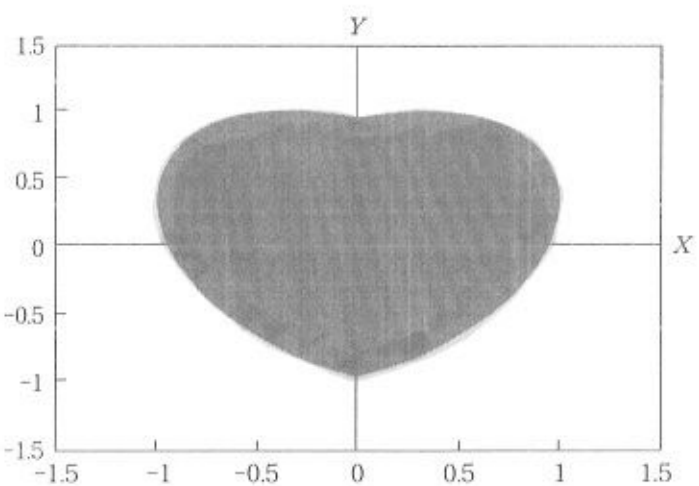
Y : 식 (6.6.3)에서 x 대신 $|x|$를 대입하면, 다음 식이 되지요.

$$9x^2 - 6|x|y + 9y^2 = 8 \tag{6.6.4}$$

D : 식 (6.6.4)의 그래프는 식 (6.6.3)의 그래프에서 $x \geq 0$인 부분을 y축에 대칭시킨 것이어요. 식 (6.6.4)의 그래프를 그리기 위해서, 다음 MATLAB프로그램을 실행했어요. 그 결과로 <그림 6.6.3>이 그려졌어요.

```
function love3
    nt = -90:1:270;
    t = nt*pi/180;
    x = cos(t);
    y = 1/3*abs(x) + sqrt(8/9)*sin(t);
    fill(x,y,'k')
    % draw the axi)s
    lin1=line([-1.5 1.5],[0 0]);
    set(lin1,'Color','k','LineWidth',1);
    lin2 =line([0 0],[-1.5 1.5]);
    set(lin2,'Color','k','LineWidth',1);
    %axis change and mark axis
    v = [-1.5,1.5,-1.5,1.5];
    axis(v)
    text(1.4,0.10,'x')
    text(0.10,1.4,'y')
```

【그림 6.6.3】 $9x^2 - 6|x|y + 9y^2 = 8$



F : Thank you! Thank you! Thank you! 우리도 너희들을 사랑한다.

참고문헌

이성백 (2002). 『확률론』, 세경사.

이외숙 · 최병선 (2003). 『측도론』, 세경사.

최병선 (2001). 『Wavelet해석』, 세경사.

_____ (2001). 『Fourier해석 입문』, 세경사.

Beckmann, P. (1971). *A History of Pi*, Barnes & Noble Books.

Chung, K. L. (2001). *A Course in Probability Theory* (3rd Ed.), Academic Press.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability and Its Applications*, Vol. 1 (3rd Ed.), Wiley.

Littlewood, J. E. (1944). *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford.

Pinter, C. C. (1970). *Set Theory*, Addison Wesley Pub.

Royden, H. L. (1988). *Real Analysis* (3rd Ed.), MacMillian Pub.

Wade, W. R. (2000). *An Introduction to Analysis* (2nd Ed.), Prentice Hall.

색 인

국문 색인

ㄱ

가산 37~42
가산가법성 66, 72, 128, 131, 133, 140, 145~146, 149, 150
가산가법족 74
가산농도 38, 49, 52
가산준가법성 137, 141, 148
가산집합 37~43, 67, 86, 92, 157
가측 138
가측공간 145
가측집합 96~97, 125, 137, 145~146
가측집합열 148~149
가측함수 96, 98~99, 126
개구간 48
개집합 77, 82, 84
거리 76, 79
거의 모든 점 58, 61, 63, 87, 102
거의 모든 점에서 수렴 111, 114, 124
결정적 14
경계점 76
고립점 77
공집합 86
교집합 82
구분구적법 63
극한 16, 33
근방 76
근호수 50
금융공학 15, 53
금융파생상품 58
기수 34, 36

ㄴ

나일강 15
내적공간 58
내점 76
내측도 64, 68~71
노름 75
노름공간 76, 79, 81
농도 34, 36, 43, 45~48
농도대등 35
누적분포함수 144, 151~154, 159~160

ㄷ

단사 34, 38~39, 44~46
단조분포함수 151
단조수렴정리 112, 121, 127
단조증가 158, 159
대각선기법 49
대등 35~38, 47~48
대수 73~74
대수방정식 49
대수적 수 50
대칭률 35, 37
도약부분함수 153, 160
도약점 151, 153
동치마팅게일측도 58, 156

ㅁ

마녀모자함수 111
만유인력의 법칙 23
메소포타미아 17
멱집합 45, 50~51
무한 19, 33
무한부분집합 38, 40
무한소수 49
무한집합 36, 39, 47
미적분학의 근본정리 20, 57, 156
밀도함수 159

ㅂ

반사율 35~37, 44
반폐구간 48
벡터공간 75, 79
복소수적분 105
부적합한 Riemann적분 104~105
분포함수 152
비가산집합 47~49, 69, 86, 88
비유계집합 72
뿔의 부피 27, 30

ㅅ

사건 145
사상 34
삼각형의 법칙 76
3진법 92
상계의 하한 61, 67~68
수렴정리 108~109
순서쌍 41
스펙트럼분석 23
σ-대수 73, 75, 81~82, 97, 137, 140
σ-집합대수 74
σ-집합환 74
σ-체 74
신호와 영상이론 14

ㅇ

약수렴 121
양자역학 15
여집합 82
연속농도 48~49, 52, 63
연속부분함수 153
연속성공리 148, 150
연속체가설 52
연속형 누적분포함수 155
연속형 확률변수 154
열린덮개 133~136
영집합 86, 88, 91, 102, 107, 114, 157
완비 58, 72, 78~79
외점 76
외측도 64, 67~69, 133
우측연속 151, 153, 158
원의 넓이 16
유계 21
유계수렴정리 112~115, 121, 125
유리수 50
유한가법성 66, 146, 149
유한가법족 73
유한집합 35~36, 39, 43
유한측도 145
이산형 확률변수 153
일대일 대응 35~36
일대일 사상 34~35
일반화된 Lebesgue지배수렴정리 130
일양수렴 54~55, 109, 111~112, 115
일양연속 158

ㅈ

자연수 50
재무이론 14
적분가능 101, 107
전단사 34~35, 40, 44~47, 52
전사 34, 39, 46
절대연속 155~156, 159~160
절대연속부분 159
절대연속함수 155
점별수렴 109, 111, 114, 125
정보과학 15
정보이론 14
조밀집합 78, 151
지배수렴정리 105, 119
직적 41
진부분집합 41, 45
집적점 77, 82
집합 31, 33
집합대수 73
집합론 33
집합족 73
집합체 73
집합환 73

ㅊ

초월수 50
최대가산 40
최대가산집합 39, 51
추이율 35, 37, 44
측도 132, 144
측도공간 144
측도론 63

ㅋ, ㅌ

카아티젼곱 41, 42
통신 14
퇴화 152
특이부분 159~160
특이연속부분함수 160
특이함수 157~159

ㅍ

파라독스 18
파생상품 156
평균값정리 20
평균제곱수렴 111
폐구간 48
폐집합 77, 82, 84
폐포 77
표본공간 145
표본점 145

ㅎ

하계의 상한 61, 68
함수해석학 54, 78, 121
합집합 82
확률공간 145~146
확률과정론 160
확률론 14, 143~146, 160
확률미분방정식 160
확률밀도함수 144, 154~155, 160
확률수렴 111
확률적 14, 53
확률질량함수 153~154, 160
확률측도 143~146, 150~160

영문 색인

A

Achilles 18
almost everywhere *a.e.* 87
almost surely *a.s.* 87

B

Baire측도 151
Banach공간 75, 79, 108
Barrow 22
Bernouille 26
Boole대수 73
Boole의 부등식 149
Boole집합대수 73
Borel집합 80~81, 83, 85, 122

C

Cantor 33~34, 36, 49, 52
Cantor먼지(Cantor dust) 91
Cantor삼진집합 88
Cantor집합 86~89, 90~92, 157
Carathéodory정리 133~135
Cauchy 20
Cauchy열 78~79
Cauchy의 평균값정리 20
Cavalieri의 원리 27, 29~30
Chaos이론 93
Cleopatra 15
Collins 26

D, E, F

Dirichlet함수 59, 61, 63~65, 87, 100, 102
Egoroff정리 123
Fatou정리 112~113, 121, 125, 127
Fractal이론 93
Fubini정리 56

H, I, J, K

Heine-Borel정리 69~71
Hilbert공간 15, 58, 72, 75, 80, 108
Huygens 24, 26
IT 14
Jordan가측 63, 65, 72, 100
Jordan측도 14, 64~65, 68~69, 72, 74
Kepler 16, 19

L

Lebesgue 34
Lebesgue가측 71~72, 80, 83, 85, 96, 134~135
Lebesgue가측집합 85, 97
Lebesgue가측함수 95~96, 100
Lebesgue내측도 135
Lebesgue수렴정리 72, 112, 130
Lebesgue적분 13~14, 52~54, 57, 60~62, 73, 80, 87, 95, 99~102, 104, 106, 108, 110, 114, 117, 124, 131, 141, 160
Lebesgue적분가능 101~102, 106, 113, 119
Lebesgue적분값 126
Lebesgue적분의 수렴정리 160
Lebesgue지배수렴 131
Lebesgue지배수렴정리 108, 112~115, 117, 121, 124, 127~129, 141
Lebesgue측도 14, 52, 66~74, 80, 83, 95, 102, 128, 131, 134, 140~144, 159~160

Lebesgue측도공간 75
Leibnitz 15, 19, 24~26
Leonardo da Vinci 17
Lévy수렴정리 113
L'Hospital정리 21
Littlewood 122

M, N, R, Z

MATLAB프로그램 89~90, 161~164
Newton 15, 19, 21, 24~26
Radon-Nikodym정리 58, 156
Riemann 21, 56
Riemann-Lebesgue정리 119~121
Riemann적분 13~14, 21, 53~56, 60~62, 66, 100~103, 106, 108, 110~114, 117
Rolle의 정리 20
Zenon의 파라독스 18~19

▣ 저자 소개 ▣

최병선(崔 秉 善)

서울대학교 수학과 졸업 (이학사)

미국 Standford대학교 대학원 졸업 (통계학 석사, 경제학 석사
Ph. D. in Statistics <major> and Economics <minor>)

연세대학교 상경대학교수 역임

현재 서울대학교 경제학부 교수 (재무경제학 담당)

Email bschoi12@snu.ac.kr

동연 · 영상과 함께 배우는 Lebesgue적분 입문

2003년 11월 24일 제1판 1쇄 인쇄
2003년 11월 28일 제1판 1쇄 발행

저 자 최 병 선
발행자 김 재 은

발행처 世 經 社
주 소 서울시 마포구 신수동 448-6
E-mail sgpub@daum.net
등 록 1979. 8. 31. 제10 - 19호(倫)
전 화 (02) 719 - 3995 ~ 6
팩 스 (02) 713 - 7480

ISBN 89 - 7127 - 086 - 1 93310

CC BY NC SA

최병선 교수 Creative Commons Book List (http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/314) [1]

1. (제2판) SAS를 이용한 현대통계학 (이성백교수와 공저)
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94393
2. 행렬의 대각화와 Jordan표준형 (이성백교수와 공저)
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94394
3. Fourier 해석 입문
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94413
4. Lebesgue적분 입문
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94414
5. Wavelet 해석
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94415
6. 회귀분석(상)
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94433
7. 다변량시계열분석
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94434
8. 이산형 재무모형의 수리적 배경
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94455
9. 회귀분석(하)
   http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94456
10. 단변량시계열분석
    http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/94457
11. 금융공학 IV: Monte Carlo Methods for Finance and Economics
    http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/98466
12. 금융공학 V: Introduction to Financial Engineering with R
    http://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/99003

[1] 현대문화사(hun1249@hanmail.net)에서 이 책들의 POD판을 구하실 수 있습니다.